4.3 賃金上昇率と株価

これらの関係は，金利と賃金上昇率の関係のように単純ではなく，期間によって変化する．株価は今後の企業収益を取り込んで決まり，賃金は現状の景気や企業収益を反映して決まるので，短期的には両者の間に強い関係はない．一方，長期的にみれば経済動向という共通の要因が働くために強い相関が生じる．表 3 の下側には，データに見られる期間によって異なる関係を示した．月次変化は無関係に見えるが，サイクルと 1 年，5 年と長くすると明確な関係があわられている．よって，両者の関係を一つの固定的な期間で考えると評価や戦略の誤りに繋がる．両者の関係には期間構造を想定する必要があり，その取扱いには何らかのモデル化が求められる．

本稿では，このような関係にある変数を記述するシンプルなモデルとして，共和分過程を考える．具体的には，人的資本と株価の共和分から個人の最適ポートフォリオ問題を分析した Benzoni et al.[1] のモデルを修正して用いる．それによって，賃金上昇率と株価の相関の期間構造が得られるので，株価に対する賃金変化の感応度（株価 β）も時点に応じたものとして計算できる．近い時点の給付の株価 β は小さいが，遠い将来のそれは大きい．

株価を経済状態を表わす変数と考え，賃金に独自の変動は市場で評価されていないとすると，β と株式のリスクプレミアムから，負債キャッシュフローの時価を算出することができる．モデルを用いることによって，リスク，時価，ヘッジポジション，割引率が全て整合的に評価できる．

以下では，株式と賃金上昇率の共和分過程モデルを概説した後，GPIF の想定に当てはめて株価感応度や対応するリスクプレミアム（割引率）を計算する．なお，本節では議論を簡単にするために，金利は動かないとする．

4.3.1 評価モデル

Benzoni et al.[1] のモデルのうち，必要な部分について説明する．彼らのモデルは，連続過程にて表現されている．同モデルでは株式の配当過程が幾何ブラウン運動，

$$\frac{dD}{D} = g_D dt + \sigma dz_3 \tag{10}$$

に従うとする．対数配当過程 $\hat{d}$ は，伊藤のレンマより，

$$d\hat{d}(t) = \left(g_D - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz_3 \tag{11}$$

である．

金融資産の評価に適用する確率的割引ファクター $\Lambda(t)$ は，一定の金利 r と一定のリスクの市場価格 λ によって，$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = -rdt - \lambda dz_3$ と変動していると仮定する．t 期における株価 $P(t)$ は，

$$P(t) = \frac{1}{\Lambda(t)} E_t \left[\int_t^\infty ds \Lambda(s) D(s)\right] = \frac{D(t)}{r + \lambda\sigma - g_D} \tag{12}$$

と求められる．この経済では配当利回り ξ は一定 $\xi = r + \lambda\sigma - g_D$ となり，配当過程は所与なので，株価も配当に等しい動学となる．

$$\frac{dP}{P} = g_D dt + \sigma dz_3 \tag{13}$$

このモデルでは配当のボラティリティは株価のボラティリティが等しくなっており，前者が大幅に小さい現実とは異なる．ボラティリティの違いを表現するには，配当がスムージングされている効

果をモデル化するなどの対応が可能であるが（Lucas and Zeldes[7]），ここでの分析に影響するのは株価のボラティリティだけであるので，モデルを複雑にすることはしない．ここで株式の収益過程 $S(t)$ を考えると，

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{dP(t)+D(t)dt}{P(t)} = (r+\lambda\sigma)dt + \sigma dz_3 = \mu dt + \sigma dz_3 \tag{14}$$

であり，ドリフトは $\mu = r + \lambda\sigma$ となる．

t 期の賃金の対数を $l(t)$ とする．これは同時点の配当の変化との相関は低いが，共和分になっていると仮定する．その差を y とする．

$$y(t) = l(t) - \hat{d}(t) - \bar{ld} \tag{15}$$

$\bar{ld}$ は長期的な賃金と配当の比の対数である．一般性を失うことなく $s(0) = \bar{ld} + \hat{d}(0)$ とする[9]．共和分を捉えるため，$y(t)$ が独自変動も持つ中心回帰過程であるとする．

$$dy(t) = -\kappa y(t)dt + \nu_1 dz_1 - \nu_3 dz_3 \tag{16}$$

以上より，対数賃金は $l(t) = y(t) + \hat{d}(t) + \bar{ld}$ であるので，その変動過程が，

$$dl(t) = \left(-\kappa y(t) + g_D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \nu_1 dz_1 + (\sigma - \nu_3)dz_3 \tag{17}$$

となる．$\sigma - \nu_3$ から賃金と株式市場の同時点の相関 $\mathrm{corr}(ds, dl) = \frac{\sigma-\nu_3}{\sqrt{\nu_1^2+(\sigma-\nu_3)^2}}$ が生じるが，それが 0 であっても共和分によって長期的には賃金は株式と同じ方向への動きになる．

以上が Benzoni et al.[1] のモデルであるが，以下では離散的な時点で表現する．t 期の賃金上昇率を $l_t = l(t) - l(t-1)$ とする．この時，t 期のキャッシュフローのギャップ $L(t)e^{\sum_{s=1}^t l_s}$ の評価は，以下のようになる．l_t の累積が正規分布をすることは分かっているので，その累積値の期待値を $g_L t$，変動は分散を $\nu_L^2 t$ として，分散を 1 に基準化した期待値からの乖離を確率変数 $z_L(t)$ で表わす．また，株式の収益過程の t 期までの期待値からの乖離を同様に $z_3(t)$ とすると，0 期における評価は，

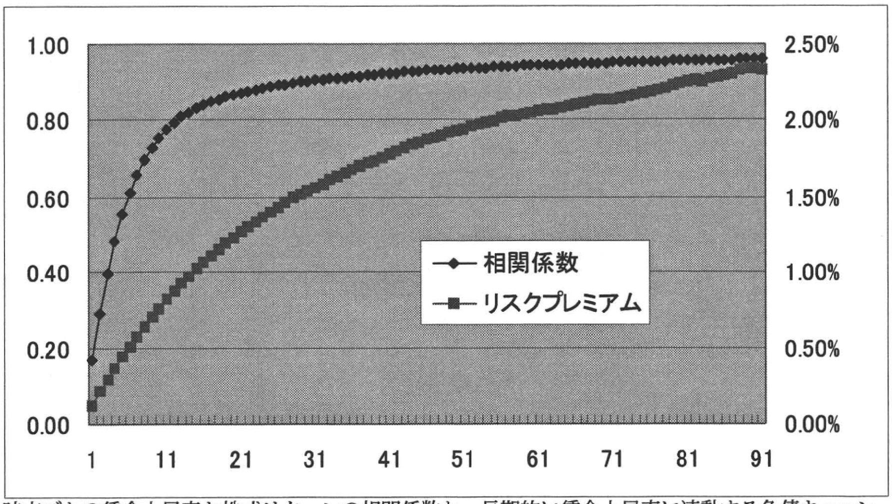
$$\begin{aligned} E_0\left[\Lambda(t)L(t)e^{\sum_{s=1}^t l_s}\right] &= E_0\left[\Lambda(0)e^{(-r-\frac{\lambda^2}{2})t-\lambda\sqrt{t}z_3(t)}L(t)e^{g_L t+\nu_L\sqrt{t}z_L(t)}\right] \\ &= L(t)e^{(g_L-r-\frac{\lambda^2}{2})t+\frac{\mathrm{var}(\nu_L\sqrt{t}z_L(t)-\lambda\sqrt{t}z_3(t))}{2}} \\ &= \bar{L}(t)e^{-rt-\nu_L\lambda\mathrm{corr}(z_L(t),z_3(t))t} \end{aligned} \tag{18}$$

