

れるとする。以降では、この最低供給額を負債と呼ぶ。この負債がある場合の均衡への効果としては、負債は、期末において定まった額の無リスク資産に当たる部分と債券価格に連動する部分で構成されているとする。これは、期末において長期債務を確保することが要求されているとの設定であり、連動性を 1 としないのは、負債と債券の平均満期及び残高の違いを表すためである。負債は、その期待値が L 、債券との連動の程度が θ であるとし、

$$\tilde{L} = L + \theta(\tilde{X}_B - v_B)$$

とモデル化する。均衡における期末の消費額 \tilde{c}_1 の期待値は $v_S + v_B - L$ 、分散は

$$\phi_S^2 + (1-\theta)^2 \phi_B^2 \text{ となる。}$$

この時、これまでと同様の分析によって、均衡は以下を満たす (r, K, B) である。

$$\log(1+r) = \log(1+\rho)$$

$$+ \alpha \left\{ (1+\bar{R})K + v_B - L - \frac{1}{2} \alpha (K^2 \sigma_R^2 + (1-\theta)^2 \phi_B^2) + K + B - w_0 \right\} \quad (17)$$

$$r = \bar{R} - \alpha K \sigma_R^2 \quad (18)$$

$$B = \frac{v_B - \alpha(1-\theta)\phi_B^2}{1+r} \quad (19)$$

負債の増加は、期初財産額 w_0 と同じ働きで、金利を小さくすることがわかる。消費水準の比によって金利がきまるから、負債が将来の消費を減らすことと今の財産が増えることは同じ影響となるためである。

これは、国債の発行増が金利の上昇につながったことと対照的である。この投資家が年金であれば、負債の増加は年金加入者にとっては将来への所得の移転であり、国債の発行と同じ効果である。それにもかかわらず、金利に関して逆の結果になっている。これは年金給付に関して、年金と個人では逆のペイオフだからである。この場合、個人が直接投資の意思決定を行えば年金への資産抛出は現在の消費を減らすので高い金利を要求するが、機関投資家としての年金が判断をするために低金利が維持されているといえるかもしれない。

また、年金の負債であれば、賃金と共に増加する。先に示したとおり、リスク回避度が大きい時には特に、企業の収益性が上昇しても賃金が同時に上昇すると金利や債券の期待収益率が大きくなるということがわかった。すると、年金負債の賃金との同時の成長は金利を押し下げる効果を強め、この時、賃金上昇リスクのヘッジはさらに困難になってしまう。ただしここでも、個人が意思決定を行えば、年金への掛金抛出と将来の給付が逆の作用を

生むから、賃金上昇が金利を押し下げる効果は緩和されるはずである。

連動性 θ の効果は、やや複雑である。 θ が増えると負債のリスクが債券によってヘッジできるようになるから期末の消費のリスクが減る。また、債券への需要が増えて価格が上昇し、期初の消費を減らす。これらは金利を上昇させる効果があるが、金利や株価への効果も考慮しなければいけない。そこで、(17)-(19)を全微分して整理すると、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha\sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha(1-\theta)\phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = \left\{ \alpha(1-\theta)\phi_B^2 + \frac{\alpha\phi_B^2}{1+r} \right\} d\theta$$

が得られる。右辺 $\{ \}$ 内の一項目が将来の消費のリスクを減らす効果、二項目が現在の消費を減らす効果である。その他の効果は、 dr の係数に表れているが、これらは全て正なので、連動性の上昇は金利を大きくすることがわかる。

この時の債券価格には、リスクヘッジ資産としての需要が増える、金利上昇と逆の効果がある。よって、債券の期待収益率は金利ほどには上がらず、イールドカーブはフラットニングすることになる。

続いて、積立型の年金と見た場合の負債額に対する資産の積立率を見てみよう。まず、負債の時価 P を考える。負債は市場で取引されていないので株式などと同じ状態価格で評価できる。この均衡の確率割引要素を $\tilde{\Lambda}$ とすると、

$$P = E[\tilde{\Lambda}\tilde{L}] = \frac{L - \theta v_B}{1+r} + \theta \frac{v_B - \alpha(1-\theta)\phi_B^2}{1+r} = \frac{L - \alpha\theta(1-\theta)\phi_B^2}{1+r} \quad (20)$$

となる。

r の変化を無視すれば、負債時価は債券との連動性 θ に対して凸になっている。債券との連動性の上昇は、リスクが大きくなって評価をさげる効果と、ヘッジ需要による債券価格上昇とともに評価が上がる効果の両者がある。 θ が 0 の付近では前者が勝り、 $\theta = 1$ に近づくと後者が優越するから、凸になるのである。

この時、積立率は、

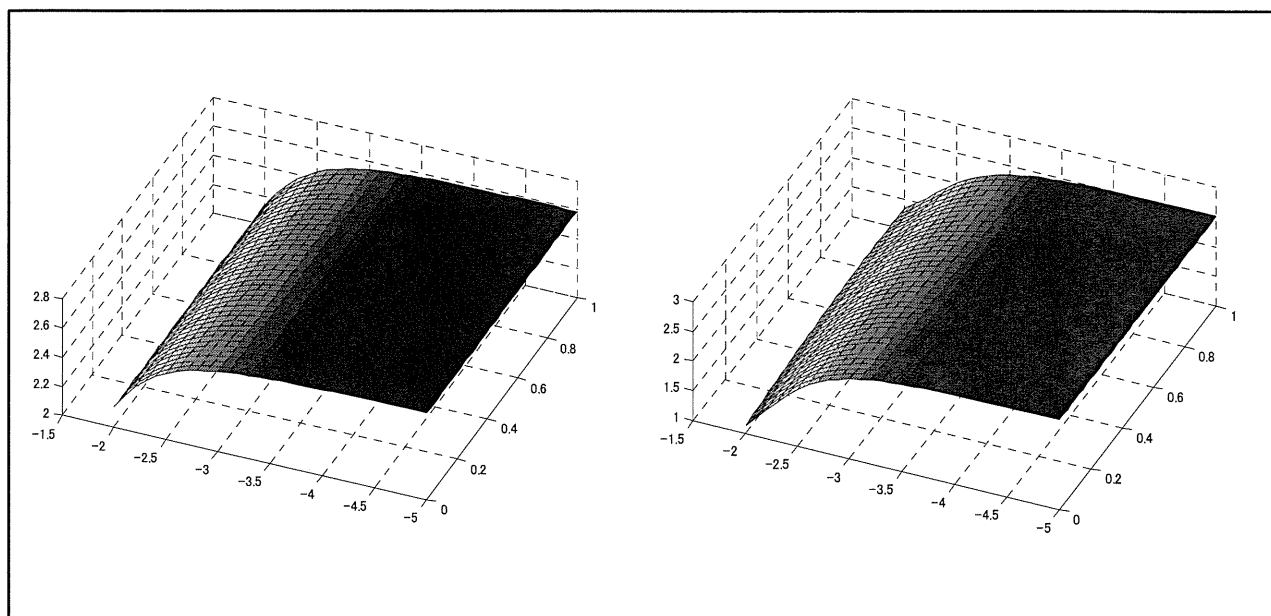
$$\frac{S+B}{P} = \frac{(1+\bar{R})K + v_B - \alpha\{K^2\sigma_R^2 + (1-\theta)^2\phi_B^2\}}{L - \alpha\theta(1-\theta)\phi_B^2} \quad (21)$$

