

A Note on the Existence Problem of Isovariant Maps between Representation Spaces

Ikumitsu NAGASAKI ¹

Abstract. In this note, we discuss the converse of the isovariant Borsuk-Ulam theorem. In particular, we show that the converse holds for dihedral groups D_3 , D_4 and D_6 . On the other hand, the converse does not hold for other dihedral groups D_n , $n \neq 3, 4, 6$.

1. Introduction

Let G be a compact Lie group. A G -isovariant map $f : X \rightarrow Y$ between G -spaces is defined as a G -equivariant map preserving the isotropy subgroups, i.e. $G_x = G_{f(x)}$ for all $x \in X$. This notion was introduced by Palais [16] in order to study a classification problem for orbit maps of G -spaces.

In transformation group theory or equivariant topology, the existence and classification problem of G -maps is fundamental and important. Since Borsuk [2] proved the famous antipodal theorem, Borsuk-Ulam type theorems studied by many researchers, see for example [1], [4], [5], [6], [7]. These results are thought of as nonexistence results of G -maps, and have many applications; for example, Furuta [3] shows the 10/8-theorem in 4-dimensional topology using a Borsuk-Ulam type theorem, and Matoušek [8] illustrates several applications to combinatorics. Further results and applications on the Borsuk-Ulam theorem can be found in [14], [15].

Wasserman [18] first considered an isovariant version of the Borsuk-Ulam theorem. After that, Nagasaki [9], [10], [11] and Nagasaki-Ushitaki [13] also studied isovariant Borsuk-Ulam type theorems. One of Wasserman's results is the following.

Theorem 1.1 (Isovariant Borsuk-Ulam theorem). *Let G be a solvable compact Lie group and V, W (real) G -representation spaces; namely, G acts linearly on the (finite*

¹Department of Mathematics, Kyoto Prefectural University of Medicine, 13 Nishitakatsukasa-cho, Taishogun, Kita-ku, Kyoto 603-8334, Japan. e-mail: nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 57S17; Secondary 55M20.

dimensional) real vector spaces V and W . If there exists a G -isovariant map from V to W , then the inequality

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

holds. Here V^G denotes the G -fixed point sets of V .

In other words, if $\dim V - \dim V^G > \dim W - \dim W^G$, then there is no isovariant map from V to W . In this note, we discuss an existence problem of isovariant maps between G -representation spaces, which is considered as the converse of the isovariant Borsuk-Ulam theorem. In [11], we discussed it when G is a finite abelian p -group or a certain finite cyclic group. In this note, we shall discuss it when G is a certain dihedral group and show an existence result of isovariant maps under some dimensional conditions. The main result is Theorem 4.1 in section 4.

2. Basic facts of isovariant maps

In this section, G is a compact Lie group. Notation $H \leq G$ means that H is a closed subgroup of G and a subgroup means a closed subgroup.

We recall some basic facts for isovariant maps. Let $f : X \rightarrow Y$ be a G -map. Throughout this article, all maps are understood to be continuous. Let H be a subgroup of G . By restriction of the G -action to the H -action, an H -map $\text{Res}_H f : \text{Res}_H X \rightarrow \text{Res}_H Y$ is defined, and by restriction of f to the H -fixed point set X^H , an $N_G(H)/H$ -map $f^H : X^H \rightarrow Y^H$ is defined, where $N_G(H)$ denotes the normalizer of H in G . Let H be a normal subgroup of G . Let X, Y be G/H -spaces and $f : X \rightarrow Y$ a G/H -map. Via the projection $p : G \rightarrow G/H$, X and Y are regarded as G -spaces, denoted by $\text{Inf}_{G/H}^G X$ and $\text{Inf}_{G/H}^G Y$ respectively, and f is regarded as a G -map, denoted by $\text{Inf}_{G/H}^G f$. These are called the *inflation* of a G/H -space or a G/H -map. We often omit the symbols Res_H and $\text{Inf}_{G/H}^G$ for simplicity if there is no misunderstanding in context.

In [11] we have shown the following.

Lemma 2.1. *The following hold.*

- (1) *If f is G -isovariant, then $\text{Res}_H f$ is H -isovariant for any $H \leq G$.*
- (2) *Let H be a normal subgroup. If f is G -isovariant, then f^H is G/H -isovariant.*
- (3) *Let H be a normal subgroup. If $f : X \rightarrow Y$ is G/H -isovariant, then $\text{Inf}_{G/H}^G f$ is G -isovariant.*
- (4) *If $f : X_1 \rightarrow Y_1$ and $g : X_2 \rightarrow Y_2$ are G -isovariant, then $f \times g : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ is G -isovariant under the diagonal action.*

- (5) If $f : X_1 \rightarrow Y_1$ and $g : X_2 \rightarrow Y_2$ are G -isovariant, then so is $f * g : X_1 * X_2 \rightarrow Y_1 * Y_2$, where $*$ means join, in particular, the cone of f , $Cf : CX_1 \rightarrow CY_1$, is G -isovariant.
- (6) If $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ are G -isovariant, then so is $g \circ f : X \rightarrow Z$.
- (7) If $f : X \rightarrow Y$ is H -isovariant, then $G \times_H f : G \times_H X \rightarrow G \times_H Y$ is G -isovariant.

We may assume that a real G -representation V is an orthogonal G -representation without loss of generality, because every real representation is isomorphic to an orthogonal representation [17]. Then, the standard inner product on V is G -invariant, and so the unit disk and the unit sphere are G -invariant submanifolds, denoted by SV and DV respectively. Moreover V^{G^\perp} denotes the orthogonal complement of V^G in V , which is a subrepresentation of V .

The main results in [11] are not affected, but Lemma 2.2 of [11] is unfortunately missing an assumption. We correct it as follows.

Lemma 2.2. *Let V, W be G -representations. For statements (1)–(6) below (1) implies (2) and statements (2)–(6) are equivalent. Furthermore if $\text{Iso } SV \subset \text{Iso } SW$, then all statements are equivalent, where $\text{Iso } SV$ denotes the set of isotropy subgroups of SV .*

- (1) *There exists a G -isovariant map from SV to SW .*
- (2) *There exists a G -isovariant map from V to W .*
- (3) *There exists a G -isovariant map from $S(V^{G^\perp})$ to $S(W^{G^\perp})$.*
- (4) *There exists a G -isovariant map from V^{G^\perp} to W^{G^\perp} .*
- (5) *There exists a G -isovariant map from DV to DW .*
- (6) *There exists a G -isovariant map from $D(V^{G^\perp})$ to $D(W^{G^\perp})$.*

Proof. (1) \Rightarrow (2): Take the open cone of an isovariant map $f : SV \rightarrow SW$.

(2) \Rightarrow (4): Let $f : V \rightarrow W$ be an isovariant map. The inclusion $i : V^{G^\perp} \rightarrow V$ is clearly G -isovariant, and the projection $p : W = W^{G^\perp} \oplus W^G \rightarrow W^{G^\perp}$ is also G -isovariant, since G acts trivially on W^G . Hence the composite map $p \circ f \circ i : V^{G^\perp} \rightarrow W^{G^\perp}$ is G -isovariant.

(4) \Rightarrow (3): Let $f : V^{G^\perp} \rightarrow W^{G^\perp}$ be an isovariant map. Since $(V^{G^\perp})^G = (W^{G^\perp})^G = 0$, we have $f^{-1}(0) = \{0\}$, and hence a G -isovariant map $g : S(V^{G^\perp}) \rightarrow S(W^{G^\perp})$ can be defined by $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$.

(3) \Rightarrow (6): Taking the cone of an isovariant map $f : S(V^{G^\perp}) \rightarrow S(W^{G^\perp})$, we obtain a G -isovariant map $\tilde{f} : D(V^{G^\perp}) \rightarrow D(W^{G^\perp})$.