となる．$\mathrm{var}(\cdot)$ は分散を示す．ここで $\bar{L}(t)$ は t 期のキャッシュフローギャップの期待値であり，$\bar{L}(t) = L(t)e^{(g_L+\frac{\nu_L^2}{2})t}$ である．$rt + \nu_L\lambda\mathrm{corr}(z_L(t), z_3(t))t$ が割引率であり，年率のリスクプレミアムは $\nu_L\lambda\mathrm{corr}(z_L(t), z_3(t))$ となる．

$z_3(t)$ は株式収益過程の変動部分であり，配当過程の変動部分でもある．よって，$\mathrm{var}(s(t)) = \sigma^2 t$ なので，

$$\mathrm{corr}(z_L(t), z_3(t)) = \frac{\mathrm{cov}(\sum_{s=1}^t l_s, s(t))}{\nu_L\sigma t} \tag{19}$$

[9] $t = 0$ で賃金水準が配当との均衡値にあるとすると $y(0) = 0$ だから，この設定は $\bar{ld} = \log\frac{S(0)}{D(0)}$ で $e^{l(0)} = S(0)$ としたことになる．注目するのは賃金成長率だから水準の自由度はある．



時点ごとの賃金上昇率と株式リターンの相関係数と，長期的に賃金上昇率に連動する負債キャッシュフローのリスクプレミアム．

図 3: 賃金上昇率の株価との相関及びリスクプレミアム

であるか[10]，リスクプレミアムは，

$$\nu_L \lambda \mathrm{corr}(z_L(t), z_3(t)) = \frac{\lambda}{\sigma t}\mathrm{cov}\left(\sum_{s=1}^{t} l_s, s(t)\right) = \sigma\lambda\frac{\mathrm{cov}\left(\sum_{s=1}^{t} l_s, s(t)\right)}{\mathrm{var}(s(t))}$$

$$= \sigma\lambda\beta_l(t), \quad ただし, \beta_l(t) = \frac{\mathrm{cov}\left(\sum_{s=1}^{t} l_s, s(t)\right)}{\mathrm{var}(s(t))} \tag{20}$$

となる．2 つめの等号は，株式収益過程のリスクプレミアムについて $\sigma\lambda = \frac{\mathrm{cov}\left(s(t), \log(\Lambda(t))\right)}{t} = \frac{\lambda}{\sigma t}\mathrm{var}(s(t))$ となることを用いている．すなわち，このモデルでは，株式収益過程に対する賃金上昇率の感応度 $\beta_l(t)$ によって価格付けができる[11]．

4.3.2 GPIF 負債の分析

ここでは，シミュレーションにより，GPIF の負債キャッシュフローの時価を求め，対応する割引率や感応度を算出する．モデルは，サイクルと 1 年とする離散化を行い，株式収益と賃金上昇のパスを発生させる．同時に，確率的割引ファクターも計算する．シミュレーションのパスは，50,000 本とした．

モデルのパラメータは，期待リターンに関しては GPIF の想定に，リスクに関しては過去データにそれぞれ合わせることとする．GPIF の平成 20 年業務概況書によれば資産の期待リターンは，株式 4.8%，短期資産 2%であり，2009 年検証ではポートフォリオの運用利回り 4.1%，賃金上昇率 2.5%とされている．リスクに関しては過去データを目標とするが，賃金上昇率のリスクの大きさには期間構造が観察され，全てをモデル表現することは困難である．重要なのは，株式変動に対する感応度であるから，1 年及び 5 年の感応度を合わせることとする．具体的にパラメータは，

[10] cov(·, ·) は共分散を示す．

[11] さらに CAPM に似た線形の表現も可能である．ただし，連続複利で表わされる関係であり，t 期までを 1 期間とした単利による線形表現はできない．

r	$\sigma\lambda$	κ	g_D	σ	ν_1	ν_3
0.0198	0.0271	0.07	0.0473	0.22	0.058	0.21

とした[12]．この結果，期待リターンはGPIFの想定と等しくなり，1年及び5年の株価変動に対する賃金上昇率の感応度は0.045と0.163とほぼ過去データに揃う．将来の掛金と給付のギャップは，平成16年度の財政再計算で示されたもののうち，平成23年以降の部分を用いる．

結果は，積立金105.1兆円に対して負債時価は110.7兆円（積立率94.9%），株価感応度は0.59，割引率は3.97%，リスクプレミアムは1.97%となった．期間別の株式リターンとの相関及びリスクプレミアムは図3のとおりである．GPIFの予定利率はここで求めた割引率よりも高くなっており，そのために積立不足となっている．ただし，その差異は際立ったものではない．

一方で，長期的に考えると負債の株式リターン感応度が約6割もあるというのは，実際の株式保有比率との違いが目立つ点である．しかし，ここでの分析は金利の変動を無視している．前節で確認したように，賃金上昇率と強い相関を持って動くものは，金利である．株式は，賃金変動のうち金利で追いきれない部分を補う役割に留まるはずである．

従って，本節の分析は限定的なものであり，より強い主張のためには金利変動も考慮した分析が望まれる．その結果，最小リスクポートフォリオにおける株式の保有は，6割よりは大幅に小さくなるだろう．また，割引率に含むべきリスクプレミアムの水準も変わり，GPIFの想定とは大幅に変わるかもしれない．これらは今後の課題といたしたい．

5 期待賃金上昇率と基本ポートフォリオ

これまで，積立金運用のキャッシュフローの変動を抑えるヘッジ機能を議論してきたが，ここではヘッジと同時にリスクプレミアムの獲得を目指すことを考える．現実的に積立率は100%ではなく，その差異は資産運用の利回りを調整して埋合わすことが行われている．すなわち，必要に応じてリスクプレミアムを狙うことになる．ただし，その時の基本ポートフォリオのリスクテイクは，要求される運用利回りと整合的でなければならない．ここでは，長期的な利回りに注目した簡単なモデルによって，将来想定される賃金上昇率と基本ポートフォリオのリスクテイクの関係を明らかにする．

5.1 利回りのモデルと最適ポートフォリオ

利回りとは，収益率の長期的な平均値と想定されるものを呼ぶことにする．そのため，期間構造はなく一つの値となる．ここでは，債券，株式，負債の利回りを期待賃金上昇率 $\hat{l}$ を用いた簡単な1ファクターモデルによって表現する．それぞれの利回りを R_B, r_s, R とすれば，

$$R_B = a + b\hat{l} + e_B \tag{21}$$

$$r_s = \alpha + \beta\hat{l} + e_s \tag{22}$$

$$R = \delta + \hat{l} \tag{23}$$

である．e_B, e_s は平均ゼロの誤差項であり，分散はそれぞれ σ_B^2, σ_s^2，簡単化のため相関はゼロとする．また負債に関する δ は本来は負債時価評価から導かれる期待収益率であるが，以下では厚生労働省の財政検証に従って運用の際のハードル・レートである対賃金上昇率に対する「実質的な利回