となる。

(21)の表現では、積立率に金利は現れていない。金利は資産の負債の両方に等しい効果を与えるので表面的にはキャンセルされるからである。ただし、 K が θ や α によって変化するので、積立率も変化する。その変化は複雑なので、ここでも数値例で確認しよう。

図表 4 がその結果であるが、リスク回避度が大きくなると、金利は低下し債券価格も上がるものの、株価が低下する効果が大きく積立率は低下する。連動性に関しては明確な傾向がみえないが、変化そのものは小さい。これは、リスクの大きな設定でも同じである。

近年では、金利の低下に伴って積立率が悪化し年金財政が逼迫することが、国内外、公的年金、企業年金を問わず生じている。金利が低下すれば投資が増えることが期待されるが、現実には投資と資産の増大につながっていないためであろう。また、近年の時価会計への流れは、これまでの年金財政の管理方法に比べて負債を意識させることになっている⁷。



$\alpha = 0.00001 - 0.01, \theta = 0 - 1$ で変化させた場合の積立率 $((S+B)/P)$ 。その他のパラメータは、 $w_0 = 2000, L = 500, v_B = 500, \bar{R} = 0.2, \rho = 0.1$ であり、左は $\phi_B^2 = 100, \sigma_R^2 = 0.04$ 、右は $\phi_B^2 = 10000, \sigma_R^2 = 0.16$ とした。 α は常用対数で表示してある。

図表 4 : 積立率の変化

7. おわりに

われわれは簡単な不確実 2 期間モデルを構築し、その下で賃金の上昇が安全利率、国債利回り、および株式期待収益率に与える効果を比較静学的手法に則って分析した。その結果、次のことが明らかになった。賃金が増える際に、収益性も上昇していれば株式期待収益率は連動して上がるが、金利は、所得を均す効果を通じて、株式期待収益率ほどにはあがらない。また、債券の存在も金利の変化を押さえる効果がある。国債は利率を超える収益率は望めるのだが、それはリスク・プレミアムで賃金上昇率とは関係ないので、賃金上昇率変動のヘッジ機能は株式ほどには期待できない。

⁷ そのため、例えば、「投資に相応しい長期債券の不足に悩む年金」(Pensions & Investments, 2011.7.11)といった記事が近年の業界紙に見つかる。

補論：

命題 1 の証明

(10)~(12)を内生変数および v_B に関して全微分すると、

$$\frac{1}{1+r} dr = \alpha \left\{ (1 + \bar{R} - \alpha K \sigma_R^2) dK + \frac{\partial(v_B - \frac{1}{2} \alpha \phi_B^2)}{\partial v_B} dv_B + dK + dB \right\}$$

$$dr = -\alpha \sigma_R^2 dK$$

$$dB = \frac{\partial(v_B - \alpha \phi_B^2)}{(1+r) \partial v_B} dv_B - \frac{v_B - \alpha \phi_B^2}{(1+r)^2} dr$$

である。dB, dK を消去して整理すると、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha \sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha \phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = \left\{ \frac{3+r}{2(1+r)} \frac{\partial(v_B - \alpha \phi_B^2)}{\partial v_B} + \frac{1}{2} \right\} dv_B$$

となる。証券の時価などに課した仮定より左辺のカッコ内は正であり、右辺カッコ内も v_B の増加によって将来の債券ペイオフの評価が増えることを仮定したので正である。よって、

$\frac{dr}{dv_B} > 0$ であり、債券発行によって金利が増えることがわかる。金利の上昇によって株価が低下することは、(11)よりわかる。

命題 2 の証明

1. ROA の水準 \bar{R} が高くなると金利は高まる

手順は命題 1 の証明と同じである。(10)~(12)を内生変数および \bar{R} に関して全微分し、整理すると、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha \sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha \phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = \left\{ K + \frac{2+r}{\alpha \sigma_R^2} \right\} d\bar{R}$$

となつて、仮定より $\frac{dr}{d\bar{R}} > 0$ である。

2. ROA のリスク σ_R^2 が高くなると金利は低くなる

同様の手続きによって、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha\sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha\phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = -\frac{(2+r)K}{\sigma_R^2} d\sigma_R^2$$

が得られ、 $\frac{dr}{d\sigma_R^2} < 0$ となる。

3. 期初の所得 w_0 が増えると、金利は低くなり、株価と債券価格は高くなる

同様に、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha\sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha\phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = -dw_0$$

となって、 $\frac{dr}{dw_0} < 0$ がわかる。その時、株価と債券価格が大きくなることは(11)(12)よりわかる。

4. 時間選好率が低下する（ ρ が小さくなる）と、貯蓄は増加して金利は低下する

同様に、

$$\left\{ \frac{1}{\alpha(1+r)} + \frac{2+r}{\alpha\sigma_R^2} + \frac{v_B - \alpha\phi_B^2}{(1+r)^2} \right\} dr = \frac{1}{\alpha(1+\rho)} d\rho$$

となって、 $\frac{dr}{d\rho} > 0$ である。金利が低下すれば、貯蓄（ $K+B$ ）は増加する。

参考文献:

- Baker, D. J., B. DeLong, and P. R. Krugman (2005), "Asset Returns and Economic Growth," *Brookings Papers on Economic Activity*, No.1, 289-315.
- Brock, W (1982) "Asset Pricing in a Production Economy" in: *The Economics of Information and Uncertainty*, ed J.J.McCall, University of Chicago Press.
- Brock, W and L. Mirman (1972), "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discount Case", *Journal of Economic Theory* 4, 479-513.
- Campbell, J. and L.M.Viceira (2002), *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*. Oxford University Press. (木島正明監訳(2005), 野村証券金融経済研究所訳「戦略的アセットアロケーション」東洋経済新報社.)
- Cochrane, J. (2005), "Financial Markets and the Real Economy," *Foundations and Trends in Finance*.
- Demange, G., and G. Laroque (2006) *Finance and the Economics of Uncertainty*. Blackwell.
- Diamond, P. A. (1965), "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *The American Economic Review*, 55 (5), 11226-1150.
- McCandless, G (2008), *The ABCs of RBCs, Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press.
- Modigliani, F. and A. Muralidhar (2004), *Rethinking Pension Reform*, Cambridge University Press.
- Semmler, W. (2006). *Asset Prices, Booms and Recessions: Financial Economics from a Dynamic Perspective*. Springer Verlag GMBH.
- Stulz, R. M.(2003), *Risk Management and Derivatives*. Thomson Learning.
- Veronese, P. (2010), *Fixed Income Securities*. John Wiley & Sons, Inc.
- 大森孝造, 米澤康博(2012), 「不確実経済モデルによる金利, リスク・プレミアムの決まり方」. Mimeo.
- 大森孝造, 米澤康博(2011), 「賃金上昇率と公的年金の積立金管理」, 厚生労働科学研究費・政策科学総合研究事業 「公的年金の直面する要検討課題に対する理論・実証研究」, 7-27.

デフォルト確率推定のハイブリッドアプローチ[†]

森平 爽一郎

はじめに

企業年金におけるアクティブ運用の 1 つに信用リスクをとるアプローチがある。社債投資は明らかにそうした戦略を 1 つであるし、株式のアクティブ運用に関してもそうした側面がある。個別銘柄の選択ばかりでなくて、マクロ経済の変動がもたらす信用リスク循環を考慮して適切な資産配分を行うことも可能であろう。

社債のアクティブ運用は、信用スプレッドと社債投資の期待リターンとの間の適切な均衡からの乖離にかけた運用を行うことにほかならない。そのためには、市場流動性が十分でない日本の社債市場に置いて、信用リスクプレミアムと流動性プレミアムの分離を行う必要があるが、問題は信用リスクプレミアムを推定するために適切な信用リスク尺度が何であり、それをどのように推定すべき必要があるかを考えなければならない。

信用リスクを考慮した、株式の個別銘柄選択にあたっては、企業年金運用の場合、その対象は上場企業を対象とするのが通常であることから、中小企業向けの銀行融資などと異なり、同じ信用リスクを考慮した投資であるにもかかわらず、担保や融資保証によって、信用リスクの一部を回避することができない。投資先企業の破綻にともなうデフォルト時損害率は極めて大きなものにならざるをえない。2008 年のリーマン・ショック時の、日本の上場企業のデフォルトによる運用成果の急激な低下はそうしたリスクが顕在化した一例である。

本稿では、こうした観点から、企業年金投資における信用リスクを「デフォルト確率の期間構造」を、個々の上場企業の財務書諸表データと、日々連続してえることができる株価データを統合しておこなう。われわれは、こうしたアプローチをデフォルト確率推定のハイブリッドアプローチと呼ぶことにする。

企業のデフォルト確率 PD 推定の代表的な手法には、3 つのものがある。

第 1 のものは、企業の財務諸表と過去のデフォルト・非デフォルトの実績データに対し、定性的従属変数回帰モデル、例えば、ロジット回帰モデルを適用する「統計的アプローチ」である。

第 2 のものは、企業が債務超過に陥る確率を、株価、株式投資収益率のボラティリティならびに負債データから推定する「オプションアプローチ」、あるいは「構造型アプローチ」

[†] 本研究は岡崎貫治氏との「デフォルト確率の期間構造推定」に関する共同研究の 1 つである。

とよばれているものである。このとき、企業の資産の将来期待値が将来の負債額からどのくらい離れているかをしめす「デフォルト距離」が重要な信用リスク量となる。債務超過確率としてのデフォルト確率は、資産価値が対数正規分布すると仮定したときに標準正規分布関数による単調変換としてもとめることができる。

第3のものは、企業のデフォルトを引き起こす要因に言及すること無く、企業のデフォルト・非デフォルトの事実そのもの、あるいは格付けデータなどから、デフォルト確率を推定しようとする「誘導型アプローチ」である。

統計アプローチは、過去のデフォルト・非デフォルト実績データとそれらの企業の財務諸表を中心とする属性データのみによりデフォルト確率を推定できる。従って、非上場企業あるいは小規模企業であってもそれらのデフォルト確率を推定できるという利点がある。

しかしながら、財務諸表は、上場企業であっても年に4回、非上場企業であれば、通常年に1回しか入手出来ない。これに対し、構造型あるいは誘導型アプローチは、株価や債券価格データを用いることにより、資産価格の変化に応じた債務超過確率の推定が可能である。黒子・神山(2000)は、バブル崩壊後の上場企業の分析から、オプションアプローチは倒産企業を倒産と判定する事例が多いのに対し、非倒産非企業を倒産と判定する第1種の誤差も高い傾向があることを明らかにした。これに対し統計的アプローチは、倒産企業を非倒産と判定する危険が低いことを明らかにしている。

一方、森平(2009a)では、統計モデルは構造モデルとみなすことができることを明らかにした。従って、統計モデルと伝統的な構造モデルを統合する場合の理論的な背景を導くことができることを示した。この結果、黒子・神山(2000)によって示された統計モデルと構造モデルの両方の利点を生かしたモデル作成が可能になる。

