

# 安定人口模型の固有関数解析

大泉嶺

## 1 はじめに

安定人口模型は、将来人口推計を考える上でも、人口動態を分析する上でも、最も基本となる数理モデルである。Leslie 行列モデルが人口学における基礎的なモデルとして知られているが、年齢と時刻を連続化した MacKendrick 方程式も数理人口学の中では基本とされている。これらのモデルの共通点は線形モデルである。どちらも死亡と出生の過程みからなる封鎖人口モデルであり、各年齢におけるそれらは生存率あるいは死亡率として、出生率のパラメータあるいは関数として固定されている。出生や死亡は時代によって変化し続けており、毎年異なる事からこれらのモデルが人口動態を予測するに十分なモデルとは言えない。しかし、少子高齢化などが固定され、毎年出生率や死亡率の変化が少ないとすれば、これらのモデルを解析する事は重要な意味を持つ。それらは固有関数を考える事でより一般化が可能になる。本報告書は昨年と同研究プロジェクトの報告書の解析に関して、より理論的補足を付け加えたものである。

## 2 Leslie 行列と MacKendrick 方程式

安定人口モデル Leslie 行列について、ここでは紹介する。時刻  $t$  における年齢  $a$  歳の女性コーホートの人口を  $P_t(a)$  とする。このモデルを構成する基本的な過程はこのコーホートが持つ出生率  $m_a \geq 0$  を用いて表される再生産過程：

$$P_t(a) = \sum_{a=0}^{\omega} m_a P_t(a) \quad (1)$$

と翌年までの生存率  $0 \leq p_a \leq 1$  とする生存過程：

$$P_{t+1}(a+1) = p_a P_t(a) \quad (2)$$

の二つで表すことにする。このとき、 $\omega$  は最大寿命である。このモデルは行列を用いて次のように書くことができる：

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{L} \mathbf{P}_t \quad \mathbf{P}_t := (P_t(a))_{0 \leq a \leq \omega}$$
$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_a & \cdots & m_\omega \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{\omega-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

一方、年齢と時刻を連続化した MacKendrick 方程式は死亡率  $\mu(a) \geq 0$  と出生率  $F(a) \geq 0$  が

与えられたとき, 人口密度関数  $P_t(a)$  は, 再生産過程 :

$$P_t(0) = \int_0^{\omega} da F(a) P_t(a), \quad (4)$$

と死亡過程 :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right] P_t(a) = -\mu(a) P_t(a) \quad P_0(a) = \varphi(a), \quad (5)$$

を満たす. これらのモデルは多くの共通点を持つ. 例えば Leslie 行列  $\mathbf{L}$  が対角化可能である場合 (通常この場合の方が多い) 一般的なコーホート動態は以下のようになることが知られている :

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{L}^t \mathbf{P}_0 = \sum_{k=0}^{\omega-1} \lambda_k^t \frac{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P}_0 \rangle}{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle} \mathbf{V}_k \quad |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|.$$

$\lambda_k$  は行列  $\mathbf{L}$  の  $k$  番目の固有値であり,  $\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k$  はその固有値に対応する左右固有ベクトル<sup>\*1</sup>を表し,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  はそれらの内積を意味する. 特に, 最大固有値  $\lambda_0$  と対応する左右固有ベクトルはそれぞれ, 内的自然増加率 (intrinsic rate of natural increase), 繁殖価 (reproductive value), 安定年齢分布 (stable age distribution) と呼ばれ, 人口学的にも生物学的にも特別な意味を持つ [1]. 同様に MacKendrick 方程式の場合も以下のような解の表現がある [2]

$$P_t(a) = \begin{cases} \varphi(a-t) \frac{l_a}{l_{a-t}} & a-t \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{r_k t\} \frac{\langle \phi_k^*, \varphi \rangle}{\langle \phi_k^*, \varphi_k \rangle} \varphi_k(a) & a-t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

このとき  $\langle \phi, \cdot \rangle$  は汎関数と呼ばれ, 以下で定義される:

$$\langle \phi, \varphi \rangle := \int_0^{\omega} da \phi(a) \varphi(a).$$

ここで現れる  $\phi_k^*(a), \varphi_k(a)$  は固有関数と呼ばれ, 本質的には Leslie 行列の左右固有ベクトルと同じ構造を持っている. 昨年と同研究プロジェクトの報告書にも記載したが, 左右固有ベクトルは少子化に及ぼすコーホートの出生・死亡の影響を評価することが出来る. それは感度解析 (sensitivity analysis) とよばれ, 以下の感度行列の公式によって表される [3]:

$$\mathbf{S}_0 = \frac{\mathbf{V}_0 \otimes \mathbf{U}_0}{\langle \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0 \rangle} \quad \otimes: \text{Kronecker 積}. \quad (7)$$

この行列の各成分は Leslie 行列の一般的な成分を  $L_{ij}$  と表せば, 次の場合に対応する :

$$\mathbf{S}_0 = \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{ij}} \right)_{1 \leq ij \leq \omega}.$$

ここで,  $\frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{1a}} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial m_a}, \frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{a+1a}} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial p_a}$  がとなる事に注意. これは最大固有値  $\lambda_0$  に対する出生率  $m_a$  や死亡率  $p_a$  の変化に対する感度 (応答) を意味する. これは現代の少子化に対して, 影響力のあるコーホートを知る手がかりとなる.