[12] g_D は評価に影響しないので，実績を用いた．GPIF の想定（2.5%）に合わせても結果は変わらない．

り」と解釈する[13]．具体的には 1.6%である．また負債における賃金上昇率の係数は，当然に 1 である．

ファクター・モデルを想定することによって，例えば債券の対賃金上昇率に対する実質利回りは，$E[R_B - \hat{l}] = a + (b-1)E[\hat{l}]$ となり，$b=1$ でない限り賃金上昇率に依存し，一定ではなくなり，この特性が事実であらばこの特性を取り込むことが可能となる[14]．これが長所である．株式の期待収益率に関しても同様である．

目的関数としては，10 年程度の期間を想定してその間の余剰リターン SR に関する期待効用を用いる．すなわち，債券への投資比率を w として，

$$SR = wR_B + (1-w)r_S - R \tag{24}$$

で余剰リターンを定義し，その期待効用最大化を，

$$\max_{w} \quad E[SR] - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(SR) \tag{25}$$

とする．γ は相対的危険回避度である．ここでは負債価値に等しい積立金を保有していると想定して記述しているが，例えば積立金価値が不足している場合には (24) の R の係数を 1 より大きくする必要がある[15]．

以上より，簡単な計算から最大化の必要条件としての最適債券保有比率 w^* は，

$$w^* = \frac{a - \alpha + (b-\beta)E[\hat{l}]}{\gamma\{(b-\beta)^2\sigma_l^2 + \sigma_B^2 + \sigma_s^2\}} + \frac{(1-\beta)(b-\beta)\sigma_l^2 + \sigma_s^2}{(b-\beta)^2\sigma_l^2 + \sigma_B^2 + \sigma_s^2} \tag{26}$$

となる．σ_l^2 は $\hat{l}$ の分散である．

右辺第 2 項が最小分散ポートフォリオ（以下では，MVP と記す）を与える債券保有割合である．以下では現実に近いパラメータを設定して分析するが，公的年金積立の運用において γ は相当に大きいと想定されるので，まずこの最小分散ポートフォリオに注目し，それから最適ポートフォリオに言及する．

5.2 パラメータ設定と計算結果

モデルのパラメータは，データから実証結果を踏まえて設定する．(21) の係数は回帰分析によって推計し，$a = 0.022, b = 0.6, \sigma_B = 0.04$ としている．ただし，回帰分析で推計された a は 0.031 と得られたが，財政検証では「賃金上昇率 2.5%の場合で債券利回りを 3.7%と想定」しているのでそれに会うように 0.022 と調整している．さらに誤差項の標準偏差はそもそも債券利回りでではなく債券収益率の標準偏差から導出しているので過大に推計されている可能性がある．このように債券に関しては多少不利な方向にパラメータ設定されている．

(22) に関しては短期データでは株式のインフレヘッジ機能が推計されにくいことを考慮して，配当込み株価水準 S の対数値と賃金水準 W の対数値と，タイムトレンド項からなる $\log(S) = \alpha t + \beta \log W$ を推計し，そこから $\alpha = 0.02, \beta = 1.2$ として推計している[16]．この推計式は共和分関係にあるのでその推計値は見せ掛けではないことがわかる．また $\sigma_s = 0.25$ は株式収益率のボラティリティーから推計している．

[13]ただし，負債の期待成長率は最適ポートフォリオに影響しない．

[14]これは，3.2 節で「期間構造のない予想」として議論した管理基準であるが，利回りを直接モデル化しているために，デュレーションは現われない．

[15]この目的関数は δ を資産負債のバッファー項として定式化し，確率変数と見做してそれからなる期待効用の最大化問題と同値である．

[16](22) に従えば，賃金上昇率が 2.5%の場合には株式の期待収益率は 5%となる．

表 4: 賃金上昇率と最適債券保有割合

賃金	最適ポートフォリオ		最小分散ポートフォリオ	
上昇率	債券比率	実質的な利回り	債券比率	実質的な利回り
-0.5	101	2.5	97.3	2.4
0	99	2.2	97.3	2.2
0.5	97	2.0	97.3	2.0
1	94	1.8	97.3	1.8
1.5	92	1.7	97.3	1.6
2	90	1.5	97.3	1.4
2.5	87	1.4	97.3	1.2
3	85	1.2	97.3	1.0
4	80	1.0	97.3	0.7
5	76	0.9	97.3	0.3

単位は全て%.

以上の設定の下で MVP を求めると，そこでの債券保有比率は 97.3%とほぼ全額債券保有となる．また MVP における実質的な利回り（ポートフォリオ期待収益率－賃金上昇率）を賃金上昇率が 2.5%の標準想定下で計算すると 1.2%となり 1.6 % を確保することは出来ない．その時には，多少なりとも株式を追加保有する必要が出てくる．そこで次に，最適ポートフォリオ (26) を計算する．

結果は表 4 のとおりである．表 4 には与えられた賃金上昇率の下での (26) で与えられる最適な債券保有比率，その下での実質的な利回りが記されている．そこでは $\gamma = 2$ としている．表からわかるように賃金上昇率が低いケースでは債券保有比率が極めて高く，賃金上昇率が高まるにつれて株式保有割合が高まることがわかる．実証的な数値例からわかるように賃金上昇率が低い状況では債券の期待収益率の方が株式の期待収益率より相対的に有利であり，株式を組み込んでもリスクを高めるだけだからである．従って株式を保有するメリットは少ないのである．しかし，賃金上昇率が高い場合には異なる．リスクを負担してでもそれを追いかける必要があるのでそのケースでは債券では不可能となり，株式を組み込む必要性が高まる．

実質的な利回りに注目すると，賃金上昇率が高まるに従って低くなる．賃金上昇率が 2.5%ではなく 1.5%程度であれば，等しいリスク回避度であっても期待値レベルで 1.6%の確保は可能である．ただし，実質的な利回りには当然リスクもあるので確実に得られるわけではない点に注意する必要があろう．当然ながら賃金上昇率が高まり株式の保有比率が高まるとそのリスクも高くなる．

本節では，ファクター・モデルによって賃金上昇率，債券利回り，期待株式投資収益率間に単純ではあるが一定格差ではない関係がある場合における最適なポートフォリオの導出を試みた．これを考慮すると，保守的なリスク回避度の下では，賃金上昇率が財政検証時に想定した 2.5%の下では実質的な利回り 1.6%を確保することが平均的にも難しくなり，高々1.4%程度となることが推計される．逆に現在のように低賃金上昇率の下ではより高い実質的な利回りが得られることもわかった．

賃金上昇率へのヘッジ資産の考え方は，ここでも重要である．どの資産が適当なヘッジ資産になるかに関しての基準は賃金上昇率との相関の高さのみではない．ここでの定式化からわかるようにファクター・モデルに定式化した場合，その傾き（ファクターの係数の大きさ）が重要である．加