(6) \Rightarrow (5): Since any map $g : D(V^G) \rightarrow D(W^G)$ is G -isovariant, taking product, we obtain a G -isovariant map

$$f \times g : D(V) \cong D(V^{G^\perp}) \times D(V^G) \rightarrow D(W) \cong D(W^{G^\perp}) \times D(W^G).$$

(5) \Rightarrow (2): Let $f : DV \rightarrow DW$ be a G -isovariant map. Define $g : DV \rightarrow DW$ by $g(x) = f(x)/2$, then g is G -isovariant and maps DV to the interior $\text{Int } DW$ of DW . Hence we obtain a G -isovariant map $g|_{\text{Int } DV} : V \cong_G \text{Int } DV \rightarrow W \cong_G \text{Int } DW$.

When $\text{Iso } SV \subset \text{Iso } SW$, the implication (3) \Rightarrow (1) is shown as follows. Let $f : S(V^{G^\perp}) \rightarrow S(W^{G^\perp})$ be an isovariant map. If $SV^G = \emptyset$, then $SV = S(V^{G^\perp})$, and hence $i \circ f : SV \rightarrow S(W^{G^\perp}) \subset SW$ is isovariant. If $SV^G \neq \emptyset$, then $SW^G \neq \emptyset$, since $\text{Iso } SV \subset \text{Iso } SW$. Take any map $g : SV^G \rightarrow SW^G$. The join of f and g gives an isovariant map from SV to SW . Thus the proof is complete. \square

3. The existence problem of isovariant maps

In this section, G is a finite group.

Definition. We say that G has the *IB-property* over \mathbb{R} [resp. \mathbb{C}], if the isovariant Borsuk-Ulam theorem holds for orthogonal [resp. unitary] G -representations; namely, the inequality $\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$ holds for every pair (V, W) of G -representations such that there is a (continuous) G -isovariant map from V to W .

As being proved below, G has the IB-property over \mathbb{R} if and only if G has the IB-property over \mathbb{C} , and therefore we say for simplicity that G has the IB-property.

Proposition 3.1. *The following statements are equivalent.*

- (1) G has the IB-property over \mathbb{R}
- (2) G has the IB-property over \mathbb{C}

Proof. (1) \Rightarrow (2): Suppose that $f : V \rightarrow W$ is a G -isovariant map between unitary representations. By restriction of the ground field \mathbb{C} to \mathbb{R} , a G -isovariant map $\text{Res}_{\mathbb{R}} f : \text{Res}_{\mathbb{R}} V \rightarrow \text{Res}_{\mathbb{R}} W$ between orthogonal representations is obtained, and hence the inequality $\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$ holds.

(2) \Rightarrow (1): Suppose that $f : V \rightarrow W$ is a G -isovariant map between orthogonal representations. Taking a direct sum, we obtain an isovariant map $f \oplus f : V \oplus V \rightarrow W \oplus W$. Since $V \oplus V$ has a complex structure, in fact, $V \oplus V \cong V \otimes \mathbb{C}$ for some complex structure on $V \oplus V$, we obtain a continuous isovariant map $f \oplus f : V \otimes \mathbb{C} \rightarrow W \otimes \mathbb{C}$. Hence the inequality $\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$ holds. \square

By Theorem 1.1, every finite solvable group has the IB-property. Wasserman [18] shows that a finite groups satisfying the prime condition (e.g., A_5 , S_5 etc.) also have the IB-property, and Nagasaki [9] says that a weaker version of the isovariant Borsuk-Ulam theorem holds for an arbitrary compact Lie group.

Remark. The author, however, does not know an example of not having the IB-property.

Let G be a finite solvable group, and V and W G -representations. Suppose that there exists a G -isovariant map from V to W . For any pair of subgroups $H \triangleleft K$ (H is normal in K), the restriction of f to the H -fixed point sets yields a K/H -isovariant map $f^H : V^H \rightarrow W^H$. Since K/H is also solvable, the isovariant Borsuk-Ulam theorem shows that

$$(C_{V,W}): \dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K \text{ for any pair } H \triangleleft K.$$

Moreover the pair (V, W) must obviously satisfy

$$(I_{V,W}): \text{Iso } V \subset \text{Iso } W,$$

Definition. We say that a finite solvable group G has the *complete IB-property* over \mathbb{R} [resp. \mathbb{C}] if for every pair (V, W) of orthogonal [resp. unitary] G -representations satisfying conditions $(C_{V,W})$ and $(I_{V,W})$, there exists a G -isovariant map from V to W .

In [11] we show that if G is nilpotent, then $(C_{V,W})$ implies $(I_{V,W})$. In the case, $(I_{V,W})$ can be removed from the above definition. Note also that if G has the complete IB-property over \mathbb{R} , then G has the complete IB-property over \mathbb{C} ; however, the author does not know whether the converse of this property holds. We have proposed the following question in [11].

Question. Which finite solvable groups have the complete IB-property over \mathbb{R} (or \mathbb{C})?

4. Results and proofs

Concerning the question, we have shown [11] that the following groups have the complete IB-property over \mathbb{R} .

- (1) abelian p -groups,
- (2) $C_{p^m q^n}$, the cyclic group of order $p^m q^n$ ($m \geq 1, n \geq 1$),
- (3) C_{pqr} , the cyclic group of order pqr .

Here p, q, r are distinct primes.

Remark. S. Kôno also obtained that $C_{p^m q^n}$ has the complete IB-property over \mathbb{C} .

We give new examples of having the complete IB-property over \mathbb{R} and of not having the complete IB-property over \mathbb{R} .

Theorem 4.1. *Let D_n denote the dihedral group of order $2n$ ($n \geq 3$).*

- (1) D_3, D_4 and D_6 have the complete IB-property over \mathbb{R} .
- (2) Every D_n ($n \neq 3, 4, 6$) does not have the complete IB-property over \mathbb{R} .

Remark. Since $D_1 \cong C_2$ and $D_2 \cong C_2 \times C_2$, these also have the complete IB-property over \mathbb{R} by the previous result.

Remark. In [12], the author announced that some dihedral groups have the the complete IB-property over \mathbb{R} , but unfortunately it is incorrect.

We first recall the subgroup structure of D_n . Let

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

There is the normal cyclic subgroup $C_m = \langle a^{n/m} \rangle$ of D_n for every divisor m of n , and there are n/m dihedral subgroups $\langle a^{n/m}, b \rangle, \langle a^{n/m}, b^2 \rangle, \dots, \langle a^{n/m}, a^{n/m-1}b \rangle$ containing C_m as a subgroup of index 2. If n/m ($= [D_n : D_m]$) is odd, then these are all conjugate in D_n . We take $D_m = \langle a^{n/m}, b \rangle$ as a representative of their conjugacy class. If n/m is even, then there are two conjugacy classes whose representatives are $D_m = \langle a^{n/m}, b \rangle$ and $D'_m = \langle a^{n/m}, ab \rangle$.

We next recall the orthogonal irreducible representations of D_n from [17]. These are described as follows. Let $T_k = \mathbb{C}$ ($= \mathbb{R}^2$), $1 \leq k < n/2$, be the D_n -representation on which D_n acts by $a \cdot z = \xi^k z$, $b \cdot z = \bar{z}$, $z \in S_k$, where $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$. These T_k are all (nonisomorphic) 2-dimensional irreducible representation. Other irreducible representation are 1-dimensional. If n is odd, then there are two 1-dimensional irreducible representations \mathbb{R}_{++} and \mathbb{R}_{+-} , where \mathbb{R}_{++} is the trivial representation and \mathbb{R}_{+-} ($= \mathbb{R}$) is a representation on which the action is given by $a \cdot x = x$, $b \cdot x = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

If n is even, in addition to \mathbb{R}_{++} and \mathbb{R}_{+-} , there are more two 1-dimensional irreducible representations \mathbb{R}_{-+} and \mathbb{R}_{--} . The actions on \mathbb{R}_{-+} and \mathbb{R}_{--} are given by $a \cdot x = -x$, $b \cdot x = x$, and by $a \cdot x = -x$, $b \cdot x = -x$, respectively. Note, then, that

$$\text{Ker } T_k = C_{(k,n)}, \text{ Ker } \mathbb{R}_{+-} = C_n, \text{ Ker } \mathbb{R}_{-+} = D_{n/2}, \text{ Ker } \mathbb{R}_{--} = D'_{n/2}.$$

Note also that

$$\text{Iso } T_k = \{D_n, \langle a^{n/(k,n)}, a^t b \rangle, \langle a^{n/(k,n)} \rangle \mid 0 \leq t \leq n-1\},$$

$$\text{Iso } \mathbb{R}_{+-} = \{D_n, C_n\}, \quad \text{Iso } \mathbb{R}_{-+} = \{D_n, D_{n/2}\}, \quad \text{Iso } \mathbb{R}_{--} = \{D_n, D'_{n/2}\}.$$

We first show (1) of Theorem 4.1 in the case of $n = 3, 4$.

