2015 年国勢調査を用いた齢都道府県構造化人口モデルの感度解析

大泉嶺

1　はじめに

日本は期間合計特殊出生率が人口置換水準を下回ってから４０年以上経ち，少子高齢化とともに人口も減少局面に転じている．人口減少に陥った要因は，現代社会の生活スタイルに移行していく過程で生じた多岐にわたるもので，一つを特定することは難しいと考えられている．例を挙げれば，女性の就学や社会進出，非正規雇用の拡大などこれらが晩婚化・未婚化や晩産化の増加に一定の影響を及ぼした事などだ．しかし，こうした要因を外科的な手段で取り除くことは現代の時代精神に反するだけでなく，現在の経済構造の中でも，実現不可能であることは言うまでもない．２０１４年以降政府は,「働き方改革」や「待機児童ゼロ」といった出産・育児の負担軽減や,「地方創生」といったスローガンの下に、出生率の低い都心への人口一極集中の是正に向けて取り組んでいる．こうした政策は基本的に、女性の働きやすさや過疎化の進む自治体の憂慮など、少子高齢化社会の背景に潜む社会心理を中心とした分析を根拠としている．　一方で，人口を人の数のダイナミクスと考えた場合，それを構成する要素は単純である．年齢，出生，死亡，そして地域間の移動である．社会的背景は別として，少子高齢化は出生が減り，死亡も減った結果と考える場合，現代の人口減少に影響を及ぼしている年齢別の出生，死亡，移動の行動を定量的に評価できれば，精密な分析や年齢や世代に合わせた政策立案が出来るだろう．　こうした定量評価を考えるのにあたって，本報告書では筆者がこれまでまたは今なお研究中の内容をまとめたものである．それは主に固有関数による理論と感度分析という実証的手法である．

2　Leslie 行列と MacKendrick 方程式の数学的類似性

本論に入る前に安定人口モデル Leslie 行列について，ここでは紹介する[*1]．　時刻 t における年齢 a 歳の女性コーホートの人口を $P_t(a)$ とする．このモデルを構成する基本的な過程はこのコーホートが持つ出生率 $m_a \geq 0$ を用いて表される再生産過程：

$$P_t(a) = \sum_{a=0}^{\omega} m_a P_t(a) \tag{1}$$

と翌年までの生存率 $0 \leq p_a \leq 1$ とする生存過程:

$$P_{t+1}(a+1) = p_a P_t(a) \tag{2}$$

[*1] この章は「大泉嶺　(2018)　『国際的・地域的視野から見た少子化・高齢化の新潮流に対応した人口分析・将来推計とその応用に関する研究』　平成 30 年度総括報告書 pp.157-166」より抜粋

の二つで表すことにする．このとき，ω は最大寿命である．このモデルは行列を用いて次のように書くことが出来る：

$$\mathbf{P_{t+1}} = \mathbf{L}\mathbf{P_t} \quad \mathbf{P_t} := \left(P_t\left(a\right)\right)_{0\leq a\leq\omega}$$
$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_a & \cdots & m_\omega \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{\omega-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

一方, 年齢と時刻を連続化した MacKendrick 方程式は死亡率 $\mu\left(a\right) \geq 0$ と出生率 $F\left(a\right) \geq 0$ が与えられたとき, 人口密度関数 $P_t\left(a\right)$ は, 再生産過程：

$$P_t\left(0\right) = \int_0^\omega da\ F\left(a\right) P_t\left(a\right), \tag{4}$$

と死亡過程：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right] P_t\left(a\right) = -\mu\left(a\right) P_t\left(a\right) \quad P_0\left(a\right) = \varphi\left(a\right), \tag{5}$$

を満たす．これらのモデルは多くの共通点を持つ．例えば Leslie 行列 $\mathbf{L}$ が対角化可能である場合（通常この場合の方が多い）一般的なコーホート動態は以下のようになることが知られている：

$$\mathbf{P_t} = \mathbf{L}^t\mathbf{P_0} = \sum_{k=0}^{\omega-1} \lambda_k^t \frac{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P_0}\rangle}{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k\rangle} \mathbf{V}_k \quad \left|\lambda_k\right| \geq \left|\lambda_{k+1}\right|.$$