えて切片の大きさも重要である．この２要素が重要であり，その結果，ヘッジ役割も一様ではなくなる．係数から見ると株式の方が圧倒的に有利であるが切片では債券と大差ないので低賃金上昇率の下では債券に比して使い勝手が悪い．さらに相関が低い（リスクが高い）のでこれは全領域で抑制要因となる．しかし，賃金上昇率がハイパーインフレ的になった場合にはヘッジリスクを覚悟で使わざるを得なくなるのである．おそらくインフレ連動債を検討の対象とすれば，それが賃金上昇率との相関も高いと仮定した上でそれは全領域で有効なヘッジ機能を果たすと期待される．

6 結語

公的年金の積立金の運用政策は，未だ議論は多く，標準的な手法の定まっていない課題である．もし，完全に摩擦のない証券市場であるならば，運用は，負債の時価を求めてそれに連動するように行うことで年金の支払を確保できる．同時に，リスク選好に応じてリスクプレミアムを狙うことも可能である．しかし一方で，そうした市場があれば，これらは個人で可能であるから，積立金にも運用にも何の役割もない．

現実の市場は当然に摩擦が存在する．さらに負債の時価を得るために，現実的には，経済変数に関する取扱いを定めた管理方法が必要であり，最適ポートフォリオは管理方法に依存して定まる．従って，積立金運用及びその管理方法が重要となる．もし，公的年金キャッシュフローの主要な変動要因である賃金上昇率リスクのヘッジが求められず，割引率と負債のリスクが整合性がないような不適切な管理方法をとれば意思決定が歪み，非効率な戦略が採られてしまう．

そこで，本稿では数種の管理方法を整理し，複数の視点から実証を行って検討した．予想賃金上昇率が期待される利回りと等しく動くとの想定の下では GPIF の管理方法は正当化されるが，データからは現実との乖離が確認された．よって，管理方法に改善の余地があるといえる．ただし，改善するための実務的な管理コストの大きさや，現実に可能な金融契約が限られていることを勘案すれば，GPIF の管理方法は効率的なのかもしれない．また，賃金上昇率と利回りが完全には連動しないモデルを用いると，期待賃金上昇率がリスクテイクに影響を与え，それが低い環境ではリスクテイクが少なくなることがわかった．

本稿ではこのように複数のアプローチによる実証を行ったが，こうした検討に望まれるのはそれらを統合した分析である．ただし，分析はより複雑となるため，今後の課題といたしたい．

参考文献

[1] Luca Benzoni, Pierre Collin-Dufresne, and Robert S. Goldstein. Portfolio choice over the life-cycle when the stock and labor markets are cointegrated. *Journal of Finance*, Vol. 62, No. 5, pp. 2123–2167, 2007.

[2] David Blake. *Pension Finance*. Wiley, 2006.

[3] John Geanakoplos and Stephen P. Zeldes. The market value of accrued social security benefits. Working paper, 2007.

[4] Jeremy Gold. Accounting/actuarial bias enables equity investment by defined benefit pension plans. Pension Research Council Working Paper, 5 2000.

[5] Dennis E. Logue and Jack S. Rader. 年金学入門. 金融財政事情研究会, 2000. 刈屋武昭 監訳 年金工学研究会 訳.

[6] Deborah J. Lucas and Stephen P. Zeldes. How should public pension invests? *American Economic Review*, Vol. 99, No. 2, pp. 527–532, 2009.

[7] Deborah Lucas and Stephen P. Zeldes. Valuing and hedging defined benefit pension plan obligations — the role of stocks revisited. Working paper, 2006.

[8] Alicia H. Munnell and Mauricio Soto. State and local pensions are diffrent from private plans. Center for Retirement Research at Boston College, 2007.

[9] 盛山和夫. 年金問題の正しい考え方. 中公新書, 2007.

[10] 浅野幸弘. 公的年金運用の再構築—株式投資の意義を考える—. 証券アナリストジャーナル, Vol. 47, No. 11, pp. 86–92, 2009.

[11] 浅野幸弘. 公的年金の基本ポートフォリオ—賃金上昇率を目標とする運用—. MPT フォーラム, 4 2010.

[12] 米澤康博. 公的年金・企業年金と年金資金運用. 宮島洋, 西村周三, 京極高宣（編）, 財政と所得保障. 東京大学出版会, 2010.

[13] 本多俊毅. 公的年金における資産・負債管理と積立金運用. 現代ファイナンス, No. 26, pp. 25–47, 9 2009.

信用リスクを考慮した株式アクティブ運用

―マクロ経済効果を考慮したデフォルト確率の期間構造推定―

森平　爽一郎

早稲田大学大学院ファイナンス研究科

2011年3月6日

はじめに

公的年金における株式のアクティブ運用の基本は、リスク・リターンの均衡からの乖離を見つけ出すことによりアルファを得ようとする戦略である。

従来、株式運用における信用リスクは分散可能な非組織的危険（Unsystematic Risk）とみなされ、公的年金のように多数の銘柄に分散投資をしている場合、ポートフォリオレベルでの信用リスクはすでに最小化されているという暗黙の了解があった。従って、東証上場企業の様な流動性の高い銘柄に対しては、残るリスクは価格変動リスクのみであると考えても良かった。しかし、リーマンショックに端を発した世界金融危機は、一国経済のみならず、世界経済全体に影響をあたえる組織的リスクに転嫁したことにより、分散投資による信用リスクヘッジ戦略の限界が明らかになった。

本稿では、組織的危険としての信用リスクを、公的年金運用においてどのように測定し、管理していくか、そのための方策を提唱する。具体的には、上場株式の信用リスク、とりわけデフォルト（倒産）リスクの高い銘柄を、事前にポートフォリオから除外することにより、下方リスクをヘッジしようとする。より積極的には、信用リスクの高い銘柄やそのバスケットを空売りすることにより、リターンを高めるような、具体的なモデルを提唱する。

つまり、個別銘柄のデフォルトリスクを、1）個別企業の財務諸表、2）マクロ経済要因、3）株価、のそれぞれにインプライドされた情報を統合することにより推定された、デフォルト確率の期間構造を、株式ポートフォリオの運用成果を高めるためにどのようもちいることができるかを考える。本年度の研究では過去の研究成果の要約を行い、その上で新しいモデルの概略をしめし、簡単な実証研究結果を示めすことにする。

本稿の構成は以下のとおりである。第1章において、マクロ経済効果を考慮したデフォルト確率の期間構造推定に関するこれまでの文献のサーベーを行う。また、デフォルト確率推定のためのもうひとつの代表的な方法である構造モデルと統計モデルとを統合し、デフォルト距離を取り込んだ所謂ハイブリッドアプローチに対する最近の研究成果のサーベ

ーを行う。第２章において、マクロ経済効果を取り込んだデフォルト確率期間構造推定のための統計的なモデルの幾つかの類型を検討する。第３章では、構造モデルによるデフォルト確率推定のための必要になる「デフォルト距離」の推定方法に関して説明をする。第４章では、統計モデルと構造モデルのハイブリッドモデルについて説明をする。第 5 章では、予備的な実証分析の結果を報告する。

1. 文献展望

1.1 マクロ経済ファクターを取り込んだデフォルト確率の期間構造推定

組織的危険としての信用リスクを考えるために、上場企業のデフォルトに影響を与えるリスクファクターとして時間と共に変動するマクロ経済要因と産業ファクターをデフォルト確率推定モデルに取り込む必要がある。従来よく用いられてきた１期間（年）のデフォルト確率推定モデルでは、マクロ経済要因がすべての企業について同一の値をとるためマクロ要因を取り込む事ができない。そのため、マクロ経済要因を取り込むためには多期間のデフォルト確率、つまりデフォルト確率の期間構造を推定できるようなモデルが必要になる。さらに、マクロ経済要因は、企業の財務諸表データとともに、四半期、半年次、年次といったように離散時点でしか観察できないことを考えると、連続型でなく離散型の生存分析を適用する必要がある。