Proposition 4.2. *Suppose $n = 3, 4$. Given D_n -representations V and W satisfying condition $(C_{V,W})$, there exists a D_n -isovariant map from V to W .*

Proof. We first consider the case of $n = 3$. There is only one 2-dimensional irreducible representation T_1 . By Lemma 2.2, we may assume that $V^{D_n} = W^{D_n} = 0$. Hence we may put

$$V = a_1 T_1 \oplus a_2 \mathbb{R}_{+-}$$

and

$$W = b_1 T_1 \oplus b_2 \mathbb{R}_{+-},$$

where a_i and b_i are non-negative integers, and $a_1 T_1$ denotes the direct sum of a_1 copies of T_1 . The inequalities $(C_{V,W})$ for pairs $(1, C_3)$ and (C_3, D_6) lead to inequalities $a_1 \leq b_1$ and $a_2 \leq b_2$. Hence there is a natural inclusion from V to W , which is an isovariant map.

Next consider the case $n = 4$. In this case, there is only one 2-dimensional irreducible representation T_1 . By a similar argument, we may put

$$V = a_1 T_1 \oplus a_2 \mathbb{R}_{+-} \oplus a_3 \mathbb{R}_{-+} \oplus a_4 \mathbb{R}_{--}$$

and

$$W = b_1 T_1 \oplus b_2 \mathbb{R}_{+-} \oplus b_3 \mathbb{R}_{-+} \oplus b_4 \mathbb{R}_{--}.$$

The inequalities $(C_{V,W})$ for pairs $(1, C_2)$, (C_4, D_4) , (D_2, D_4) , and (D'_2, D_4) lead us to inequalities $a_i \leq b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Hence there is a natural inclusion from V to W , which is an isovariant map. \square

We next discuss the case of $n = 6$.

Proposition 4.3. *Given D_6 -representations V and W satisfying condition $(C_{V,W})$, there exists a D_6 -isovariant map from V to W .*

Proof. There are two 2-dimensional irreducible representations T_1 and T_2 . By a similar argument as above, we may put

$$V = a_1 T_1 \oplus a_2 T_2 \oplus a_3 \mathbb{R}_{+-} \oplus a_4 \mathbb{R}_{-+} \oplus a_5 \mathbb{R}_{--}$$

40

and

$$W = b_1 T_1 \oplus b_2 T_2 \oplus b_3 \mathbb{R}_{+-} \oplus b_4 \mathbb{R}_{-+} \oplus b_5 \mathbb{R}_{--}.$$

The following is a table for dimensions of H -fixed point sets of irreducible D_6 -representations.

$\dim X^H$	1	D_1	D'_1	C_2	D_2	C_3	D_3	D'_3	C_6	D_6
T_1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
T_2	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0
\mathbb{R}_{+-}	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
\mathbb{R}_{-+}	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
\mathbb{R}_{--}	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

Considering pairs (C_2, C_6) , (C_6, D_6) , (D_3, D_6) and (D'_3, D_6) , we obtain inequalities

$$a_i \leq b_i \quad \text{for } i = 2, 3, 4, 5$$

from condition $(C_{V,W})$. Considering pairs (D_1, D_2) , (D'_1, D_2) and $(1, C_3)$, we also obtain inequalities

$$a_1 + a_4 \leq b_1 + b_4, \quad a_1 + a_5 \leq b_1 + b_5, \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2.$$

If $a_1 \leq b_1$, then there is a natural inclusion from V to W , which is an isovariant map.

We now assume that $a_1 > b_1$. The above inequalities shows

$$0 \leq a_1 - b_1 \leq b_2 - a_2, \quad 0 \leq a_1 - b_1 \leq b_4 - a_4, \quad 0 \leq a_1 - b_1 \leq b_5 - a_5.$$

Decompose V and W into

$$V = V' \oplus V'' \quad \text{and} \quad W = W' \oplus W'',$$

where

$$V' = (a_1 - b_1)T_1,$$

$$V'' = b_1 T_1 \oplus a_2 T_2 \oplus a_3 \mathbb{R}_{+-} \oplus a_4 \mathbb{R}_{-+} \oplus a_5 \mathbb{R}_{--}$$

and

$$W' = (b_2 - a_2)T_2 \oplus (b_4 - a_4)\mathbb{R}_{-+} \oplus (b_5 - a_5)\mathbb{R}_{--},$$

$$W'' = b_1 T_1 \oplus a_2 T_2 \oplus b_3 \mathbb{R}_{+-} \oplus a_4 \mathbb{R}_{-+} \oplus a_5 \mathbb{R}_{--}.$$

Since $a_3 \leq b_3$, there is a natural inclusion from V'' to W'' . Therefore It suffices to show the existence of an isovariant map from V' to W' . To show this, it suffices to show that there exists an isovariant map

$$f : T_1 \rightarrow T_2 \oplus \mathbb{R}_{-+} \oplus \mathbb{R}_{--},$$

since $a_1 - b_1 \leq a_i - b_i$, $i = 2, 4, 5$. Indeed this is proved as follows. Set $U = T_2 \oplus \mathbb{R}_{-+} \oplus \mathbb{R}_{--}$. The dimensions of H -fixed point sets are the following.

(H)	1	D_1	D'_1	C_2	D_2	C_3	D_3	D'_3	C_6	D_6
$\dim U^H$	4	2	2	2	1	2	1	1	0	0

By Lemma 2.2, it suffices to show that there exists an isovariant map $f : ST_1 \rightarrow SU$. It is easily checked that ST_1 is decomposed into $ST_1 = (G/\langle b \rangle \amalg G/\langle ab \rangle) \cup_\phi G \times I$ as a G -CW complex, where $G = D_6$ and I is the interval $[0, 1]$. The attaching map $\phi : G \times \{0, 1\} \rightarrow G/\langle b \rangle \amalg G/\langle ab \rangle$ is equivariantly defined by $\phi(1 \times 0) = \langle b \rangle \in G/\langle b \rangle$ and $\phi(1 \times 1) = \langle ab \rangle \in G/\langle ab \rangle$. On the other hand, SU has the 1-dimensional singular set

$$SU^{>1} = \bigcup_{0 \leq t \leq n-1} SU^{(a^t b)} \cup SU^{C_2} \cup SU^{C_3}.$$

and its complement $SU \setminus SU^{>1}$ is path-connected. Note that G acts freely on $SU \setminus SU^{>1}$. Take points $y, z \in SU$ such that $G_y = \langle b \rangle$ and $G_z = \langle ab \rangle$. Then an isovariant map $f_0 : G/\langle b \rangle \amalg G/\langle ab \rangle \rightarrow SU$ is defined by $f_0(g\langle b \rangle) = gy$ and $f_0(g\langle ab \rangle) = gz$. Since $SU \setminus SU^{>1}$ is path-connected, one can take a path $\varphi : I \rightarrow SU$ such that $\varphi(0) = y$, $\varphi(1) = z$, and $\varphi(I \setminus \{0, 1\}) \subset SU \setminus SU^{>1}$. Using this map, one can equivariantly extend f_0 to a map $f : ST_1 \rightarrow SU$, which is an isovariant map. Thus the proof is complete. \square

Finally we discuss (2) of Theorem 4.1.