誘導型アプローチでは、デフォルト強度(Default Intensity)の指数変換を行うことで、デフォルト確率の期間構造を推定できる。デフォルト強度の時間あるいは企業の属性を表すさまざまなリスクファクターの関数であるような定式化を行うこともできる。このとき、リスクファクターの一つをデフォルト距離と考えれば、構造（オプション）アプローチと誘導型アプローチを統合できる。通常の誘導型モデルは、企業のデフォルト「回数」をポアソン確率過程に従うと過程して、企業の生存確率の期間構造をポアソン分布のパラメータ、すなわちデフォルト強度によって説明しようとする。この時、可変時間かつ確率的に変動するデフォルト強度を、デフォルト距離を説明要因とする形で、構造アプローチと誘導アプローチの統合を図ることが可能である。われわれは、第1の「統計的アプローチ」と第2の「オプションアプローチ」を統合したデフォルト確率推定のハイブリッドアプローチの考え方と実際の推定結果を示すことにする。また、これは、第3の「誘導型アプローチ」において、デフォルト強度を単に資産価格からインプライドに推定するのではなく、時間とともに変動し、かつ離散的なデフォルト強度を、個別企業の財務データと株価から得られたデフォルト距離のふたつによって説明するアプローチと考えることができる。その意味で、以下で展開する議論は、以上の3つのアプローチを統合したものであるとも考えるこ

とができる。

本稿の構成は以下のとおりである。第1節において最近の研究成果の簡単なサーベを行う。第2節において、統計アプローチが実際は構造型アプローチの1類型とみなすことができることから、デフォルト距離を統計モデルにおける説明要因（リスクファクター）として取り込むことは、構造アプローチの自然な拡張になっていることをしめす。第3節では、構造モデルによるデフォルト確率推定のために必要になる「デフォルト距離」の推定方法に関して説明をする。第4節では、統計モデルと構造モデルのハイブリッドモデル推定のための必要となるデータとモデル推定結果について説明をする。また、こうしたハイブリッドモデルを用いた場合の株式ポートフォリオの損失分布と、それにもとづく幾つかの信用リスク量の推定結果をしめす。

1. 文献展望

最近、上に述べたデフォルト確率推定の統計モデルと構造モデルによる2つのアプローチを統合しようとする注目すべき試みがある。離散的な生存分析は、パネルデータを用いた定性的な従属変数モデルとみなすことができる（森平(2009)第5章および第5章付録）。また、構造モデルによる債務超過確率は、資産価値成長率が正規分布するとすれば、デフォルト距離の標準正規分布関数変換によって求めることができる。従って、定性的な従属変数モデルにおける説明変数の一つを時間とともに変化するデフォルト距離と考えれば、構造モデルと離散型生存分析を統合することが可能である。

こうしたアプローチの最初の試みが、Chan-Lau, Jobert, and Kong(2004)により、発展途上国の銀行のデフォルト（格付けがCCC以下になる）確率を推定するために用いられた。彼らはデフォルト以前にさかのぼる3,6,12カ月のデフォルト距離を説明変数と考えロジットならびにプロビット回帰モデルを適用した。パネルデータを用いた場合の誤差項の系列相関を考慮した一般化最小二乗法を適用している。デフォルトに先立つ3,9ヶ月前のデフォルト距離がデフォルト確率を推定するにあたり有意であったことが確かめられている。Duffie, Saita and Wang(2005)は、誘導型アプローチで用いられる可変時間のデフォルト強度を説明するリスクファクターの一つとしてデフォルト距離を用い、それが統計的に有意でありかつ符号条件をみたすことを示した。Bharath and Shumway(2008)は、生存時間を従属変数とし、デフォルト距離から計算されたMertonモデルにもとづくデフォルト確率を説明変数の一つと考え、それが誘導型モデルにおいて、有意な変数であったことをしめした。

Bandyopadhyay (2007)はロジット回帰モデルにおいてデフォルト距離を説明変数の1つとしたモデルをインド企業を対象にして推定している。

他方、森平(2009,第6章)で簡便法と呼称したのと同様なNaiveモデルによるデフォルト確率の推定結果も、Mertonモデルにもとづく株価にキャリブレートした結果得られたデフォルト確率とほぼ同じ説明力と係数であることを確かめた。しかし、Naiveモデルによるデフォルト確率とMertonモデルによるデフォルト確率、さらに他の財務比率や株式時価総額、

負債、株価ボラティリティといった変数を同時に説明変数に採用したとき、Merton モデルによるデフォルト確率が有意でなかったこと、また、他の財務比率や株式時価総額、負債、株価ボラティリティが有意であったことをしめした。この結果は、Merton モデルによるデフォルト確率が十分統計量でないことをしめしている。

2 信用リスクモデルの種類とハイブリッドモデル

2.1 デフォルト確率推定モデル

2.1.1 構造モデル

Black and Scholes(1973)は、企業の株主は、企業資産に関するヨーロッパ・コールオプションを、そして企業の債権者（割引債保有者）が企業資産を原資産とするプットオプションを保有していることを明らかにした。Merton(1974)はこの考え方をさらに推し進めて、企業資産価値が対数正規分布に従うと仮定したときに、信用リスクにさらされている割引債の利回りとリスクフリーな割引国債の利回りとの差である信用スプレッドがどのように決定されるかを導いた。Black and Scholes(1973)、Merton(1974)は、ともにリスク中立世界、すなわち企業価値が無リスク金利で成長していくような世界を考えたときの分析をおこなった。

一方、デフォルト確率をリスク管理に用いる場合には、こうしたリスク中立世界を仮定することは難しい。なぜならば、リスク中立世界で計測されるデフォルト確率には、デフォルトリスク以外のリスクプレミアムが内包されていることから、真の（純粋な）デフォルト確率とみなすことはできない。リスク中立でない世界、すなわち実確率測度の世界で使用するためには、デフォルトリスク以外のリスクプレミアムをデフォルト確率から除去する必要がある。こうした点を踏まえて、われわれは企業価値の確率過程が幾何ブラウン運動に従うとしたときに、そのドリフト項は実際の期待企業資産成長率 μ_A にしたがう、つまり、企業資産の成長率の確率過程として、

$$\frac{d\tilde{A}_T}{A_T} = \mu_A dt + \sigma_A d\tilde{W}_t \quad (1)$$

と考え、 T 期間後の企業価値がその時の負債価値 D_T を下回る確率としての債務超過確率をもとめる。ただし A_T は t 期の資産価値、 σ_A は資産成長率のボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$ は増分ウィナー過程を示す。

$$PD(T) = \Pr(A_T < D_T) = 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

$$d_2 \equiv \frac{\log_e \left(\frac{A_0}{D_T} \right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad (2)$$