この目的のために用いる離散型の生存分析は、Allison[1982]によって初めて明らかにされ、時間的な離散データを主に取り扱う計量社会学(Yamaguchi[1991])、政治学(Box-Steffensmeier and Bradford[2004]第 5 章)や教育学(Singer and Willet[1993])、経済学(Jenkins[1995])などにおけるさまざまな理論と応用研究が成されてきた。

デフォルト分析では、Shumway[2001]が、これらの研究とは全く別に同じ統計モデルを用いた分析を行っているが、マクロ経済変数を取り込んだ分析は行われていない。主に連続型の生存分析(Cox の連続型比例ハザード分析)を用いたデフォルト分析に関する展望論文としては大日向[2005]や森平[2000]が詳しいが、離散型生存分析によるデフォルト確率推定の試みに関しては、欧州や米国企業を対象にした多くの分析が行われている。その中でマクロ経済変数を考慮したものに、Bhattacharjee ほか[2004]、Bonfim[2009]、Carling ほか[2007]、Castro[2008]などがある。Bhattacharjee ほか[2004]は英米の企業のデフォルトと吸収の競合リスク問題を取り扱い、Cox の連続型の比例ハザードモデルを用いデフォルト確率と吸収確率の期間構造を推定した。いずれの場合もマクロ経済の状態とリスクを表す変数が有意であった。Bonfim[2009]は 1996 から 2002 年までのポルトガルの特定銀行の融資データを用い、離散型の比例ハザードモデルを推定している。１から４個のマクロ経済変数を取り入れることにより疑似決定係数が有意に増加した。Carling ほか[2007]は 1994 年から 2000 年までの 58 万社のスエーデン企業向け融資に対し四半期財務とマクロ経済データを用いた推定を行っている。2 期ラグ付きの産出ギャップ、2 期ラグ付きの家計支出の一階差、超短期のイールドカーブ差を取り込むことにより疑似決定係数の増

加を見た。これらのマクロ変数と基底ハザード確率がともに有意であることは、Bonfim[2009] と異なる。Castro[2008]は 94 年から 05 年までのスペインの非上場企業 13 万社を対象にした分析を行っている。実質の GDP 成長率、産出ギャップ、短期の預金金利などのマクロ変数が有意であった。マクロ変数とともに 2 次の基底デフォルト確率期間構造を当てはめ有意な結果を得ている。

1.2 デフォルト確率推定のオプションアプローチ

他方、企業資産が負債価値以下になる確率、すなわち債務超過確率をもってして企業のデフォルト確率を株価とそのボラティリティから推計しようとする試みが行われてきた。これは、構造アプローチあるいはオプションと呼ばれるデフォルト確率の推定方法である

企業のバランスシートの負債と資本が、左側の企業資産に関するオプションであることを初めて明らかにし、それらが均衡オプション価格決定モデルによって評価出来ることを、初めて明らかにしたのは、Black and Scholes[1973]である。Merton[1974]は、Black and Scholes[1973]にもとづき、株式を企業資産に関するユーロピアン・コールオプション、負債(割引債)をプットオプションとして、その均衡評価式を導出し、債務超過の可能性がある場合の割引債の利回りが、信用リスクプレミアムを考慮して決定されることを示した。Merton[1974]が導いた割引債利回りは、明らかにデフォルト(債務超過)確率の関数であるが、市場で観察される社債の利回りから、逆にデフォルト確率を推定する可能性については、触れられていない。

オプション価格決定モデルを用い、債務超過確率としてのデフォルト確率を求めるという考え方は、Scott[1981]により、初めて提案された。彼は、そのための具体的な方法を示したわけではないが、ブラック＝ショールズ・モデルは、企業が割引債を発行していることを仮定しているのに対し、実際の企業はクーポン債を発行しており、ブラック＝ショールズ・モデルを用いた倒産確率の推定には、問題があることを指摘している。彼はまた、ブラック＝ショールズ・モデルに代わり、Schwartz[1977]モデルに依拠し、数値解法をよって、デフォルト確率を推計すべきことを提案している。また、デフォルト距離とデフォルト確率の考え方を明らかにしたことも注目すべき点である。

負債と株式が企業資産に関するオプションであるという認識をせずに、債務超過確率を、実際の株式価格から推計しようとした初めての試みが、銀行に対しては Marcus and Shaked[1984a]、生命保険会社に対しては Shaked[1985] によって行われた。Shaked[1985]は 1979 年と 80 年における 31 の米国証券市場に上場している生保のデフォルト確率を推定している。推定デフォルト確率は、非常に小さいが、その分布の歪度が大きいことを示した。ただし、デフォルト確率推定式には、若干の誤りがあるため、過小推定の可能性がある[1]。

[1] 債務超過確率の計算にあたり、本来は式(5)の第三番目の式を用いるべきであるが、分子の第 2 項において $\sigma_A^2/2$ が考慮されていないため、過小推定の可能性がある。

また、Merton[1974]の研究を、信用リスクを考慮した融資保証や預金保険の料率を実際に推定するさまざまな試みが行われたMerton[1977]は、その最初の理論的な研究であり、Marcus and Shaked[1984b]、Ronn and Verma[1989]などは、実際に観察可能な銀行の株式時価総額、負債価値、株式投資収益率のボラティリティから、未知の資産価値、資産価値成長率のボラティリティ、預金保険価値を推定するための具体的な方法を示した。池尾[1990]、小田[1998]は、日本の銀行に対する預金保険料率推定事例である。この計算の過程で、容易にデフォルト確率を推定出来ること明らかであるが、研究の主眼はあるべき預金保険料率を推定することであり、デフォルト確率推定の試みは行われていない。

森平[1997,1998a,1998b,2000a,2000b,2000e], 斉藤・森平[1997], 森平・斉藤[2000]、森平・森[2001]は、こうした研究と同様な方法で、企業や銀行のデフォルト確率を、オプション価格決定理論の枠組みを用いて推定出来ることを示し、森平・斉藤[1997,2000]においてすべての上場銀行の株価情報から、銀行の債務超過確率を推定した。三好[1998]、阿竹[1998]も日本企業の債務超過確率を同様な方法により推定している。

デフォルト確率をオプションアプローチによって推定しようとする試みは、Kealhofer[2003a]等よって広範に行われたことによって有名になった。

深尾ほか「2000」では、森平[1997]で提案された方法に従って、銀行（大手銀行16社と地方銀行27社）についての債務超過確率を計算し、それと幾つかの財務比率、実質的な自己資本比率、不良債権比率、経常収支比率、との関係、とりわけ、実質的自己資本比率との関係をクロスセクション回帰分析により調べている。ここで、実質的な自己資本比率とは、簿価表示の自己資本から、不良債権引当額と税効果会計の影響を差し引き計算されたものを総資本で割った物として定義されている。オプションアプローチによって計算された債務超過確率とこれらの比率との回帰分析を行い、実質自己資本比率が、マイナスの有意な関係を持つことを明らかにした。また、回帰式を推定するために用いられた銀行を含むより後半な銀行の財務比率を、推定式の右辺に代入することにより、回帰モデルによる債務超過確率の推定を行い、破たん銀行の債務超過確率は健全な銀行に比べて高いことを示している。