Proposition 4.4. *Suppose $n \neq 1, 2, 3, 4, 6$. Let k and l be distinct positive integers less than $n/2$ with $(k, n) = (l, n) = 1$. Then there is no D_n -isovariant map from T_k to T_l .*

Proof. Suppose that there is a D_n -isovariant map from T_k to T_l for some k and l . Lemma 2.2 shows that there is a D_n -isovariant map $f : ST_k \rightarrow ST_l$. Note that $ST_k^{>1} = ST_l^{>1} = \{\exp(\pi t \sqrt{-1}/n) \mid 0 \leq t \leq n-1\}$. Take $x = 1$ and $y = \exp(\pi \sqrt{-1}/n)$, then the isotropy subgroup G_x at x in ST_k is $\langle b \rangle$, and also $G_y = \langle a^s b \rangle$ in ST_k , where s is a positive integer with $ks \equiv 1 \pmod{n}$. Since $ST_l^{(b)} = \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}$, it follows that $f(1) = \pm 1$. Composing, if necessary, the antipodal map $z \mapsto -z$ with f , we may assume $f(1) = 1$. Let A is the shorter arc joining x with y in ST_k . Since every point of the interior of A has the trivial isotropy subgroup, it follows that $f(A \setminus \{x, y\})$ is contained in $ST_l \setminus ST_l^{>1}$; hence $f(y)$ must be y or \bar{y} . However the isotropy subgroup at y (resp. \bar{y}) in ST_l is equal to $\langle a^r b \rangle$ (resp. $\langle a^{-r} b \rangle$), where r is a positive integer with

$lr \equiv 1 \pmod n$, but it is not equal to $\langle a^s b \rangle$, since $l \not\equiv \pm k \pmod n$. This contradicts the isovariance of f . \square

From this proposition, (2) of Theorem 4.1 is easily seen; in fact, every pair (T_k, T_l) as above satisfies conditions (C_{T_k, T_l}) and (I_{T_k, T_l}) . Thus the proof is complete.

References

- [1] T. Bartsch, *On the existence of Borsuk-Ulam theorems*, *Topology* **31** (1992), 533–543.
- [2] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale Sphäre*, *Fund. Math.* **20** (1933), 177–190.
- [3] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8-conjecture*, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 279–291.
- [4] Y. Hara, *The degree of equivariant maps*, *Topology Appl.* **148** (2005), 113–121.
- [5] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a \mathbb{Z}_q -map from a \mathbb{Z}_q -space to S^{2n+1}* , *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 714–716.
- [6] K. Komiya, *Equivariant K -theoretic Euler classes and maps of representation spheres*, *Osaka J. Math.* **38** (2001), 239–249.
- [7] W. Marzantowicz, *Borsuk-Ulam theorem for any compact Lie group*, *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **49** (1994), 195–208.
- [8] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Universitext, Springer, 2003.
- [9] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, *Arch. Math.* **81** (2003), 348–359.
- [10] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 743–757.
- [11] I. Nagasaki, *The converse of isovariant Borsuk-Ulam results for some abelian groups*, *Osaka J. Math.* **43** (2006), 689–710.
- [12] I. Nagasaki, *A Borsuk-Ulam type theorem for isovariant maps and its converse* (in Japanese), *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku* **1540** (2007), 172–179.
- [13] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n -manifolds to representation spheres*, *Topology Appl.* **155** (2008), 1066–1076.
- [14] H. Steinlein, *Borsuk’s antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*, *Topological methods in nonlinear analysis*, 166–235, Montreal, 1985.
- [15] H. Steinlein, *Spheres and symmetry: Borsuk’s antipodal theorem*, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **1** (1993), 15–33.
- [16] R. S. Palais, *Classification of G -spaces*, *Mem. Am. Math. Soc.* **36** (1960).
- [17] J. P. Serre: *Linear representations of finite groups*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [18] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, *Topology Appl.* **38** (1991), 155–161.

森式直立型手術用ゴニオレンズ (森ゴニオレンズ)

森 和彦*

森式直立型手術用ゴニオレンズ (森ゴニオレンズ; Mori Upright Surgical Goniolens) は内蔵するダブルミラーと中央部視野により, 眼球や頭部を傾斜させることなく視軸方向から全周の隅角を確認・操作できる手術用隅角鏡である。

はじめに

従来の手術用隅角鏡は視軸方向から隅角を観察できないため, 隅角手術時に全周の隅角を操作するには, その都度, 顕微鏡, 眼球もしくは頭部を目的とする方向へ傾斜もしくは回旋させねばならず, 手間と時間がかかるとともに結果として無駄な操作も多くならざるをえなかった。今回, 筆者らが考案した森式直立型手術用ゴニオレンズ (森ゴニオレンズ) (Mori Upright Surgical Goniolens, オキュラー社; 図1) は, 内蔵するダブルミラーと中央部視野により視軸方向から全周の隅角を確認・操作できるものである。

I 原理と特徴

森式直立型手術用ゴニオレンズ (森ゴニオレンズ) には以下の2つの特徴がある。第1は岩崎ら¹⁾のコンセプト

のもとに内蔵した2枚のミラーにより眼球を傾斜させることなく視軸方向から隅角を観察・操作可能である点, 第2は隅角鏡を回転しても手術器具の位置が確実に把握できるように中央部視野を確保した点である。ダブルミラーを介した光路と中央部の光路の2つの光路が存在する (図2) ため, 隅角を明るく照明できるのみならず器具の陰影も形成されなくなり, より視認性に優れた隅角像を得ることができる。さらに隅角鏡の角膜接地面に切り込みが入れている (図2 青矢印) ために, 隅角切開刀や隅角癒着解離針などの器具を挿入しても隅角鏡が安定して角膜面に接している。唯一の欠点としては直接型隅角鏡 (Swan-Jacob Gonioprism) と比較して (表1) 拡大率においてやや劣るために手術用顕微鏡の倍率を最大倍率まで拡大する必要があり, 全周を確認するためには輪部に沿って顕微鏡を大きく移動させていかなくては

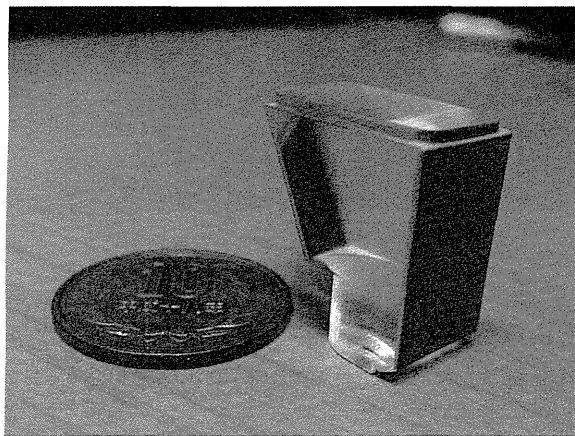


図1 森ゴニオレンズ

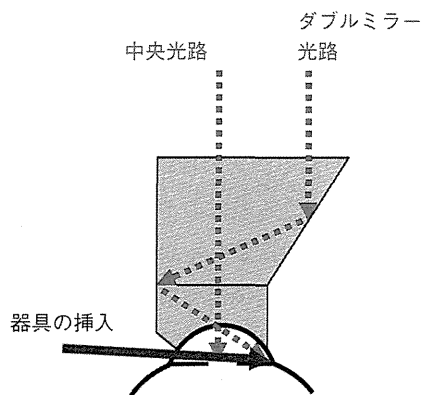


図2 森ゴニオレンズの光路図

* Kazuhiko Mori : 京都府立医科大学大学院医学研究科視覚機能再生外科学 (眼科学教室)
 [別刷請求先] 森 和彦 : 〒602-0841 京都市上京区河原町通広小路ル梶井町 465 京都府立医科大学大学院医学研究科視覚機能再生外科学 (眼科学教室) e-mail : kmori@koto.kpu-m.ac.jp

表1 手術用隅角鏡比較のまとめ

	Swan-Jacob Gonioprism	Mori Upright Surgical Goniolens
特徴	直像型	ダブルミラー型
観察方向	視軸に対し約 45~60°	視軸方向
眼球および頭位	傾斜	垂直
全周隅角操作	上下は困難	容易
滅菌	オートクレーブ	EOG ガス滅菌, グルタルアルデヒド