λ_k は行列 $\mathbf{L}$ の k 番目の固有値であり，$\mathbf{U}_k$，$\mathbf{V}_k$ はその固有値に対応する左右固有ベクトル[*2]を表し，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はそれらの内積を意味する．特に，最大固有値 λ_0 と対応する左右固有ベクトルはそれぞれ，内的自然増加率 (intrinsic rate of natural increase), 繁殖価（reproductive value），安定齢分布 (stable age distribution) と呼ばれ，人口学的にも生物学的にも特別な意味を持つ [1]．同様に MacKendrick 方程式の場合も以下のような解の表現がある [2]

$$P_t\left(a\right) = \begin{cases} \varphi\left(a-t\right) \frac{l_a}{l_{a-t}} & a-t \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{r_k t\right\} \frac{\langle\phi_k^*, \varphi\rangle}{\langle\phi_k^*, \varphi_k\rangle} \varphi_k\left(a\right) & a-t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

このとき $<\phi, \cdot>$ は汎関数と呼ばれ, 以下で定義される:

$$\langle\phi, \varphi\rangle := \int_0^\omega da\ \phi\left(a\right)\varphi\left(a\right).$$

ここで現れる $\phi_k^*\left(a\right), \quad \varphi_k\left(a\right)$ は固有関数と呼ばれ, 本質的には Leslie 行列の左右固有ベクトルと同じ構造を持っている．2017 年の同研究プロジェクトの報告書にも記載したが, 左右固有ベクトルは少子化に及ぼすコーホートの出生・死亡の影響を評価することが出来る．

3 多状態齢構造モデル

Leslie 行列と McKendrick 方程式の数学的類似性は，齢構造の共通性と共に線形というより抽象的な構造に依拠する．関数解析という分野ではこうした線形のような演算構造を抽象的なベク

*2 左固有ベクトルは $\mathbf{U}_k\mathbf{L} = \lambda_k\mathbf{U}_k$ を満たす横ベクトル, 右固有ベクトルは $\mathbf{L}\mathbf{V}_k = \lambda_k\mathbf{V}_k$ を満たす縦ベクトルをそれぞれ意味する．

トル空間の上で考える事で，この二つのモデルを等しく扱う事が出来る．この考えの基では Leslie 行列は有限次元のベクトルの演算であり，対して McKendrick 方程式は無限次元のベクトル空間上の演算という事になる．この次元の違いは平たく言えば固有値，固有ベクトルの数の違いを見れば分かるであろう．　前章のこれらの構造に着目しつつ，ここでは地域移動などの効果を考えたモデルを紹介する[*3]．人を特徴づける状態変数の多くは，必ずしも年齢と一致するとは限らない．例えば居住地や資産，体重などは年齢と独立かまたは一律に決定されるものではない．これらは年齢 $a \in (0\,\alpha)$ 毎にばらつきがあり，個々人の生活史による．ある個人を特徴づける変数が d 個あり $X_a \in A \subset \mathbb{R}^d$，それらのばらつきを生み出す "ゆらぎ" が N 個あるとする．これらの特徴の年齢における発展過程が以下の Ito 型確率微分方程式に従うとする：

$$X_a^j = y^j + \int_s^a g_j(\tau, X_\tau)\, d\tau + \sum_{l=1}^{N} \int_s^a \sigma_{jl}(\tau, X_\tau)\, d\mathcal{B}_\tau^l \quad j = 1, 2, \cdots, d. \tag{7}$$

ここで，$y \in A$ は年齢 s における状態，$\mathcal{B}_a$ はブラウン運動をそれぞれ表す．確率微分方程式は初期値 (s, y) に関する常微分方程式が持つ通常の，解の一意性は持たない．そのかわり，確率分布においての一意性が適用される．つまり，この方程式の解（sample path という）一つ一つが個々人生活史が生み出す変数の変化とみることが出来る [4, 5, 6]．当然，出生力:$F(a, X_a) \geq 0$ や死亡率:

$$\mu \in L^1_{\mathrm{loc},+}([0, \alpha) \times A), \quad \int_0^\alpha da\ \mu(a, y) = \infty \quad \forall y \in A \quad \alpha \text{ は最大年齢}$$

も年齢だけで無くこうした状態の変化に依存すると考える方が自然であろう．こうした，個人の生活史で駆動された人口のダイナミクスは以下の偏微分方程式の解として表すことができる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) P_t(a, y) = -H(a, y)\, P_t(a, y), \tag{8}$$

作用素 $H(a, y)$ は以下で与えられる：

$$H(a, y)\phi(y) = \mu(a, y) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^j}\left(g_j(a, y)\,\phi(y)\right) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j'=1}}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^{j'}}\left(S_{jj'}(a, y)\,\phi(y)\right)$$