なぜなら, レスリー行列のシステムが十分時間が経過した時に, 次のような漸近挙動を描く事による

$$\mathbf{P}_t \approx \lambda_0^t \frac{\langle \mathbf{U}_0, \mathbf{P}_0 \rangle}{\langle \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0 \rangle} \mathbf{V}_0 \quad t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

<sup>\*1</sup> 左固有ベクトルは  $\mathbf{U}_k \mathbf{L} = \lambda_k \mathbf{U}_k$  を満たす横ベクトル, 右固有ベクトルは  $\mathbf{L} \mathbf{V}_k = \lambda_k \mathbf{V}_k$  を満たす縦ベクトルをそれぞれ意味する.

つまり、最大固有値に対する感度が高い出生率と死亡率を持つコーホートが、その時代の人口動態を支配すると考えられる。例を挙げれば、少子化が進んでいるとされる 2015 年における感度は図 1 のようになる。

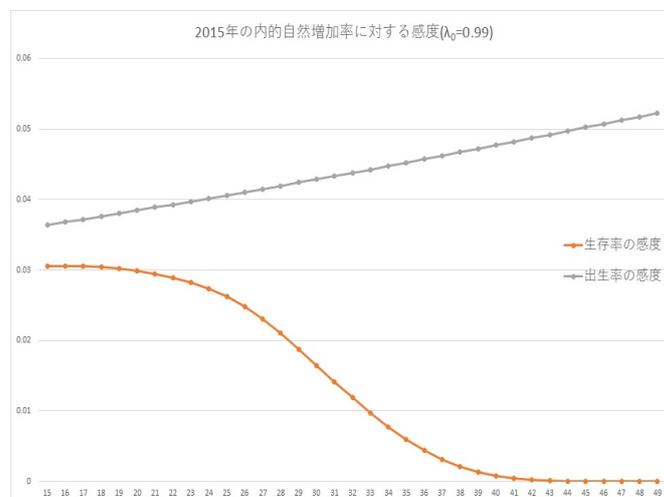


図 1

生存率の改善の感度と出生率の感度との間には差が開き、出生率の変化の方が重要になっている。この結果で注目すべきは、年齢が上がる毎に出生率の感度が上がっている点である。この結果については、昨年の報告書を参照されたし。

### 3 左右固有ベクトル理論的役割

数学的には Leslie 行列を（各コーホートを成分とする）有限次元ベクトル空間, MacKendrick 方程式の解が張る空間を無限次元ベクトル空間（ヒルベルト空間、あるいはバナッハ空間とも呼ぶ）と分類される。どちらの場合も左右固有ベクトルは直交性

$$\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_{k'} \rangle = \langle \phi_k^*, \varphi_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad \delta_{kk'} : \text{Kronecker のデルタ}$$

を持つ\*2。この性質はいわゆる半群を生成することができる。半群とは有り体に言うと以下の性質を持つ作用素  $T$  を指す：

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad t, s > 0.$$

具体的にはこれら Leslie 行列の固有ベクトルの一次独立性を用いて初期人口齢分布  $\mathbf{P}_0$  を

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P}_0 \rangle}{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle} \mathbf{V}_k, \quad (9)$$

と展開する事から出発する。この証明は

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{k=0}^{\omega-1} C_k \mathbf{V}_k$$

\*2 左右固有ベクトルはそれぞれ任意定数倍が存在するが、この場合これらの積を  $\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_{k'} \rangle^{-1}$  および  $\langle \phi_k^*, \varphi_{k'} \rangle^{-1}$  とした。

と置き、両辺を  $\mathbf{U}_k$  との内積を取ることで左右固有ベクトルの直交性から

$$\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P}_0 \rangle = C_k \langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle$$

となって、両辺を整理することで示す事が出来る。ここで、Leslie 行列のべき  $\mathbf{L}^t, \mathbf{L}^s$  を式 (9) に作用すると固有ベクトルの性質から