ここで、 d_2 はいわゆるデフォルト距離に相当する。デフォルト距離は、森平(2009,第 6 章)でしめしたように、株価、発行済み株式数、株式投資収益率の期待値(平均値)、そのボラティリティといった株価(時価)情報から推定することができる。その意味で、次に述べる統計アプローチに基づくモデルは、企業の財務比率という簿価情報に依存していることから、構造モデルとは異なるアプローチとなる。

2.1.2 構造モデルとしての統計アプローチ

デフォルト確率を推定するためのもうひとつの考え方が、ロジット回帰あるいはプロビット回帰モデルなどを用いた、定性的[0,1]従属変数をもつ回帰分析手法を適用する方法である。しかし、こうした統計的アプローチは、構造モデルとみなすことも可能である。この点を次に明らかにし、統計モデルと第 2.1 節で述べた構造モデルを統合し、ハイブリッドモデルを導出することが可能であることをしめそう。

われわれが観察できるのは、1) 過去において企業が倒産したか否か、2) 「倒産・非倒産企業の財務情報(定量情報)」あるいは「その他の属性(定性情報)」である。ここで、われわれが直接的には観察できないが、企業のデフォルト・非デフォルトに影響を与える i 番目の企業の信用リスク度をしめす指標 Z_i を考えよう。この信用リスク指標 Z_i は、観察できないが、それに影響をあたえる、1) 観察可能な企業のさまざまなリスクファクターと、2) 信用リスク指標の不確実性に影響を与えるランダムな誤差項によって説明できるとしよう。便宜的に、信用リスク度をしめす指標 Z_i と K 個のリスクファクター、誤差項 $\tilde{\epsilon}_i$ との関係に関し線形性を仮定すると、

$$\tilde{Z}_i = \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_K X_{K,i} + \tilde{\epsilon}_i \quad (3)$$

と表すことができよう。ここで、定数項のない線形式になっていることに注意するとともに、誤差項 $\tilde{\epsilon}_i$ の期待(平均)値はゼロを仮定する。

「企業はなぜデフォルトするのであろうか？」この問いには、次のように考えることができる。企業は上の式(3)であらわされる「信用リスク度」がある一定の値である閾値 b_0 を

下回るとデフォルトし、そうでない場合はデフォルトしないと考えることにしよう。もし信用リスク度が資産価値の時価を表し、定数項 b_0 が負債価値を表すと考えれば、こうした考え方は「構造モデル」と同一である。企業のデフォルト・非デフォルトが観察できることは上で述べたとおりであり、企業が今から T 期間後にデフォルトするか ($\tilde{Y}_i = 1$)、デフォルトしないか ($\tilde{Y}_i = 0$) の事実と、観察できない式(3)の信用リスク度との関係は次のように表すことができる。

$$\tilde{Y}_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{Z}_i < b_0 \\ 0 & \text{if } \tilde{Z}_i \geq b_0 \end{cases}$$

このことから、企業がいまから T 期間後にデフォルトする確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} PD_i(T) &= \Pr(\tilde{Y}_i = 1) = \Pr(\tilde{Z}_i < b_0) \\ &= \Pr(b_1 X_{1,i} + b_2 X_{2,i} + \cdots + b_K X_{K,i} + \tilde{\varepsilon}_i < b_0) \\ &= \Pr(\tilde{\varepsilon}_i < b_0 - (b_1 X_{1,i} + b_2 X_{2,i} + \cdots + b_K X_{K,i})) \\ &= F(\beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_K X_{K,i}) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし $\beta_0 \equiv b_0$ かつ $-b_j \equiv \beta_j$ ($j = 2, 3, \dots, K$) と定義する。最後の式における $F(\cdot)$ は分布関数をしめしている。分布関数 $F(\cdot)$ は時にリンク(連結)関数とも呼ばれる。これは、信用リスク度とデフォルト確率を結びつける(リンクする)関数でもあるからである。例えば、誤差項が正規分布すれば $F(\cdot)$ は正規分布の累積分布密度関数となり、パラメータはプロビット回帰によって推定できる。もし、誤差項がロジット分布に従えば、ロジット回帰によってパラメータ推定が可能になる。

この結果は、式(3)に変えて、定数項 $\beta_0 \equiv -b_0$ を加えた信用リスク度を示す式

$$\tilde{Z}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_K X_{K,i} + \tilde{\varepsilon}_i \quad (5)$$

を考え、式(3)においてデフォルト閾値をゼロとしても結論は変わらないことを意味する。従って、今後はそのように仮定して議論を進めることにする。

2.2 ハイブリッドモデルの提唱

2.2.1 基本的な考え方

式(2)で示される構造モデルによるデフォルト確率は、リスク中立的なデフォルト距離を、正規分布関数によって $[0,1]$ 範囲にある確率に変換したものであると考えることができる。

他方、統計モデルは、式(3)の最後の式でしめされるリスクファクターの線形結合で表される信用リスク度をしめす指標 Z_i が、ある閾値 b_0 を超えたときにデフォルトすると考え、その時のデフォルト確率をもとめた。もし式(5)の信用リスク度の不確実性をしめすかく乱項(誤差項) $\tilde{\varepsilon}_i$ が正規分布をすると仮定できれば、式(4)でもとめられたデフォルト確率は、構造モデルによるデフォルト確率と基本的には同じであると考えることができる。

いま、信用リスク度に影響を与えるリスクファクターがひとつだけであり、それがデフォルト距離であったとしよう。つまり、

$$X_{1,i} = DD_i = \frac{\ln\left(\frac{A_{0,i}}{D_{T,i}}\right) + \left(\mu_i - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)T}{\sigma_{A,i}\sqrt{T}} \quad (6)$$

とすれば、企業の信用リスク度は、

$$\tilde{Z}_i = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\ln\left(\frac{A_{0,i}}{D_{T,i}}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)T}{\sigma_{A,i}\sqrt{T}} \right) + \tilde{\varepsilon}_i \quad (7)$$

と示すことができるので、 i 番目の企業のデフォルト確率は、時点ゼロからみて T 期間後のデフォルト確率として

$$PD_i(T) = N(\beta_0 + \beta_1 DD_i) \quad (8)$$

と表すことができる。従って、統計モデルによるデフォルト確率は、プロビット回帰を適用したときの推定パラメータが $\beta_0 = 0$ かつ $\beta_1 = -1$ であるときに、実確率測度下における構造モデルで計算されるデフォルト確率に等しくなる。デフォルト距離が大きくなるほど、デフォルトし難い、つまりデフォルト確率は小さくなることが予想されることから、一般に推計は $\beta_1 < 0$ であると考えられる。この様な定式化は企業の実際のデフォルト、非デフォルト実績にもとづくキャリブレーションによって、デフォルト距離のデフォルト確率へ