ならない点がある (図3)。

II 手術用隅角鏡を利用する術式と利用法

次に実際に森ゴニオレンズを利用する術式とその利用法について述べる。一般的に緑内障手術において最も森ゴニオレンズを利用する可能性の高い術式としては、隅角切開術と隅角癒着解離術が挙げられるが、それ以外にも線維柱帯切開術時のプローブの確認目的や trabeculotomy などの新しい手術においても使用することが可能である。通常、隅角手術時には森ゴニオレンズを角膜上に載せ、片手で把持しつつ他方で器具を操作して行う (図4)。

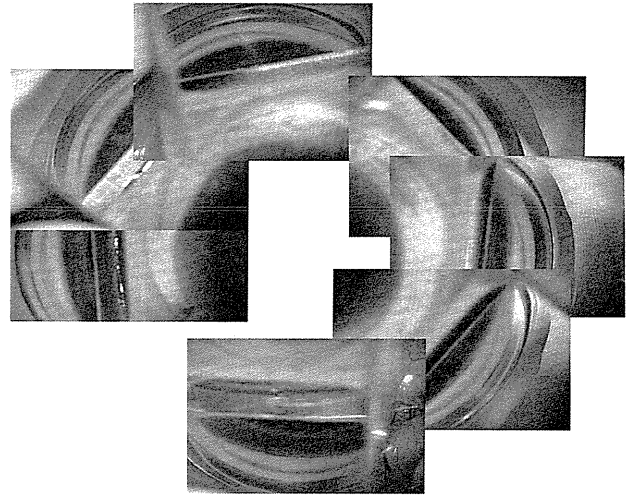


図3 隅角鏡の回転による全周隅角の確認

1. 隅角切開術 (goniotomy) と隅角癒着解離術 (goniosynechialysis) (図5)

いずれも全周にわたって隅角を確認しながら隅角切開もしくは癒着解離を施行する必要がある。従来の直接型隅角鏡では眼球と頭部、顕微鏡を大きく傾斜させ眼球を回旋させながら1象限ずつ行う必要があったが、森ゴニオレンズではこれらを傾斜もしくは回旋させる必要がなく、単なる隅角鏡の回転のみ (図3) で全周の隅角の確認・操作が可能である。通常はゴニオレンズを角膜上に載せる前に輪部に3カ所のサイドポートを作製し、サイドポートから器具を挿入した後にゴニオレンズを載せ、約120°の範囲にわたる隅角の操作を行う。



図4 ゴニオレンズの把持

これらの手術における最大のポイントは視認性の確保であり、隅角の微細構造がしっかりと見えている状態で操作を行うことで、隅角後退や前房出血の頻度を低下させるのみならず、器具の接触による角膜内皮障害も防ぐことができる。角膜と隅角鏡の間に血液が迷入するだけでも視認性が著しく損なわれるため、麻酔の際にも可能な限り出血させない心がけを行うのみならず、角膜上に粘弾性物質を置いたり、常に水を流し続けたりするなど、接触面に血液が迷入しない方策が必要である。ま

た白内障との同時手術の際には、可能な限り先に隅角の操作を行ったほうが、良好な角膜の状態であるためにより視認性に優れている。

第2のポイントは前房の保持である。前房という限られた空間で器具を操作する必要があるため、粘弾性物質のなかでもできれば分子量の大きいものを用い、前房深度を十分に確保することが必須である。また隅角操作中

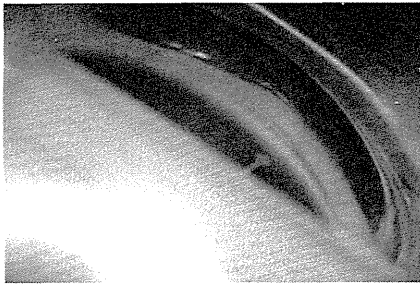


図5 隅角癒着解離術

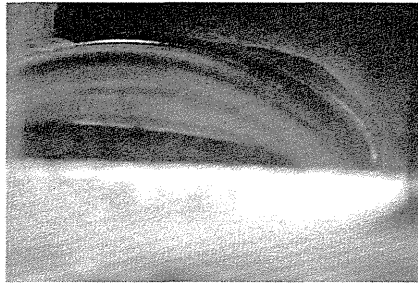


図6 線維柱帯切開術

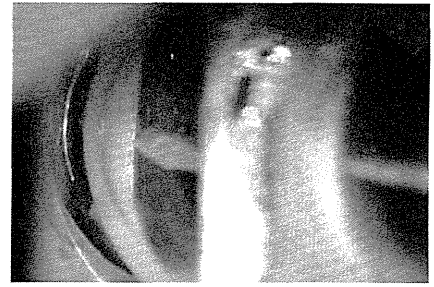


図7 プローブ回転が困難な際の手技

に房水が抜けることで前房が浅くなるのを防ぐために、可能な限り前房水のみならず後房水も抜いたうえで粘弾性物質に置換しておく必要がある。浅前房での無理な隅角操作は角膜内皮障害のリスクが高まるのみならず、術後の炎症を惹起しやすくなることから再癒着の頻度が高くなる。

2. 線維柱帯切開術 (trabeculotomy) (図6)

線維柱帯切開術の成功のためにはプローブの確実な Schlemm 管内挿入が必須である。そのために森ゴニオレンズを用いて隅角側からプローブ挿入部を観察し、線維柱帯を通して視認できるプローブの金属光沢を確認することによって、早期穿孔や上脈絡膜腔への迷入を未然に防ぐことができる。また、症例によってはプローブの曲率と Schlemm 管の曲率がぴったり合致、もしくは線維柱帯部の抵抗が非常に強いためにプローブの回転が困難な場合がある。このような場合に隅角側からプローブ先端部に向かって切開を加える (partial goniotomy, 図7) ことによって、プローブの先端を前房内に出すことができ、容易にプローブの回転を完成させることが可能である。

3. その他の手術

濾過胞再建術の際のレクトミーの window の状態のチェック、隅角を鈍的に擦過除去する gonioscurettage³⁾、

線維柱帯を高周波によって切除する trabectome⁴⁾、iStent とよばれる Schlemm管-前房間のマイクロステント⁵⁾ など、隅角マイクロサージェリーを行う際にも森ゴニオレンズを使用することができると考えられる。

おわりに

森ゴニオレンズは、眼球や頭部を傾斜させることなく全周の隅角を観察・操作可能な手術用隅角鏡として有用である。

【文 献】

- 1) Iwasaki N, Takagi T, Lewis JM, et al : The double-mirror gonioscopic lens for surgery of the anterior chamber angle. *Arch Ophthalmol*, **115** : 1333-1335, 1997
- 2) Mori K, Ikushima T, Ikeda Y, et al : Double-mirror gonioscopic lens with dual viewing system for goniosurgery. *Am J Ophthalmol*, **143** : 154-155, 2007
- 3) Jacobi PC, Dietlein TS, Krieglstein GK : Technique of gonioscurettage : a potential treatment for advanced chronic open angle glaucoma. *Br J Ophthalmol*, **81** : 302-307, 1997
- 4) Minckler DS, Baerveldt G, Alfaro MR, et al : Clinical results with the trabectome for treatment of open-angle glaucoma. *Ophthalmology*, **112** : 962-967, 2005
- 5) Bahler CK, Smedley GT, Zhou J, et al : Trabecular bypass stents decrease intraocular pressure in cultured human anterior segments. *Am J Ophthalmol*, **138** : 988-994, 2004

角膜移植後の緑内障はこう治す

How to Treat Glaucoma after Corneal Transplantation

森 和彦*

はじめに

はたして緑内障とは治すことができる疾患であろうか。それは「治る」の言葉の定義次第である。「治る」を「完全に健康な元の状態に戻る」とするならば、障害された神経を再生させることは現在の医学でもまだ不可能であるため、緑内障は不治の病ということになる。「治る」を「それ以上の進行を食い止めること」と定義するならば、現在の緑内障治療はすべからずこれを目標としており、かなりの症例で実行が可能となっている。しかし実際には眼圧を十分に下降させても進行を食い止めきれない症例が存在しており、「悪化のスピードを遅らせること」で何とか患者さんに納得してもらいたい場合も多い。