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^t (\mathbf{L}^s \mathbf{P}_0) &= \mathbf{L}^t \left( \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P}_0 \rangle}{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle} \lambda_k^s \mathbf{V}_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{P}_0 \rangle}{\langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle} \lambda_k^{t+s} \mathbf{V}_k \\ &= \mathbf{L}^{t+s} \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

と半群の性質を満たす事が分かる。これは、固有ベクトルや線形代数を知っていれば当然で大げさに聞こえるかもしれないが、こうした見方をしておくと、次に説明する重要な公式を理解しやすい。

## 4 Tuljapurkar 近似と固有ベクトルの環境・社会変動への応用

数理生態学では、この行列モデルを用いた環境変動への個体群動態の応答を解析する手法が35年以上前から使われている。現実の社会においては安定人口モデルのように、どの世代も一定な出生率と死亡率である事はない。我が国のように出生率の低下や死亡率の改善傾向などがある事だけでなく、その時代・世代特有の不確実性からくる変動も存在する。ここでは、前出の Leslie 行列に微小のノイズを含んだモデルを紹介する。まず、年齢構造化モデルが平均行列  $\mathbf{M}$  と各パラメータの平均が0のノイズ行列  $\mathbf{W}_t$  の和で掛けるモデルを考える。

$$\mathbf{P}_{t+1}^\gamma = \mathbf{L}_t \mathbf{P}_t^\gamma = \left[ \underbrace{\mathbf{L}}_{\text{平均}} + \gamma \underbrace{\mathbf{W}_t}_{\text{ノイズ}} \right] \mathbf{P}_t^\gamma \quad 0 \leq \gamma. \quad (10)$$

ノイズ項は時刻に依存し、ランダムな値を取るため短期的な動態を解析するだけではその本質を理解することは難しい。そのため、このモデルの長期的振る舞いを統計的に扱う事が重要となる。Tuljapurkar はこの長期的な振る舞いを扱うために女性の総人口を

$$\|\mathbf{P}_t^\gamma\| := \sum_{a=0}^{\omega-1} P_t^\gamma(a),$$

としたときに、長時間対数成長率 (Longterm Logarithmic Growth Rate) を以下の様に定義し、

$$r_\gamma := \lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \ln \{\|\mathbf{P}_t^\gamma\|\} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left\{ \left\| \prod_{n=0}^t [\mathbf{L} + \gamma \mathbf{W}_n] \mathbf{P}_0 \right\| \right\} \quad (11)$$

その振る舞いを調べた [4]。  $\gamma = 0$  の時、この値は  $\ln \{\lambda_0\}$  となることは式 (8) から分かるであろう。つまり、ノイズが存在する環境ではこの平均行列の最大固有値からどのくらいずれるかである。このシステムは長時間平均が  $\mathbf{W}_t$  の統計的性質を持って表せるという、所謂エルゴート性が知られているので、平均の記号  $\mathbb{E}$  を用いて

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \ln \{\|\mathbf{P}_t^\gamma\|\} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} [\ln \{\|\mathbf{P}_t^\gamma\|\}].$$

という関係が成り立つ。ここで新しい作用素  ${}^n\mathbf{T}^m$  を次のように定義する

$${}^n\mathbf{T}^m := \begin{cases} \mathbf{L}^{n-m} & n > m \\ \mathbf{L}^n & n = m \\ \mathbf{I} & n < m \end{cases} \quad (12)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^t [\mathbf{L} + \gamma \mathbf{W}_n] &= {}^t\mathbf{T}^1 \\ &+ \gamma \sum_{n=1}^t {}^t\mathbf{T}^{n+1} \mathbf{W}_n {}^{n-1}\mathbf{T}^1 \\ &+ \gamma^2 \sum_{n=1}^{t-1} \sum_{m=1}^{t-n} {}^t\mathbf{T}^{t-n+2} \mathbf{W}_{t-n+1} {}^{t-n}\mathbf{T}^{m+1} \mathbf{W}_m {}^{m-1}\mathbf{T}^1 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

と  $\gamma$  のべきに展開出来る。この展開を式 (11) に代入しこれを  $\gamma$  に関して 2 次の項まで展開する\*3と

$$r_\gamma \approx r_0 - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\sigma_{\text{ext}}^2}{\lambda_0^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\theta}{\lambda_0^2} \quad (13)$$

$$r_0 = \ln \{ \lambda_0 \} \quad (14)$$

$$\sigma_{\text{ext}}^2 := \sum_{i,j,i',j'} \frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{ij}} \frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{i'j'}} \text{Cov} [w_{t,ij}, w_{t,i'j'}] \Big|_{t=0} \quad (15)$$

$$\theta := \sum_k \frac{(\mathbf{U}_0 \otimes \mathbf{U}_k)}{\langle \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0 \rangle \langle \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \rangle} \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E} [\mathbf{W}_t \otimes \mathbf{W}_0] (\mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_0) \quad (16)$$