の影響度合いを修正しているものと考えることができる。同様な定式化は、デフォルト距離に関して Bonnes(1964)モデルあるいは Esscher 変換モデルを考えたときにも可能である。

2.2.2. ハイブリッドアプローチの拡張

デフォルト確率の期間構造とその異質性の推定

森平・岡崎(2009)では、企業の財務諸表に関するパネルデータをもとにしてデフォルト確率の期間構造モデルを考えた。式(8)においても同様にして、その期間構造を考えることができる。

$$PD_i(t+1) = N(\beta_0 + \beta_1 DD_i(t)) \quad t=1,2,\dots$$

$$DD_i(t) = \frac{\ln\left(\frac{A_{0,i}}{D_{T,i}}\right) + \left(\mu_i - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)t}{\sigma_{A,i}\sqrt{T}} \quad (9)$$

最初の式は、企業*i*が*t*期までに生存していたという条件の下、*t*+1期にデフォルトする確率をしめしている。2番目の式は、1番目の式の説明変数となるデフォルト距離をあらわしている。

式(9)の推定にあたっては、森平(2009)で明らかにしたように、デフォルト実績とデフォルト距離に関するパネルデータを用いるので、個別企業の異質性に不確実性が存在しないと考えるモデル、すなわち、固定効果モデル

$$PD_i^0(t+1) = N(\beta_0(t) + c_i + \beta_1 DD_i^0(t)) \quad t=1,2,\dots \quad (10)$$

を考えることができる。あるいは、デフォルト距離に関する個別企業の異質性が確率的に変動(確率変数)する、すなわち不確実性が存在すると考えるランダム(変量)効果モデル

$$\mathbb{P}D_i^0(t+1) = N(\beta_0(t) + \beta_1 DD_i^0(t) + \sigma \tilde{e}_i) \quad t=1,2,\dots \quad (11)$$

を考えることができる。

固定効果モデルは、個別企業ごとにダミー変数を導入することによって個体間の異質性を制御し、推計をおこなっている。従って、企業数*n*が大きくなる場合には、推計の自由度が大きく失われることとなる。一方、ランダム(変量)効果モデルは、個別企業の異質性が正規分布に従う確率変数として考えることで、個体間の異質性を制御した推計をおこなっている。ランダム効果モデルでは、個別企業ごとにダミー変数を導入する必要がないことから、企業数*n*が大きいときに推計の自由度が失われないという利点がある。

個体間の異質性は、観測者が直接的ないし間接的にも観察することが困難である場合、または観測者がそもそも観察対象から見落としている因子を念頭に置いており、「観察されない異質性(Unobserved heterogeneity)¹」と呼ばれる。逆に、観測者がすべての事象を観察す

¹ 具体的には経営者の質、企業文化、内部統制(コンプライアンス意識やオペレーショナル・リスク)

ることが可能であるならば、明示的に何かしらの説明変数を用いることで個体間の異質性を説明することが可能となる。

2.2.3. マクロ経済変数および企業の財務比率を考慮する

企業のデフォルト確率に影響を与える要因をデフォルト距離に限定する必要はない。1 期間モデルであれば、デフォルト距離に $K-1$ 個の財務変数と、 L 個のマクロ経済変数を考えて、次のようなデフォルト確率を推定することができる。

$$PD_i^p(T) = N(\beta_0 + \beta_1 DD_i^p + \beta_2 X_{2,i} + \dots + \beta_K X_{K,i} + \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_L Y_L) \quad (12)$$

こうしたマクロ経済変数および企業の財務比率で定式化した場合にも期間構造を考慮することができる。

3 実証結果

3.1 使用したデータ

日経 NEEDS 企業財務データファイルに収録された、2000 年から 2008 年 12 月決算期までの日本の上場企業(東証・大証・名証 1/2 部、ジャスダック、ヘラクレス、セントレクス)の倒産・非倒産年次決算書データを用いたデフォルト確率の期間構造推定を試みた。財務データは、2000 年 1 月から 2008 年 12 月までに決算期を迎えた通期および半期の決算書が対象となっている。従ってデータセットは最長 9 年×企業数のパネルデータの形をとる。また、組織的危険を表す変数としてこの期間に対応する月次あるいは四半期のマクロ経済変数を用いた。財務諸表データは、規模を表す変数をのぞき、すべてが財務比率であり、マクロ変数は対前年同期比の形をとっている。なお、独立変数として用いた財務変数は、デフォルト 1 年前の決算書から計算されたものを用いている。なお、決算期間が 12 ヶ月間に満たない決算書については、損益項目を 12 ヶ月換算した上で財務比率を計算している。

表 1 はデータセットに収録されている決算書数の状況を示しており、表 2 はデータセットの主要項目について、基礎統計量を示している。すべての財務比率について、その平均値で見ると、非デフォルト企業とデフォルト企業の間で顕著な違いがあることがわかる。

とりわけ、デフォルト距離は、デフォルト企業と非デフォルト企業のあいだで、その平均値に関して大きな差があることがわかる。このことは、デフォルト距離のみで、デフォルト企業と非デフォルト企業を比較的容易に判別できることを意味している。しかし、藩閥にあたっては、非デフォルト企業のデフォルト距離の標準偏差で測った散らばりは、デフォルト企業のそれに比べて、極めて大きい点にも注意をしなければいけない。従って、デフォルト距離以外に、非デフォルト企業で散らばりが小さなリスク尺度、例えば、表 2 における総資産売上高率や負債比率などを、デフォルト距離に加えることにより、デフォルト確率をよりよく推定出来る可能性があることをしめしている。

など、一般に定量化できない情報を反映しているものと考えられる。

なお、半期決算情報が取得できた企業については、半期決算情報をデータセットに含めている。デフォルト事象は、決算期以降1年以内に発生したものを認識しており、企業*i*について、時系列で決算書を並べた場合に、初めてデフォルト認識した決算期を当該企業における決算書の終端としている。従って、表1において、各年の決算書合計数が企業数を上回っているが、これは半期決算書が含まれるからである。表1でしめすデフォルト率は半期および通期決算書合計数に対する割合となっている。複数取引所に上場する企業については、主たる取引所(より流動性の高い取引所)のデータを使用している。