[5]. さらに，

$$S_{j,j'}(a, y) := \sum_{l=1}^{N} \sigma_{lj}(a, y)\,\sigma_{lj'}(a, y).$$

同様に再生産過程は以下で与えられる：

$$P(t, 0, y) = \nu(y) \int_0^\alpha \int_A da dy\ F(a, y)\, P_t(a, y), \tag{9}$$

$\nu(\cdot) \in L^1_+(A)$ は 以下を満たす新生児の状態分布である[*4]

$$\int_A dy\ \nu(y) = 1.$$

このモデルも，齢構造モデルと同様左右固有ベクトルを用いた次のような漸近解を持つ：

$$P_t(a, y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \phi_k^*, \varphi \rangle}{\langle \phi_k^*, \varphi_k \rangle} \exp\{r_k t\}\, \varphi_k + O(\exp\{(\Re r_k - \epsilon)t\}), \tag{10}$$

[*3] この章は，現在投稿中の東京大学　稲葉教授との共著論文の概要の一部を説明する

[*4] ここでは新生児の状態分布は親と独立を仮定している．

左右固有ベクトルは次で与えられる [7]：

$$\varphi_k(a,y) = \exp\{-r_k a\} \int_A dy\ \nu(x) K(0, x \to a, y) \tag{11}$$

$$\phi_k^*(a,y) = \int_A d\xi\ \phi_k^*(0,\xi)\nu(\xi) \int_a^\alpha d\tau\ \ \exp\{-r_k(\tau - a)\} \int_A d\zeta\ K(a, y \to \tau, \zeta) F(\tau, \zeta). \tag{12}$$

さらに，密度関数 $K(s, x \to a, y)$ は経路積分を用いる事で以下の様に表現できる [5]：

$$\begin{aligned} K(s, x \to a, y) &= \int_{X_s=x}^{X_a=y} \mathcal{D}(x) \frac{1}{Z_a} \exp\left\{-\int_s^a d\tau\ \mathcal{L}\left(\tau, \dot{X}_\tau, X_\tau\right)\right\} \\ \mathcal{L}\left(a, \dot{X}_a, X_a\right) &= \frac{1}{2}\left(\dot{X}_a - g(a, X_a)\right) \mathbf{S}^{-1} \left(\dot{X}_a - g(a, X_a)\right) + \mu(a, X_a) \end{aligned} \tag{13}$$

我々が，頻繁に観測できるパラメータの古典的履歴は Euler–Langrange 方程式の境界値問題の解として表現できる：

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial X_\tau^j} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \dot{X}_\tau^j}\right] \mathcal{L}\left(\tau, \dot{X}_\tau, X_\tau\right) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d. \\ &X_s = x, \quad X_a = y \end{aligned}$$

また，このモデルの特筆するところは，左固有ベクトルを与える方程式から $v \in V \subset \mathbb{R}^{d'}$ を制御パラメータとすると，制御方程式：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\tilde{\phi}_r^*(a, y, \Gamma) - \inf_{v \in \mathbb{V}} \left\{[H^*(a, y, v, \Gamma) + r]\, \tilde{\phi}_r^*(a, y, \Gamma) - F(a, y, v, \Gamma)\right\} = 0 \\ &\tilde{\phi}_r^*(\alpha, y, \Gamma) = 0 \\ &\tilde{\psi}_r(\Gamma) = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

が得られる*5．これを満たす $\tilde{\phi}_r^*(a, y, \Gamma)$ と v を見つけ出せばそれは内的自然増加率を最大化する生活史の制御となる．つまり，繁殖価を与える関数を最大化する生活史が人口増加を生み出す．この結果は，長期的少子化対策はこの解を参考にすることが出来るだろう．また，このことは進化の理論も含んでおり，適応的な種が満たすべき関係も表している．このように，多状態齢構造モデルは様々な環境における．人口動態やその制御あるいは生物全体の適応進化を考える上で有用である．

4　離散多状態齢構造モデル（一般化 Leslie 行列）とその応用

連続時間・年齢・状態を仮定した所謂無限次元のモデルを前章で説明した．しかし，こうした理論に実データを適用しようとすると難しい．なぜなら，国勢調査などは実施時期が 5 年に一度であるように，調査はその特性に応じて制約があるからである．特にアンケート形式の調査や人口学的な大規模調査は，物理・化学のような実験室で行える連続的データの収集は現時点では不可能と言って良い．そこで，データに合わせて離散化したモデルで近似を考える必要がある．この章では人口問題研究 76（1）号に掲載予定である筆者の研究の概略を抜粋含め説明する．