という公式が得られる\*4[4]。第 2 項はノイズ成分の共分散が前出の感度の積を伴って出現する。第 3 項はノイズの時間相関関係を表す。環境ノイズが独立同分布のような時間相関  $\theta = 0$  や違うコーホート同士に相関が無い場合はより単純に

$$r_\gamma \approx r_0 - \frac{\gamma^2}{2\lambda_0^2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial L_{ij}} \right)^2 \text{Var} [w_{t,ij}] \Big|_{t=0},$$

と表される。この結果から感度が高いパラメータの分散が多きい程、長期的な人口減を引き起こすと考えられる。図 1 をみると 2015 年の人口増加率  $\lambda_0$  に最も感度が高いのはより高い年齢の出生率である。よって、人口減少社会にある我が国では 20 代よりも 30 代の出生行動の変動が大きいとより、人口減が加速する可能性が指摘できる。

## 5 まとめ

本報告書では実用的観点から、主に Leslie 行列の固有ベクトルの応用を紹介した。安定人口モデルはある瞬間の人口動態のスナップショットとみることが出来る。45 年以上、人口置換水準を下回る日本にとってその人口動態は安定人口モデルのそれに近い。 $\lambda_0$  が 1 を下回る事で人口は減少

\*3 細かい演算は「左右固有ベクトル理論的役割」の半群としての固有ベクトルの展開を用いる。

\*4 Tuljapurker は証明を簡単にするために  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{V}_0$  を用いている。

し (図 1 参照), その結果人口ピラミッドは逆三角形に近づく. それは, 高齢者の数が増える事を意味することは言うまでもないであろう. 感度解析が示す結果はそうした高齢化の中で出産可能な人口が高齢側に偏る為に起こる. よって, 若い年齢層よりも高年齢層の出生率の増加が人口減少を遅らすことに効果的あるという結論になるのである.

2015 年の国勢調査は我が国の現在を反映しているが, その年の生命表, 出生率は一定では無い. Tuljapurkar 近似は年々変動する出生率, 死亡率が人口動態にどのような影響を及ぼすのか近似的に示すことが出来る. 我が国では, 2005 年に期間合計特殊出生率が底を打ち反転した理由を晩婚化が定着した為に起こるテンポ効果である, というのが一般的な人口学者の見解である. しかし, Tuljapurkar 近似が示す結果はこうした結婚・出産行動事態が不安定で変動すると, 見かけよりも速く人口が減少する事を意味する. 数理人口学的な観点で少子化問題を取り扱おうとすれば, 短期的には 20 代よりも 30 代の少子化対策, そして世代を超えて安定的な出産が行える社会作りが必要という結果になるだろう.

こうした観点から固有ベクトルの解析というのはとても実用的である. しかし, Leslie 行列を用いた理論研究には限界がある. 本来は, 人口は出生・死亡だけでなく, 移動やコーホート内の構造も人口動態に影響してくる. ここで, いうコーホート内の構造とは地域格差や収入格差など, 時代や状況によって大きく変わる変数である. 例えば, “貯金がいくらまで貯まったら子どもを作ろう” といった考えを持つ集団がいたとしよう. 当然, それが同じ金額だったとしても人によって収入や浪費の仕方が違ったりするので到達時期にも差が出る. こうしたより深い構造から人口動態を研究しようとする, 実は冒頭に触れた微分方程式によるモデルの方が便利である事の方が多い. 年齢に応じた人々の収入や支出のモデルを例えば微分方程式で与え, そこから MacKendrick 方程式のような構造化人口モデル\*5を導く, そうした場合も

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right] P_t(a, x) = - \left[ \underbrace{A(a, x)}_{\text{年齢以外の構造 } x \text{ の推移}} + \mu(a, x) \right] P_t(a, x) \quad P_0(a) = \varphi(a, x),$$

式 (5) と同じようなモデルで表せるのであるが基本的には式 (6) と同じ構造の解が出る. その場合も固有関数が活躍するのだが紙面の都合上割愛させていただく.

## 参考文献

- [1] Matrix population models, Caswell, H., Wiley Online Library, 2006
- [2] , Inaba, Hisashi, Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology, (2017), Springer.
- [3] H. Caswell, A general formula for the sensitivity of population growth rate to changes in life history parameters, Theoretical population biology 14 (2) (1978) 215–230.
- [4] Tuljapurkar, S. Population dynamics in variable environments. iii. evolutionary dynamics of r-selection, (1982). Theoretical Population Biology, 21(1):141–165.

\*5 この場合、年齢と貯金額にラベルされた人口.