表 1. データセット概要：年別決算書数の収録状況とデフォルト率

| 年 | 非デフォルト件数 | デフォルト件数 | 合計 | デフォルト率 |
|--------------|----------|---------|-------------|-------------|
| | (1) | (2) | (3)=(1)+(2) | (4)=(2)/(3) |
| 2000 | 5,664 | 8 | 5,672 | 0.14% |
| 2001 | 5,990 | 34 | 6,024 | 0.56% |
| 2002 | 6,246 | 19 | 6,265 | 0.30% |
| 2003 | 6,415 | 14 | 6,429 | 0.22% |
| 2004 | 6,580 | 7 | 6,587 | 0.11% |
| 2005 | 6,783 | 3 | 6,786 | 0.04% |
| 2006 | 6,960 | 5 | 6,965 | 0.07% |
| 2007 | 7,149 | 24 | 7,173 | 0.33% |
| 2008 | 5,006 | 27 | 5,033 | 0.54% |
| Total | 56,793 | 141 | 56,934 | 0.25% |

| |
|-------|
| 企業数 |
| 4,352 |

表 2. データセット概要：財務比率の平均および標準偏差

| | 非デフォルト企業 | | デフォルト企業 | |
|--------------|----------|------------|----------|-----------|
| | 平均 | 標準偏差 | 平均 | 標準偏差 |
| 総資産売上高率 | 1.038 | 0.67810 | 0.7551 | 0.48179 |
| 当座比率 | 1.605 | 8.36731 | 0.5057 | 0.74530 |
| 負債比率 | 0.519 | 0.26904 | 0.9037 | 0.61183 |
| 棚卸資産回転期間(日) | 47.759 | 87.55974 | 132.6885 | 207.53080 |
| 売上高規模(百万円) | 116,094 | 473,246 | 41,659 | 99,598 |
| デフォルト・ディスタンス | 342.442 | 45,441.080 | 1.923 | 1.865 |

3.2 基本モデルの推定結果

デフォルト距離をリスクファクターと考えたときのデフォルト確率の期間構造の推定結果をしめし、その解釈について述べる。

3.2.1. デフォルト距離のキャリブレーション結果

まずデフォルト距離の推定をおこなう。デフォルト距離は、企業資産価値、資産ボラティリティ、期待企業資産成長率の3つの変数について同時に推計する。計測方法を簡単に説明すると、3つの変数 A, μ, σ_A のそれぞれに適切な初期値を与え、「株価ボラティリティから推計される資産ボラティリティ」と「資産ボラティリティ」が等しくなるように、収束計算をおこなっている。

表3は、式(9)にもとづき、デフォルト距離のみをリスクファクターと考えたときのデフォルト確率期間構造の推定結果を示している。リンク関数を標準正規分布関数とした時には、プロビット回帰を適用でき、

$$\begin{aligned} PD_i^P(t+1) &= N(Z_i^P(t+1)) \\ Z_i^P(t+1) &= -2.221 - 0.207 DD_i^P(t) \end{aligned} \tag{13}$$

として、 i 番目の企業が t 期まで生存していたという条件のもとで、次の $t+1$ 期にデフォルトする確率を推定することができる。ここで、注意すべき点は、唯一のリスクファクターであるデフォルト距離は時間と共に変わりうる変数であることである。

表3においてデフォルト距離に関する係数は1パーセント水準で有意であり、かつ符号が負であるので符号条件をみたしている。つまり、デフォルト距離が増加（減少）するにつれ、デフォルト確率が低下（増加）することが分かる。単純な構造アプローチによってデフォルト確率を推定するよりも、企業の過去におけるデフォルト・非デフォルト実績情報に即してデフォルト距離をキャリブレーションしたほうが、デフォルト確率のより良い推定値を得ることができることを示している。

もし、単純な構造アプローチが正しければ、式(9)において $\beta_0 = 0$ かつ $\beta_1 = -1$ であるはずである。しかしながら、推定結果は $\beta_0 = -2.221 < 0$ であり、 $\beta_1 = -0.207 > -1$ である。このことは、係数がいずれもマイナスかつ有意であることから、ハイブリッドモデルによるデフォルト確率の推定値は、単純な構造モデルによって推定された債務超過確率よりも低くなる可能性が高いことを意味している。この結果は、黒子・神山(2000)による実証結果と整合的である。つまり、彼らは、構造アプローチはデフォルト企業をデフォルトすると良く予測するが、非デフォルト企業をデフォルトと予測する可能性が高いとし、統計アプローチはその逆であることをしめした。ハイブリッドモデルは、両者の良い点を捉まえることができたことを示している。

また、デフォルト距離は、株価が変化するごとにリアルタイムにその値を推定することができることから、財務比率変数だけに依存する統計アプローチの欠点を補うことができるアプローチであるとも言える。

さらに AR 値も 0.612 とかなりの値をしめしており、デフォルト距離のみでデフォルト確率の序列性をかなりの程度満たすことがわかる。

リンク関数としてロジスティック分布を考えて時の推定結果も、係数の大きさを除いて、ほぼ同様な結果を得ている²。

表 3. デフォルト距離 DD にもとづくデフォルト確率：式(9)

$PD_i(t+1) = N(\beta_0 + \beta_1 DD_i(t))$ の推定結果。ここで $N(\cdot)$ はロジスティック分布、あるいは標準正規分布の分布関数。

| モデル番号 | | ロジット回帰 | プロビット回帰 |
|--------------|------------|-----------|-----------|
| パネルデータ分析 | | | |
| 変数 | 変数名 | | |
| DD | デフォルト距離 | -0.645*** | -0.207*** |
| Constant | 定数項 | -4.212*** | -2.221*** |
| Observations | 観察値数 | 56,934 | 56,934 |
| r2_p | 擬似決定係数 | 0.0774 | 0.0735 |
| chi2 | χ^2 値 | 152.7 | 145.1 |
| df_m | 自由度 | 1 | 1 |
| ll | 対数尤度 | -910.6 | -914.4 |
| ll_0 | 定数項のみの対数尤度 | -987.0 | -987.0 |
| roc | ROC曲線 | 0.8055 | 0.8055 |
| AR | AR値 | 0.611 | 0.611 |