須田・竹原[2008]は、オプションアプローチによって推定されたデフォルト確率を推定し、それと会計発生高、社債の信用スプレッドとのあいだの関係についての実証分析を行なっている。推定結果は、推定デフォル確率と会計発生高にあいだには正の関係があり、両者の関係が高い企業ほど、社債の信用スプレッドが高いことが確かめられている。

そのほか不動産ファイナンスの適用として、小林[20006]が日本の上場 REIT を、Patel and Vlamis[2006]が、1980から001年までの112の英国の上場不動産会社のデフォルト確率を同様なアプローチで推定して、高いデフォルト予測力を有していることを示した。またソブリンリスク、つまり、国のデフォルト確率を、オプションアプローチによって推定しようとした試みが、Karmann[2000,2004]やKeller, Kunzel, and Souto[2007]がトルコ

について、Gray and Jones[2006]がインドネシアを対象にして行っている。

1.3 離散的生存分析と構造分析の統合：ハイブリッドアプローチ

最近、上に述べたデフォルト確率推定の 2 つのアプローチを統合しようとする注目すべき試みがある。離散的な生存分析は、パネルデータを用いた定性的な従属変数モデルとみなすことが出来る（森平［2009］第 5 章および第 5 章付録)。また、構造モデルによる債務超過確率は、資産価値成長率が正規分布するとすれば、デフォルト距離の標準正規分布関数変換によって求めることができる。従って、定性的な従属変数モデルにおける説明変数の一つを時間と共に変化するデフォルト距離と考えれば、構造モデルと離散型生存分析を統合することが可能である。

こうしたアプローチの最初の試みが、Chan-Lau、Jobert. and Kong[2004] により、発展途上国の銀行のデフォルト（格付けが CCC 以下になる）確率を推定するために用いられた。彼らはデフォルト以前にさかのぼる 3,6,12 ヶ月のデフォルト距離を説明変数と考えロジットならびにプロビット回帰モデルを適用した。パネルデータを用いた場合の誤差項の系列相関を考慮した一般化最小二乗法を適用している[2]。デフォルトに先立つ 3、9 ヶ月前のデフォルト距離がデフォルト確率を推定するに当たり有意であったことが確かめられている。

2. マクロ経済変数を考慮したデフォルト確率の期間構造推定モデル

2.1 1 期間モデル

伝統的な 1 期間デフォルト確率推定モデルは、ロジット回帰を用いた場合、i 番目の企業について次のような形をとる。

$$PD_i(1)=\frac{1}{1+\exp\{-\overline{z}_i(1)\}} \qquad \overline{z}_i(1)\equiv\alpha_0+\sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{i,k}(0) \quad for\ i=0,1,\cdots,N \tag{1}$$

---

[2] モデルはパネルデータを用いたため、

$\Pr\left(y_{i,t}=1\right)=g\left(\overline{z}_{i,t}\right)$ $\tilde{z}_{i,t}=a_0+a_1 DD_{i,t-s}+\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ $s=3,9,12$ 月の形をとる。ここで誤差項 $\tilde{\varepsilon}_{i,t}$ に関し一階の系列相関を考えている。ただしここで、$y_{i,t}$ は i 番目の企業が t 期にデフォルトしていれば 1、そうでなければゼロを取る指示関数、$DD_{i,t-s}$ は $t-s$ 期のデフォルト距離 $\tilde{z}_{i,t}$ は信用リスク度を表す。

ここで、$PD_i(1)$は現在時点(t=0)から見て、i番目の企業の 1 期(通常は 1 年)先の推定デフォルト確率、$\mathbf{x}'_i(0)=\left(x_{i,1}(0),x_{i,2}(0),\cdots,x_{i,K}(0)\right)'$は$i$番目の企業の現在時点$(t=0)$における属性を示す行ベクトル、$\boldsymbol{\beta}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_K\right)$は推定係数の列ベクトル、$\alpha_0$は推定された定数項(スカラー)を示す。従って、$\overline{z}_i(0)$は観察可能な企業属性の線形結合としての「期待信用リスク度」と解釈できる。このモデルは現在と将来の 1 時点を結ぶ 1 期間モデルである。

2.2 マクロ経済ファクターを含む、デフォルト確率期間構造モデル

これに対し、時間と共に変わりうるL個のマクロ経済変数から成る列ベクトル$\mathbf{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_L(t)\right)$を考慮した、任意の時点$(t\geq 1)$におけるデフォルト確率、デフォルト確率の期間構造推定モデルは、次のように成る。

$$\left.\begin{aligned} PD_i(t+1)&=\frac{1}{1+\exp\left\{-\overline{z}_i(t+1)\right\}} \\ \overline{z}_i(t+1)&\equiv\alpha_0(t)+\sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{i,k}(t)+\sum_{l=1}^{L}\beta_{f,l}F_l(t) \end{aligned}\right\} \quad for \quad \begin{array}{c} t=0,1,\cdots,T,\ and \\ i=0,1,\cdots,N \end{array} \tag{2}$$

個別企業の属性、多くの場合は財務諸表およびそれから計算された財務比率である説明変数ベクトル$\mathbf{x}'_i(t)$と定数項$\alpha_0(t)$が時間に依存して変化しうることに注意する必要がある。ここで、$\boldsymbol{\beta}_f=\left(\beta_{f,1},\beta_{f,2},\cdots\beta_{f,L}\right)$はマクロ経済変数の感応度(列)ベクトルを示している。式(2)のマクロ変数は時間と共に変わりうるが、その性質上、企業を示す添字iには依存しない。従って、マクロ経済変数は、すべての企業に対し$\boldsymbol{\beta}_f$の感応度で等しく影響を与える組織的危険を表すと解釈できる。また、式(2)の左辺の$PD_i(t+1)$は、企業iがt期まで生存していて、次の 1 期間にデフォルトする確率、フォワード生存確率、条件付きデフォルト確率を表し、離散時間でのデフォルト強度(Default intensity)を表す。

2.3 観察されない(不確実な)異質性を考慮したデフォルト確率期間構造推定モデル：

個別企業におけるデフォルト確率の期間構造に影響を与えるが、直接観察されない異質性が不確実である場合のモデルも考えることができる。個別企業要因(異質性)$\tilde{\varepsilon}_i$が平均ゼロ、

分散σ^2すると仮定すると、i番目の企業のデフォルト確率の期間構造は、次のようにして推定できる。σは推定すべきパラメータである。もし推定された$\hat{\sigma}$が統計的に有意でなければ、デフォルト確率の期間構造に不確実性は存在しないと結論づけることができる。

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}D_i(t+1) &= \frac{1}{1+\exp\{-\tilde{z}_i(t+1)\}} \\ \tilde{z}_i(t+1) &\equiv \alpha_0(t) + \sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{i,k}(t) + \sum_{l=1}^{L}\beta_{f,l}F_l(t) + \sigma\tilde{\varepsilon}_i \\ \tilde{\varepsilon}_i &\sim N(0,1) \end{aligned}\right\} \quad for \begin{array}{l} t=0,1,\cdots,T,\ and \\ i=t=0,1,\cdots,N \end{array} \tag{3}$$