前章の多状態齢構造モデルは抽象的ではあるが，その代わり多くの応用が考えられる．都道府県間の移動を考慮した齢構造モデルもこの範疇に入れられる．まずは，モデルの構築を見ていく．

---

*5 これを Hamilton–Jacobi–Bellman(HJB) 方程式と呼ぶ

女性コーホートの生活史は加齢とともに居住地の移動がある一定割合起こるとする．今，a 歳の女性が j 県から i 県に移動する確率を $T_{ij}(a)$ とする，j 県における同年齢の生存率 $s_j(a)$ を用いて i 県に移住出来る確率 $K_{ij}(a)$ は

$$k_{ij}(a) := T_{ij}(a) \times \ s_j(a)$$

と表せるものとする．ここで，時刻 t における a 歳で j 県に在住する女性コーホートの人口を $P_t(a,j)$ とおくと，翌年 i 県に移住した女性コーホートは以下の方程式に従う

$$P_{t+1}(a,i) = \sum_j k_{ij}(a) P_t(a,j). \tag{15}$$

一方，時刻 t における a 歳で j 県に在住する女性コーホートの翌年 i 県に再生産する出生率を $m_{ij}(a)$ とおくと，再生産過程は

$$P_{t+1}(0,i) = \sum_{a=0}^{\omega} \sum_j m_{ij}(a) P_t(a,j) \tag{16}$$

となる．ここで，一般的に地域間出生率 $m_{ij}(a)$ の i,j は独立していないが，簡単の為に次のように分解できるものと仮定する

$$m_{ij}(a) = \phi(i) \times f_j(a).$$

$\phi(i)$ と $f_j(a)$ はそれぞれ i 県の全国における出生数の構成比と j 県における純粋な出生率とする．すると式 (16) は

$$P_{t+1}(0,i) = \phi(i) \sum_{a=0}^{\omega} \sum_j f_j(a) P_t(a,j) \tag{17}$$

となって扱い安くなる．その理由については後に述べるとする．　こうして，人口動態を構成する式 (15) 及び式 (17) が導出出来た．この二つを本稿では“出生数の構成比一定の一般化レスリー行列モデル”と呼ぶ.

このモデルの右固有ベクトルは

$$w(a,i) = w(0) \lambda^{-a} \sum_j \phi(j) K(0,j \ \rightarrow \ a,i) \tag{18}$$

で与えられる．ここで，関数 $K(s,j \rightarrow \ a,i)$ は次で定義される

$$K(s,j \ \rightarrow \ a,i) :=$$
$$\begin{cases} \sum_{j_{a-1}} \sum_{j_{a-2}} \cdots \sum_{j_{a-s-1}} k_{ij_{a-1}}(a-1) k_{j_{a-1}j_{a-2}}(a-2) \cdots k_{j_{a-s-1}j}(a-1) & s < a \\ \delta_{ij} & s = a \end{cases}$$

この式は前章で扱った式 (13) に対応する密度関数であり，年齢 s で j 県から年齢 a で i 県に生存して移住した女性の起こりうる全ての履歴の和（つまり経路積分）による表現によって書き表したものである [5]．左固有ベクトルについても

$$v(a,j) = v(0) \sum_{x=a}^{\omega} \lambda^{-(x-a)-1} \sum_i K(0,j \ \rightarrow \ a,i) f_i(a)$$

となって，左右固有ベクトルとも多状態例構造モデルの文脈と一致している．ちなみ固有方程式は

$$1 = \sum_{a=0}^{\omega} \lambda^{-a-1} \sum_i \sum_j \phi(j) K(0,j \ \rightarrow \ a,i) f_i(a) \qquad (9) \tag{19}$$

となるので，多状態例構造モデルの一般的性質の多くは行列モデルによる近似に引き継がれる．このようにして我々はデータを用いた解析に適した行列モデルを構築する事が出来た．これが各地域の出生数の構成比が一定の場合の移動を考慮した Euler-Lotka 方程式である．このように，各地域の出生数の構成比が一定という仮定は親の居住地が子供の居住地に影響を与える事がないため，固有ベクトルを比較的整理しやすくなり，1 世代の移動の効果だけで人口動態を考える事が出来る．

5 左右固有ベクトルと感度解析

この章ではでは，感度について解説する[*6]