注) ***は 1 パーセント水準で有意。

3.2.2. 市場流動性とデフォルト予測力

は、東京証券取引所に上場されている企業と、その他の市場に上場されている企業とでデータセットを分割し、説明変数にデフォルト距離のみを採用して推定した結果をしめしている。これを見ると、東京証券取引所に上場されている企業グループでは、AR 値が 0.7234 となっており、その他の市場に上場されている企業グループの AR 値 0.4806 を大きく上回る結果となっている。

このように説明力に差異が生じた原因には、市場間の流動性の違い、企業規模や企業年齢の違い、株価に織り込まれる情報量の大きさが影響していると考えられる。流動性の高い市場では、高頻度の売買を通じて、個々の市場参加者によるさまざまな情報が株価とそ

² ロジット回帰のパラメータ推定値は、おおよそプロビット回帰におけるパラメータ推定値の 1.81 倍（箕谷(2006)p.791）あるいは、1.6 倍（Amemiya(1985)）であるとしているが、ここではそのような結果にはなっていない。

の変動に反映されていると考えられる。

表 4. デフォルト距離 DD にもとづくデフォルト確率: 東京証券取引所上場の企業とその他市場上場の企業とでデータセットを分割し、ロジットかいきによる推定結果。

| モデル番号 | | 東京証券取引所 | その他市場 |
|--------------|------------|-----------|-----------|
| パネルデータ分析 | | | |
| 変数 | 変数名 | | |
| DD | デフォルト距離 | -0.841*** | -0.461*** |
| Constant | 定数項 | -3.908*** | -4.478*** |
| Observations | 観察値数 | 34,441 | 22,493 |
| r2_p | 擬似決定係数 | 0.117 | 0.0419 |
| chi2 | χ^2 値 | 115.5 | 41.21 |
| df_m | 自由度 | 1 | 1 |
| ll | 対数尤度 | -433.7 | -470.6 |
| ll_0 | 定数項のみの対数尤度 | -491.4 | -491.2 |
| roc | ROC曲線 | 0.8617 | 0.7403 |
| AR | AR値 | 0.7234 | 0.4806 |

注) ***は1パーセント水準で有意。

3.3 ハイブリッドモデルの推定結果

3.3.1 デフォルト距離 DD を考慮した PD 期間構造推定

に示されているように、デフォルト距離は確かにデフォルト確率を推定するにあたり、有意な変数であるが、そのみでは、における擬似決定係数あるいは AR 値でみて、十分とは言えない。

森平・岡崎(2009)では、デフォルト確率の期間構造を推定するにあたり、当該企業の財務比率のみならず、マクロ経済変数を取り込むことにより、説明力の高いモデルを構築できるばかりでなく、マクロ経済変数の利用がより短い時間間隔で可能であることから、よりタイムリーなデフォルト予測が可能になることをしめした。

表 5 は、デフォルト距離に加え、財務変数とマクロ経済変数を考えたときの結果を示している。

約 40 個の財務比率と規模変数、104 個のマクロ経済変数(ラグを含む)をもとにして、期間構造モデルの推定を試みた。財務比率に関しては、財務諸表分析でよく用いられている収益性、流動性、資本構成、支払い能力、効率性、成長性などから、相互に相関の低い代表的な変数を選んだ。

これらの変数の内で、マイナスの値をとるものを含め、負の(自然)対数変換 (neglog 変換: negative logarithmic transformation)を試みることによって、説明力の顕著な増加を見ることが

できた³。neglog 変換(ngl)は、正負いずれの値を取り得る説明変数、とりわけ収益性を表す比率 x に関して次のような変換を意味する。

$$ngl(x) = \begin{cases} -\log(1-x) & \text{if } x \leq 0 \\ +\log(1+x) & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (14)$$

われわれの用いた個別企業の財務比率はすべて、簿価表示の会計情報を用いている。須田ほか(2008)において理論的かつ実証的に示されているように、「財政状態が悪化した企業は、・・・会計数値を意図的に操作するケースが顕著に表れると考えられる」。しかし、逆に考えると、そうしたインセンティブがあるにも関わらず赤字決算をする企業の信用リスクは相当高いと言わざるを得ない。neglog 変換は、報告利益水準がゼロを境にして、デフォルト確率に与える影響をより顕著に測定しようとする。

組織的危険の尺度としてのマクロ経済指標にどのようなものを用いるべきかについて、市場リスクに関しては、Chen, Roll, and Ross(1986)などがあるが、信用リスクについては確たる理論があるわけではない。われわれは、104 のマクロ変数から、符号条件や有意性を考慮して、最終的に、1) 日経平均株価指数の対前年同月比、2) 長短金利差 (3 ヶ月ラグ)、3) 6 ヶ月ラグを有する景気動向指数 (一致指数) の対前年同月比を選択した。

株価指数変化率は金融市場の景気に対する期待を示す変数であり、株価指数変化率のボラティリティは資本市場全体にわたる組織的危険を表す変数と考えた。長短金利差をスポットレートカーブの形状を表している。6 ヶ月ラグをとった景気動向指数(一致指数)はマクロの実物経済の好・不況度合い、市場期待を表す変数であると考えた。

われわれはモデル構築にあたり、複数のパターンを試行したが、最終的に表 5 でしめすように、モデル 2 は財務比率と産業ダミー変数のみを考えた場合、モデル 10 はそれに加え、マクロ経済変数を考えた場合、モデル 18 は財務比率、産業ダミー、マクロ経済変数に加え、対数変換後のデフォルト距離を加えたものである。モデル 18 において、デフォルト距離は、1 パーセント水準で、マイナスかつ有意である。AR 値も 0.78 から 0.81 とかなり高い水準を示している。

モデル 18 の推定結果から、デフォルト距離は、財務比率によって示される個別企業要因、産業ダミーとマクロ経済変数によって示されるマクロ要因が持っていない情報を含むことがわかる。

表 6 は、表 5 と同じ定式化を行ったモデルの推定結果を示しているが、企業の信用リスク度を示す $Z_i(t+1)$ そのものに不確実性を考えた場合の推定結果、すなわち、観察されない異質性を制御した推定結果を示している。つまり、式(11)における定数項は時間とともに変化しないが、誤差項に含まれる個別企業の異質性がランダムに決まっていると考え、リ

³ 負の対数変換については、Whittaker, Whitehead and Somers(2005)を参照。また、その 1 期間デフォルト確率推定への適用例については Altman and Sabato(2007)を参照。