異質性が不確実であるため、企業の信用度を表す指数$\tilde{z}_i(t)$も不確実であり、その結果、デフォルト確率の期間構造も不確実な振る舞いをする。このモデルは、強度モデルの観点からするならば、離散的なCoxモデルとみなすことができる。

3. 構造モデルによるデフォルト確率推定

Black and Scholes[1973]は、企業の株主は企業資産に関するヨーロピアン・コールオプションを、そして企業の債権者（割引債保有者）が企業資産を原資産とするプットオプションを保有していることを明らかにした。およびMerton[1974]はこの考え方をさらに推し進めて、企業資産価値が対数正規分布に従うと仮定したときに、信用リスクにさらされている割引債の利回りとリスクフリーな割引国債の利回りとの差である信用スプレッドがどのように決定されるかを導いた。

3.1 リスク中立世界におけるデフォルト確率

こうした考え方の副産物として、企業が債務超過に陥る確率としてのデフォルト確率を求めることができる。いまt期のリスク中立世界における資産価値A_tが幾何ブラウン運動に従うと仮定できるとすれば、

$$\frac{d\tilde{A}_t}{A_t} = r_F dt + \sigma_A d\tilde{W}_t \tag{4}$$

T期間後の資産価値が、企業にとっての支払い義務を表す満期割引債の額面以下になる確率、すなわち、債務超過確率としてのT期間後デフォルト確率$PD^{Q}(T)$は、次のようにして求めることができる。

現在の資産価値をA_0とおくと、将来T期における資産価値A_Tは、上の確率微分方程式(4)を解く事により、

$$\tilde{A}_T = A_0 \exp\left(\left(r_F - \frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}\right)T + \sigma_A \tilde{\varepsilon}\sqrt{T}\right)$$

となる。ここで$\tilde{\varepsilon}$は平均ゼロ、分散 1 の正規分布をするので、その指数変換である将来の資産価値$\tilde{A}_T$は対数正規分布する。さらに上の式の両辺の対数をとると、

$$\ln \tilde{A}_T = \ln A_0 + \left(r_F - \frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}\right)T + \sigma_A \tilde{\varepsilon}\sqrt{T}$$

となるので、将来 T 期における資産の対数値は、平均$\ln A_0 + \left(r_F - \frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}\right)T$、標準偏差$\sigma_A\sqrt{T}$の正規分布をする事がわかる。これより、現在の資産価値がA_0である時のデフォルト確率、つまり将来時点の資産の市場価値が負債価値を下回る確率、あるいは、債務超過になる確率は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
PD^{\mathbf{Q}}(T) &= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{A}_T < D_T \middle| A_0\right) = \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\ln \tilde{A}_T < \ln D_T \middle| \ln A_0\right) \\
&= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\ln A_0 + \left(r_F - \frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}\right)T + \sigma_A \tilde{\varepsilon}\sqrt{T} < \ln D_T\right) \\
&= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{\varepsilon} < -\frac{\ln\left(\frac{A_0}{D_T}\right) + \left(r_F - \frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \\
&= N\left(-d_2^{\mathbf{Q}}\right) = 1 - N\left(d_2^{\mathbf{Q}}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

と計算できる。ここで、$N(\cdot)$は正規分布の分布関数を表す。また、ここで、

$$d_2^{\mathbf{Q}} \equiv \frac{\ln A_0 - \ln D_T + (r_F - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \tag{6}$$

は、T 年後の対数表示の企業資産価値の期待値と対数表示の負債額との差を、T 年後の資産収益率の標準偏差で基準化したものであり、デフォルト距離（DD: Default Distance）と呼ばれる。

従って、$N(\cdot)$が括弧内の要素の短調増加関数であることに注意すると、次の点を確かめることができる。つまり、企業のデフォルト確率は、1）現在の資産価値が上昇し、2）リスクフリーレートが増加すると減少し、3）満期の負債価値が増加し、4）資産価値成

長率のボラティリティが増加し、5）負債満期が増加することにより、増加することが分かる。

一般に、式(5)によってデフォルト確率を推計するためには、現在の資産価値 A_0 と、資産価値成長率のボラティリティ σ_A の二つが未知パラメータである。適切な方法によって、この二つの未知パラメータを推定することができる。2 つの未知数の値を決定するためには、少なくとも 2 つの方程式が必要になる。通常、企業資産価値と株価を結びつける式としてブラック＝ショールズ式

$$
\begin{aligned}
E_0 &= A_0 N\left(d_1^Q\right) - e^{-r_F T} D_T N\left(d_2^Q\right) \\
d_1^Q &\equiv \frac{\ln\left(A_0/D_T\right) - \left(r_F - \sigma_A^2/2\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

と、資産価値成長率のボラティリティ σ_A と株価成長率（株式投資収益率）のボラティリティ σ_E を関係付ける

$$
\begin{aligned}
\sigma_A &= \left(\frac{1}{\Omega}\right)\sigma_E \\
\text{ここで}\quad \Omega &\equiv \left(\frac{1}{N\left(d_1^P\right)}\right)\left(\frac{E_0}{A_0}\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

2 つの式を用いることにより、自己資本価値（株式時価総額）E_0 と株式投資収益率のボラティリティ σ_E から、2 つの未知数である現在の資産価値 A_0 と資産価値成長率のボラティリティ σ_A を求めることができる。ただしここで、Ω が現在時点の資産価値 A_0 が 1 パーセント増加したときに、派生資産である株価 E_0 が何パーセント増加するかをしめす、資産価値に対する株価の弾力性を表している。

3.2 実確率世界におけるデフォルト確率

しかしながら、価格決定のためでなくリスク管理目的のためには、資産価値の成長率が式(4)で示されるよう様に、リスクフリーレート r_F で成長していくことを想定することは非現実的である。信用リスクの高い企業の資産価値成長率はマイナスであることが多く、信用リスクの低い企業の資産価値はリスクフリーレート以上であると考えることのほうが自然である。

投資家が予想する資産の期待成長率 μ_A をどのようにデフォルト確率推定に織り込むことができるだろうか、デフォルト確率を推定するための式(6)のデフォルト距離は次の様に変形できることに注目しよう[3]。

---

[3] 期待収益率 μ_A μ_A μ_A を d_2^Q d_2^Q d_2^Q の右辺分子に加え、更に差し引き整理をすると、次の結果が得られる

$$
\begin{aligned}
d_2^{\mathbf{Q}} &\equiv \frac{\ln A_0 - \ln D_T + (r_F - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \\
&= d_2^{\mathbf{P}} - \left(\frac{\mu_A - r_F}{\sigma_A}\right)\sqrt{T} \equiv d_2^{\mathbf{P}} - \lambda\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる。ここで

$$
\lambda \equiv \frac{\mu_A - r_F}{\sigma_A} \tag{10}
$$

は資産に関するシャープ尺度、すなわち、1 期間$(T=1)$の企業資産に関する超過期待リターンとその標準偏差で示されるリスクとの比であり、資産の期待成長率を織り込んだデフォルト距離、いいかえれば、実確率世界のもとにおけるデフォルト距離は

$$
d_2^{\mathbf{P}} \equiv \frac{\ln\left(\dfrac{A_0}{D_T}\right) + \left(\mu_A - \dfrac{\sigma_A{}^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \tag{11}
$$