安定人口モデルにおける人口動態は，前述の内的自然増加率がその規模の増減を決定する．数学的にはこの値は各出生・生存率の関数となっている．出生率と死亡率の変化が内的自然増加率にどの程度影響するかがわかれば，その時代の人口増減に関する構造的影響を定量的に評価できるであろう．しかし，日本人の最大寿命が 100 歳以上あることを考えれば，Leslie 行列も 5 × 5 以上になることは当然である．これは行列の固有値が満たす固有多項式が 5 次以上であることを意味する．要するに，ガロア理論などでお馴染みの 5 次以上の多項式に対し，一般的な解の公式は存在しないという問題に直面する．

そこで、これらの行列の成分が，支配的固有値に与える影響を数値的に示す感度解析（sensitivity analysis）を導入しよう [3]．ここで考える感度とは各出生率、死亡率に関する内的自然増加率の応答:$\frac{\partial \lambda_0}{\partial m_a}$ と $\frac{\partial \lambda_0}{\partial p_a}$ である[*7].

まず，線形代数における固有値と右固有ベクトルの基本的な関係の関係を考える:

$$\lambda_0 \mathbf{W}_0 = \mathbf{L}\mathbf{W}_0.$$

行列 $\mathbf{L}$ の成分が微小に変化し，$\mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ となったしよう．その微小変化分を

$$\Delta\mathbf{L} := \mathbf{L}' - \mathbf{L}$$

とおけば，変化後の行列は元の行列 $\mathbf{L}$ を用いて

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$$

と表すことができる．同様に $\mathbf{L}'$ の支配的固有値 λ_0' も差分形式

$$\lambda_0' = \lambda_0 + \Delta\lambda_0, \quad \Delta\lambda_0 := \lambda_0' - \lambda_0$$

で表すとする．これらの式を先ほどの固有ベクトルの関係式に代入する

$$\lambda_0 \mathbf{V}_0 + \Delta\lambda_0 \mathbf{W}_0 = \mathbf{L}\mathbf{W}_0 + \Delta\mathbf{L}\mathbf{W}_0.$$

両辺を整理し，左から左固有ベクトル $\mathbf{V}_0$ を作用させると下記を得る；

$$\Delta\lambda_0 \langle \mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0 \rangle = \mathbf{V}_0 \Delta\mathbf{L}\mathbf{W}_0$$

[*6] 大泉嶺　(2017)　『国際的・地域的視野から見た少子化・高齢化の新潮流に対応した人口分析・将来推計とその応用に関する研究』　平成 29 年度総括報告書に掲載した解説より

[*7] ∂（ラウンド記号）は偏微分を表す．

ここで，年齢 a の生存率のみに微小変化 Δp_a があったとする．このとき $\Delta\mathbf{L}$ は

$$\Delta\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \Delta p_a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これを元の式に代入すると左右固有ベクトルの成分

$$\mathbf{V}_0 = (v_0\,(a))^{\top}_{0\le a\le\alpha}\,, \quad \mathbf{W}_0 = (vw_0\,(a))_{0\le a\le\alpha}$$

を用いて[*8]

$$\Delta\lambda_0\,\langle\mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0\rangle = \Delta p_a v_0\,(a+1)\,w_0\,(a) \tag{20}$$

と表すことができる．整理すれば

$$\frac{\partial\lambda_0}{\partial p_a} = \frac{v_0\,(a+1)\,w_0\,(a)}{\langle\mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0\rangle}, \quad \frac{\Delta\lambda_0}{\Delta p_a} \to \frac{\partial\lambda_0}{\partial p_a} \tag{21}$$

が得られる．これが，内的自然増加率の生存率に関する感度である．同様に，出生率に関する感度も Δm_a を考えることで

$$\frac{\partial\lambda_0}{\partial m_a} = \frac{v_0\,(0)\,w_0\,(a)}{\langle\mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0\rangle} \tag{22}$$

となる．これらを一般化すると行列モデルの支配的固有値に関する感度を直積記号 $\otimes$ を用いて

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}_0 \otimes \mathbf{W}_0}{\langle\mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0\rangle} \tag{23}$$

全ての成分に対して書くことができる．この行列を感度行列（sensitivity matrix）と呼ぶ．この行列の行と列の成分が，それぞれ対応する安定人口モデルの行と列の成分の内的自然増加率に対する感度となっている．このように，安定人口モデルにおけるコーホートの出生・死亡の人口増減に関する寄与度は，行列モデルの固有ベクトルを用いて表す事が出来る．つまり左右固有ベクトルの組成が分かれば，本稿の目的であるライフコースと人口動態の関連を解析出来るのである．