一方、近年の角膜移植術の進歩に伴い、数多くの難治性眼表面疾患を「治す」ことが可能となってきた。さらにその移植方法も従来の角膜全層移植や表層移植のみならず、培養上皮シートを用いた角膜上皮移植やさらには DSAEK (Descemet's stripping automated endothelial keratoplasty) に代表される内皮シート移植などのような角膜のパーツ移植へと進化してきている。このような進歩の背景には LASIK (laser *in situ* keratomileusis) などの屈折矯正手術の普及のみならず、シクロスポリンに代表される免疫抑制療法の発展が大きく寄与している。今では眼類天疱瘡や Stevens-Johnson 症候群、急性期化学外傷などのように従来は禁忌とされてきた疾患に対しても積極的に外科的治療が施され、これらの疾患



図1 化学外傷による瘢痕性眼表面疾患

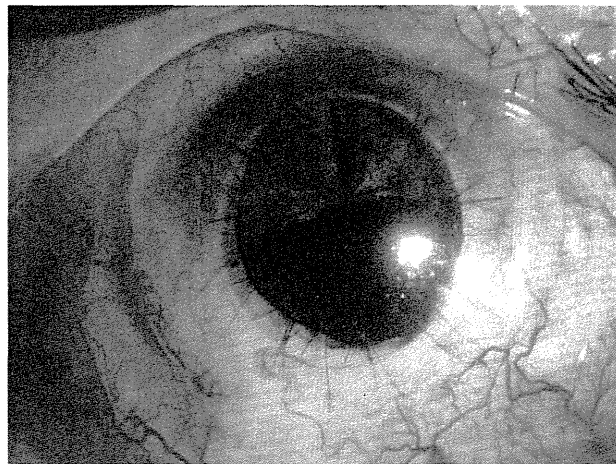


図2 図1と同一症例の羊膜移植を併用した眼表面再建術後

* Kazuhiko Mori : 京都府立医科大学大学院視覚機能再生外科学

〔別刷請求先〕 森 和彦 : 〒602-0841 京都市上京区河原町通広小路上ル梶井町465 京都府立医科大学大学院視覚機能再生外科学

が「治る」疾患へと変貌してきている(図1, 2).

I 角膜移植後の合併症

眼表面疾患は移植さえしてしまえば完全に「治す」ことができるのであろうか。否、世の中はそれほど甘くはない。角膜移植後に生じる治療困難な合併症には、移植片拒絶反応、免疫抑制に伴う感染症、続発緑内障などがある。なかでも続発緑内障は角膜移植後の失明原因として常に上位に位置しており、角膜がきれいになっても視神経が障害されてしまえば元も子もない。術後の一過性高眼圧を除いた角膜移植後続発緑内障の発症頻度は全体では30%程度とされているが、角膜移植の原因疾患によってその頻度が大きく異なっている。たとえば、無水晶体性水疱性角膜症では続発緑内障発症頻度が20~70%と最も高く、円錐角膜や先天性遺伝性角膜内皮ジストロフィ(CHED)などでは低いとされている¹⁾。

一般に、角膜移植後の続発緑内障発症・増悪のリスクとしては、角膜移植前から存在している緑内障の既往、無水晶体無硝子体眼、眼内レンズ(IOL)摘出術併用例などがあげられている。また眼圧上昇メカニズムとしては移植後の経過期間によりその機序が異なっており、移植後早期には前房内残留粘弾性物質、出血、炎症、角膜浮腫や浅前房による周辺虹彩前癒着、瞳孔ブロック、悪性緑内障などが考えられている。一方、移植後に一定の期間が経過した晩期では、ステロイド緑内障、拒絶反応に伴う炎症・虹彩前癒着の進行(図3)、悪性緑内障などの機序があげられる。近年はシクロスポリンに代表されるステロイド以外の免疫抑制療法が広く用いられるようになり、ステロイドを長期にわたって使用しなくてはならない症例が減少してきているため、必然的にステロイ

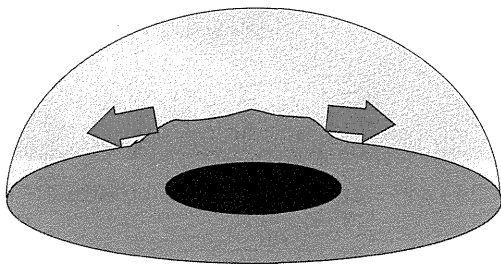


図3 Creepingメカニズムによる周辺虹彩前癒着の進行

ド緑内障の頻度も減少傾向にある。いずれの時期においても角膜移植後に生じた続発緑内障は、角膜移植片の生着ならびに透明性維持にも悪影響を与え、かつ緑内障手術自体も炎症を惹起することから、移植片拒絶のリスクを高める結果となるため十分な管理上の注意が必要である。

II 角膜移植後緑内障の治療方針

治療の基本は他の続発緑内障と特に変わるところはない。視神経の障害程度を見きわめたくて、必要最小限の薬物で最大限の効果を狙いつつ、眼圧上昇の原因に応じた治療を行う。しかし、角膜移植後眼の特殊性として基本的には眼底の透見性が不良なことが多いため、つつい本来の対象臓器である前眼部ばかりに目が行きがちであり、気がついたら視野検査所見や視神経乳頭所見を取る努力すらなされていなかったという場合もある。眼圧測定も角膜表面が不整な状態であることが多い(図4)ため、トノベン®やアイケアなどの角膜接触面積の小さい眼圧計のほうが有利(図5)ではあるが、いかなる眼圧計を用いても正確に測定できず眼瞼上から触診で類推するしかない場合もある。いわんや接触検査である隅角検査などはもってのほかで、移植片拒絶反応や移植した上皮細胞の脱落の恐れから触ることすら制限されることがある。そのような場合でも緑内障手術適応決定時には隅角検査は必須であり、Susman型圧迫隅角鏡のような

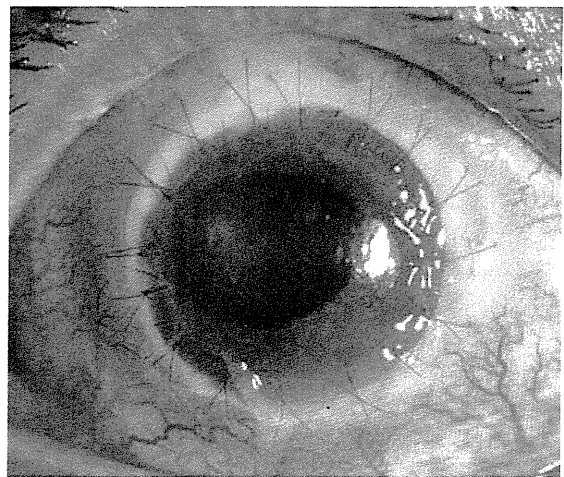


図4 全層角膜移植術後の眼表面不整

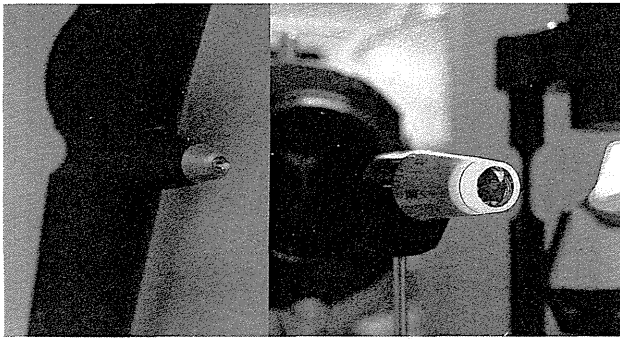


図5 アイケア眼圧計(左)とGoldmann眼圧計(右)の接触面積の差

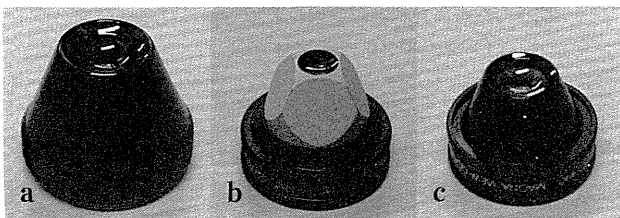


図6 各種隅角鏡の角膜接触面積の差

a: Goldmann 三面鏡, b: Susman 型圧迫隅角鏡, c: マグナビュー拡大一面鏡.

角膜接触面積の小さな隅角鏡(図6)を用いて、角膜上皮に負担をかけない隅角検査手技を日頃からマスターしておくことが必要である。

以上のように、緑内障治療の面からはかなり制限を課された状況下で診断・治療を進めてゆかねばならない点で、角膜移植後の緑内障は他の続発緑内障と比べてきわめて特殊であるといえる。

III 薬物療法の基本

通常、早期の眼圧上昇に対しては、 β ブロッカーやプロスタグランジン製剤などの点眼や炭酸脱水酵素阻害薬の点眼・内服治療から開始する。ステロイドは可能であるならば、より力価の弱いものに変更するか完全に中止するかして、シクロスポリンなどのステロイド以外の免疫抑制療法に切り替える。炭酸脱水酵素は角膜内皮にも存在し、角膜の透明性維持に関与していることから内皮細胞が減少しているような状況下では、可能な限り使用を制限したほうが望ましい。塩化ベンザルコニウムなどの防腐剤は眼表面に対して障害的に作用するため、可能

な限り添加されていないかもしくは濃度が少ないほうが望ましい。しかし、抗緑内障薬の使用は眼圧下降を主目的としていることから、その決定にあたっては主剤の効果を基準にすべきであり、副作用を恐れて眼圧下降効果の劣る薬剤を投与することは本末転倒である。 β_2 交感神経刺激薬や副交感神経刺激薬は無水晶体眼における嚢胞様黄斑浮腫(CME)の危険性、虹彩前癒着の進行などの副作用を考慮したうえで、使用することのメリットがデメリットを上回るならば使用を考慮する。しかし、抗緑内障薬はいずれも角膜の上皮障害ならびに結膜充血などの副作用をひき起こす可能性があるため、基本的には多剤併用は可能な限り3剤までにとどめるべきであり、点眼薬使用中には眼表面状態の十分な管理・注意が必要である。

IV 角膜移植後緑内障に対する手術療法

先に述べた内科的療法によっても眼圧がコントロールできない場合には、観血的療法を選択せざるをえない。選択的レーザー線維柱帯形成術などのレーザー治療は角膜の状態が良好でかつ開放隅角症例のみが適応となりうるが、角膜移植後緑内障における安全性と効果に関しては報告がない。角膜移植後緑内障に対する手術術式としては、移植した角膜内皮に対する影響や免疫抑制に伴う易感染性を考慮すれば、少しでも適応があるならまずはトラベクトミー(図7)よりもトラベクトトミーを選択したほうがよいと思われる(図8)。すなわち角膜の透明性が良好で隅角の状態が確認でき周辺虹彩前癒着が少ない症例では、眼圧上昇の機序としてステロイド緑内障の関与が強く疑われるため、トラベクトトミーが非常に良い適応となる。部分的な周辺虹彩前癒着が存在していても癒着期間が短い場合、もしくは面状ではなく線状に癒着をきたしている場合であれば隅角癒着解離術とトラベクトトミーの併用が可能である。しかし、実際には前述の条件を満たさないときには、他の難治続発緑内障の場合と同様にマイトマイシンC併用トラベクトトミーが必要となる症例が多い。マイトマイシンC併用トラベクトトミーの成功率は30~70%(経過観察期間1~5年)と報告によりさまざまであるが、角膜再移植例、無水晶体眼、周辺虹彩前癒着による閉塞隅角を認

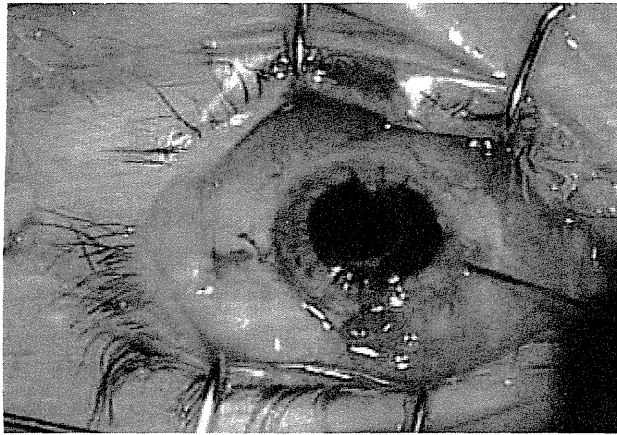


図7 全層角膜移植術後眼に対するマイトマイシンC併用線維柱帯切除術

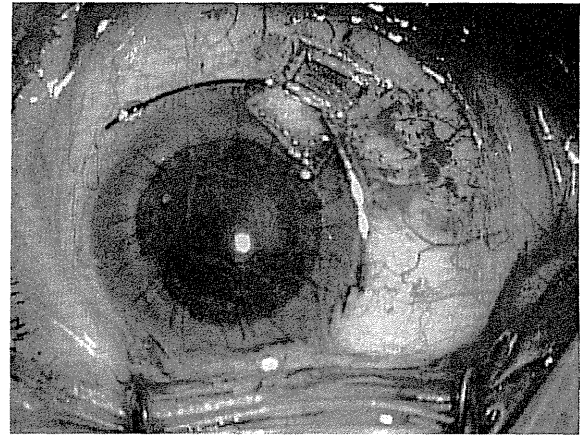


図8 全層角膜移植術後眼に対する線維柱帯切開術(下鼻側アプローチ)

める症例では眼圧コントロール成績が低下する¹⁾。また、5-フルオロウラシル (5-FU) の併用は角膜移植片における上皮障害と創傷治癒の遅延が懸念されるため、一般的には角膜移植後には禁忌とされる。さらに眼表面も同時に障害されている化学外傷や Stevens-Johnson 症候群、眼類天疱瘡など眼表面疾患を有する症例では、濾過胞作製部位の結膜も障害されていることからマイトマイシンC併用トラベクトミー自体が施行困難となるため、シャント手術の適応と考えられる。しかし、Molteno implants や Ahmed implants などのドレーナージデバイス移植は、デバイス先端の角膜内皮への慢性的接触が発生するために、内皮脱落や移植片の拒絶反応などの合併症が多いのが難点である。毛様体扁平部から硝子体腔にデバイスの先を挿入する方法は角膜内皮への影響を最小化できるが、必ず硝子体手術を併用する必要があるため、角膜混濁による眼底透視性の程度が硝子体手術の可否を決める条件となる。眼内内視鏡を用いた硝子体手術も盛んに行われるようになっており、角膜混濁があっても硝子体手術の制限にはならなくなっている。

以上のような観血的手術療法によっても眼圧コントロールが得られない症例には、最終手段としての毛様体破壊術を考慮せざるをえない。Nd-YAG レーザーや半導体レーザーを用いた経強膜毛様体レーザー光凝固術が最も一般的であるが、眼内炎症が遷延したような症例では毛様体突起の位置自体が大幅にずれている場合もあるた

めに術後の眼圧予測がむずかしいだけでなく、惹起された炎症による移植片拒絶反応、低眼圧、視力低下、眼球癆などの合併症がある。

近年、これらの合併症を予防し過剰凝固を抑制するために、眼内内視鏡を用いて直視下に毛様体突起部のみを選択的に光凝固する手法や毛様体扁平部凝固など、種々の新しい手法が開発されてきている。

まとめ

角膜移植に伴う緑内障では、通常の緑内障検査を正確に行うことができないために、その診断が困難であり、発見や治療が遅れることが多い。しかし、緑内障の眼圧コントロールが角膜移植の治療成績にも影響することから、眼圧上昇時の抗緑内障点眼薬による角膜上皮障害には十分に注意して診察する必要がある。さらに眼表面炎症の抑制や角膜移植片の拒絶予防の目的で長期にわたりステロイドや免疫抑制薬を使用する例も多いため、ステロイド緑内障の発症のみならずトラベクトミー後の濾過胞感染にも十分な注意が必要である。