この公式を用いると，

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial f_j\,(a)} = \frac{v_0\,(0)\,w_0\,(a,j)}{\langle V_0, W_0\rangle}$$
$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial k_{ij}\,(a)} = \frac{v_0\,(a+1,i)\,w_0\,(a,j)}{\langle V_0, W_0\rangle}$$

となる．このように，どの地域の出生率の感度も，繁殖価値の値の影響を受けず．安定年齢居住分布の密度の高さに依存する．この構造はレスリー行列の構造と同じである．移動率に関しては安定年齢居住分布の高い地域から翌年最も繁殖価が高くなる地域への移動が人口減少への寄与が大きいことが分かる．

[*8] 左固有ベクトルは横ベクトルである．

6　まとめ

本報告書では実用的観点から, タイトルにある『2015 年国勢調査〜とあるが，それを解析するための，これまで著者の理論的背景に重点を置いた．なぜなら，数値的解析は現在投稿準備中である事と，その背景が理論が出来つつあるからだ．なので，ここからはこうした理論的枠組みから少子高齢社会に対して考察していきたい．以下は『人口問題研究』76（1）号に掲載予定（令和 2 年 3 月 3 日時点）から一部引用する．

“出生・死亡・移動の年齢構造に敏感に応答する内的自然増加率に対して，感度解析は人口動態の瞬間的な増減要因を数値的に特定することに長けている．　一方で，このような瞬間的な要因が分かったところで，ベビーブーム世代や丙午世代など多様なコーホート抱える日本の人口構造では政策決定や少子化の背景そのものに結びつかないとの批判もあるかもしれない．　確かに非周期的にベビーブームや，災害による大量死が起こるような社会を対象とした感度解析は一時的な構造しか示せないだろう．　一般的に人口動態は複雑系であり単調に増加または減少し続ける事はあり得ないと考えられている．　だが，45 年以上人口置換水準以下の出生行動が変化していない日本にとっては，その程度の差はあれ，現代は安定人口モデルの構造と大きく変わりの無い動態と考えられる．　そのため感度解析による現状分析は十分役に立つと考えられる．　本研究では，移動を考慮したレスリー行列を構築し，左右固有ベクトルを導出することで移動率や地域毎の出生率における人口減少への影響を定量評価する感度の公式を導いた．　そのとき，出生数の構成比一定という仮定を用いた. 現実の社会では出生行動と移動行動は常に同時に起こっており，また地域間出生率は出生数の構成比を一定として分解できないであろう．　それは，親が居住している地域が子どもの出生地に少なからず影響を与えるという自然な仮定に基づく．　この場合親の居住地も当然その親（祖父母）の居住地の影響を受ける構造になり，出生数の構成比は $\phi(i)$ ではなく親の出生地が子の出生地を決める世代間の方程式を考慮しなければならない．　そうなると，出生率や移動率の感度は地域毎に異なる 0 歳繁殖価と出生数の構成比に依存したより複雑なものになる．　現在それについては解析中である．　この仮定の違いが結論に与える影響は地域別に見た感度全体の大小関係だと考えられる．　年齢別に見れば，繁殖価に依存した移動率の感度は若い世代の移動の重要性を示し，安定年齢居住分布（$w(a,i)$）に依存した年齢別出生率の感度はその構造のみに依存することは変わらない.”

参考文献

[1] Matrix population models,Caswell, H.,Wiley Online Library,2006

[2] , Inaba, Hisashi,Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology,(2017),Springer.

[3] H. Caswell, A general formula for the sensitivity of population growth rate to changes in life history parameters, Theoretical population biology 14 (2) (1978) 215–230.

[4] Oizumi, R. and Takada, T. (2013). Optimal life schedule with stochastic growth in age-size structured models: theory and an application. *Journal of Theoretical Biology*, 323:76–89.

[5] Oizumi, R. (2014). Unification theory of optimal life histories and linear demographic models in internal stochasticity. *PLOS ONE*, 9(6):e98746.

[6] Oizumi, R., Kuniya, T., and Enatsu, Y. (2016). Reconsideration of r/k selection theory using stochastic control theory and nonlinear structured population models. *PloS one*, 11(6):e0157715.

[7] Inaba, H. (1988). A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process. *Math. Popul. Studies*, 1(1):49–77.

[8] Yong, J. and Zhou, X. (1999). *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*, volume 43. Springer Verlag.

[9] Tuljapurkar, S. Population dynamics in variable environments. iii. evolutionarydynamics of r-selection, (1982). Theoretical Population Biology, 21(1):141–165.