昨今、眼表面の再建方法が向上し、角膜移植や羊膜移植の適応疾患は広がりつつある。これに伴い眼表面全体に再建術を行っているような難症例に対する続発緑内障の治療も増加してきている。このような症例に対する治療として、現状のマイトマイシンC併用トラベクトミーでは限界がある。羊膜移植併用トラベクトミ

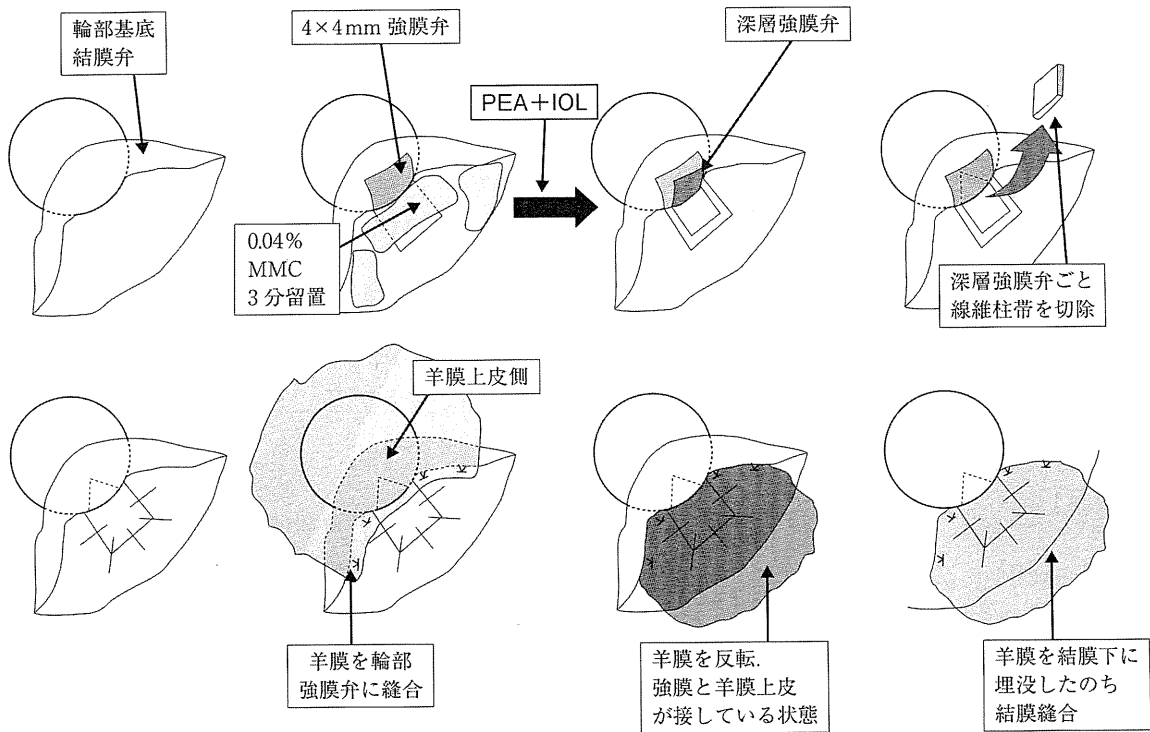


図9 羊膜移植併用トラベクレクトミー

— (図9) は濾過胞の形成，強化に有効であるが，長期成績についてはまだ不明である⁵⁾。今後は眼表面状態に左右されない新しい眼圧測定法や緑内障手術の開発が待ち望まれる。

文 献

- 1) Lee PP, McDonnell PJ : Penetrating keratoplasty and glaucoma. *Principles and Practice of Ophthalmology*, 2nd ed (ed by Albert DM, Jakobiec FA), Chapter 219, p2860-2873, Saunders, Philadelphia, 2000
- 2) 荒木やよい, 森 和彦, 成瀬繁太ほか : 角膜移植後緑内障に対する緑内障手術成績の検討. *眼科手術* **19** : 229-232, 2006

- 3) Mermoud A, Heuer DK : Glaucoma associated with trauma. Chemical burns. *The Glaucomas. Clinical Science*, 2nd ed (ed by Ritch R, Shields MB, Krupin T), Chapter 59, p1271-1275, Mosby, St Louis, 1996
- 4) Green K, Paterson CA, Siddiqui A : Ocular blood flow after experimental alkali burns and prostaglandin administration. *Arch Ophthalmol* **103** : 569-571, 1985
- 5) 樋野景子, 森 和彦, 外園千恵ほか : 羊膜移植併用線維柱帯切除術を施行した薬剤性偽眼類天疱瘡の1例. *日眼会誌* **110** : 312-317, 2006
- 6) 森 和彦 : 角膜移植と緑内障. *眼科プラクティス11 緑内障診療の進めかた* (根木 昭編), p70-71, 文光堂, 2006



The Variation In Transparency Of Amniotic Membrane Used In Ocular Surface Regeneration

Che J Connon, James Douth, Bo Chen, et al.

Br J Ophthalmol published online March 19, 2009

doi: 10.1136/bjo.2008.153064

Updated information and services can be found at:
<http://bjo.bmj.com/content/early/2009/03/19/bjo.2008.153064>

These include:

- | | |
|-------------------------------|--|
| P<P | Published online March 19, 2009 in advance of the print journal. |
| Email alerting service | Receive free email alerts when new articles cite this article. Sign up in the box at the top right corner of the online article. |

Notes

Advance online articles have been peer reviewed and accepted for publication but have not yet appeared in the paper journal (edited, typeset versions may be posted when available prior to final publication). Advance online articles are citable and establish publication priority; they are indexed by PubMed from initial publication. Citations to Advance online articles must include the digital object identifier (DOIs) and date of initial publication.

To order reprints of this article go to:
<http://bjo.bmj.com/cgi/reprintform>

To subscribe to *British Journal of Ophthalmology* go to:
<http://bjo.bmj.com/subscriptions>

The Variation In Transparency Of Amniotic Membrane Used In
Ocular Surface Regeneration

C.J. Connon¹, J. Douth², B. Chen¹, A. Hopkinson³, J.S. Mehta⁴, T. Nakamura⁵,
S. Kinoshita⁵ and K.M. Meek².

¹ Dr Che John Connon (corresponding author)

School of Pharmacy, University of Reading, United Kingdom.

c.j.connon@reading.ac.uk

² School of Optometry & Vision Sciences, Cardiff University, UK

³ Division of Ophthalmology & Visual Sciences, Queens Medical Centre,
Nottingham, UK

⁴ Singapore National Eye Centre, Singapore

⁵ Department of Ophthalmology, Kyoto Prefectural University of Medicine, Japan

Keywords: amnion, transparency, collagen, refraction, cornea

Abstract

Background/aims: Scant consideration has been given to the variation in structure of human amniotic membrane (AM) at source or to the significance such differences might have on its clinical transparency. Therefore, we applied our experience of quantifying corneal transparency to AM.

Methods: Following elective caesarean, AM from areas of the fetal sac distal and proximal (i.e. adjacent) to the placenta was compared to freeze-dried AM. The transmission of light through the AM samples was quantified spectrophotometrically, also measured were tissue thickness by light microscopy and refractive index by refractometry.

Results: Freeze-dried and freeze-thawed AM samples distal and proximal to the placenta differed significantly in thickness, percent transmission of visible light and refractive index. The thinnest tissue (freeze-dried AM) had the highest transmission spectra. The thickest tissue (freeze-thawed AM proximal to the placenta) had the highest refractive index. Using the direct summation of fields method to predict transparency from an equivalent thickness of corneal tissue, AM was found to be up to 85% as transparent as human cornea.

Conclusion: When preparing AM for ocular surface reconstruction within the visual field, consideration should be given to its original location from within the fetal sac and its method of preservation, as either can influence corneal transparency.