と定義され、企業資産に関する確率微分方程式のドリフト項をリスクフリーレートr_Fから資産の期待成長率μ_Aに置き換えた

$$
\frac{d\tilde{A}_t}{A_t} = \mu_A dt + \sigma_A d\tilde{W}_t \tag{12}
$$

時のデフォルト距離$d_2^{\mathbf{P}}$に相当する。従って、実確率世界における債務超過確率としてのデフォルト確率$PD^{\mathbf{P}}(T)$は、式(6)におけるリスクフリーレートr_Fを資産成長率の期待値μ_Aに置き換えることによって、

$$
\begin{aligned}
PD^{\mathbf{P}}(T) &= \Pr(A_T^{\mathbf{P}} < D_T) = 1 - N(d_2^{\mathbf{P}}) = N(-d_2^{\mathbf{P}}) \\
&= N\left(-\frac{\ln(A_0/D_T) + (\mu_A - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となるであろう。

シャープ尺度λは、通常、正の値をとるので$d_2^{\mathbf{Q}} < d_2^{\mathbf{P}}$、したがって、$-d_2^{\mathbf{Q}} > -d_2^{\mathbf{P}}$となる。

$$
\begin{aligned}
d_2^{\mathbf{Q}} &\equiv \frac{\ln(A_0/D_T) + (r_F - \sigma^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = \frac{\ln(A_0/D_T) + (r_F - \mu_A + \mu_A - \sigma^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \\
&= \frac{\ln(A_0/D_T) + (\mu_A - \sigma^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}} + \frac{(r_F - \mu_A)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = d_2^{\mathbf{P}} - \left(\frac{\mu_A - r_F}{\sigma_A}\right)\sqrt{T} \equiv d_2^{\mathbf{P}} - \lambda\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

分布関数はデフォルト距離に関して単調変換なので、リスク中立世界におけるデフォルト確率は、実確率世界のもとでのデフォルト確率$N(-d_2^{\mathbf{P}})=1-N(d_2^{\mathbf{P}})$より大きな値をとる。言い換えれば、信用リスク管理のために実デフォルト確率を用いなければいけないときにリスク中立デフォルト確率を用いると、信用リスクを過大に見積もる様になる。

しかし、投資家が主観的に予想する信用リスクの高い企業の資産期待収益率μ_Aは無リスク金利より低い。その場合、シャープ尺度は負の値をとり、$d_2^{\mathbf{Q}}>d_2^{\mathbf{P}}$となり、リスク中立世界のもとにおけるデフォルト確率は、実デフォルト確率より大きな値を取り得る。どちらが正しいかは、実証結果を待つ必要があろう。

3.3　リスク回避度と資産の期待成長率を反映したデフォルト確率推定

式(13)で示された資産の期待成長率を反映したデフォルト確率推定モデルは、Bonnes[1964]のコールオプション価格決定モデルにもとづくものであり、均衡モデルに基づくものではない。これに対して、次に考えるエッシャー変換にもとづくオプション公式は、投資家が自らのリスク選好と企業資産に関する将来期待にもとづき、言い換えるならば、自らの期待効用を最大にするように、財あるいは資本市場で、保有する危険資産を交換し、再配分することにより決定される危険資産、この場合はコールオプションのあるべき均衡価格を求める。

エッシャー変換にもとづくコールオプションの均衡価格式は、

$$C_0=z\left(\mu,h,r_F,\sigma^2,T\right)A_0N\left(d_1^{\mathbf{P}}\right)-e^{-r_FT}D_TN\left(d_2^{\mathbf{P}}\right) \tag{14}$$

でしめされる。ここで、hは投資家のリスク回避度を表す。

$$d_1^{\mathbf{P}}\equiv\frac{\ln\left(\dfrac{A_0}{D_T}\right)+\left(\left(\mu_A+h\sigma_A^2\right)+\sigma_A^2\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} \tag{15}$$

かつ

$$d_2^{\mathbf{P}}\equiv\frac{\ln\left(\dfrac{A_0}{D_T}\right)+\left(\mu_A+h\sigma_A^2\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}=d_1^{\mathbf{P}}-\sigma_A\sqrt{T} \tag{16}$$

であり、右辺第1項の関数$z\left(\mu_A,h,r_F,\sigma_A^2,T\right)$は、

$$z\left(\mu_A,h,r_F,\sigma_A^2,T\right)\equiv\exp\left\{\left[\left(\mu_A-r_F\right)+\left(h+\frac{1}{2}\right)\sigma_A^2\right]T\right\}>0 \tag{17}$$

と定義される。従って、投資家の危険回避度hを反映したデフォルト距離DDは式(16)によ

って表現出来、その場合のデフォルト確率は、

$$
\begin{aligned}
PD^{\mathrm{P}}(T) &= N(-d_2^{\mathrm{P}}) \\
&= N\left(-\frac{\ln\left(A_0/D_T\right)+\left(\mu_A+h\sigma_A^2\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

によって計算できる。

均衡を仮定しない Boness[1964]によるオプション価格式にもとづく実デフォルト確率(式(13))とエッシャー変換を用いた均衡オプション価格を仮定した場合の実デフォルト確率(式(18))を比較すると、もし、$h=-1/2$ であれば、2 つの式は同じ結果をもたらす。この点が成立するかどうかは実証結果をまたなければならない。

また、原資産価格あるいはオプション価格がマルチンゲールに従う場合には、リスク回避度は次式を満たさなければならない。

$$
h^{*} = -\left(\left(\frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A{}^2}\right)+\frac{1}{2}\right) \tag{19}
$$

右辺括弧内の第 1 項は、いわゆる Merton 比率であり、資産成長率の分散で測ったリスク一単位あたりの資産超過期待リターンを表している。この場合、式(17)のエッシャー変換にもとづくコールオプション式は、ブラック＝ショールズモデルと等しくなる。

3.4 構造モデルとしての統計モデル

デフォルト確率を推定するためのもうひとつの考え方が、ロジット回帰あるいはプロビット回帰モデルなどのいわゆる定性的 (0,1) 従属変数をもつ回帰分析手法を適用する方法である。しかし、こうした統計的方法は、構造モデルであるとみなすことも可能である。この点を次に明らかにし、統計モデルと第 2.1 節でのべた構造モデルを統合し、ハイブリッドモデルを導出することが可能であることを示そう。

われわれが観察できるのは、1) 過去において企業が倒産したか否か、2) 倒産・非倒産企業の財務あるいはそのほかの属性である。

直接は観察できないが、企業のデフォルト・非デフォルトに影響を与える i 番目の企業の信用リスク度をしめす指標 $\tilde{Z}_i$ を考えよう。この信用リスク指標は、直接は観察できないが、それに影響をあたえる、1) 観察可能な企業のさまざまなリスクファクターと、2) 信用リスク指標の不確実性に影響を与えるランダムな誤差項によって説明できるとしよう。便宜的に、信用リスク指標と K 個のリスクファクター、誤差項 $\tilde{\varepsilon}_i$ との間の関係に関し線形性を仮定すると、

$$
\tilde{Z}_i = b_1 X_{1,i} + b_2 X_{2,i} + \cdots + b_K X_{K,i} + \tilde{\varepsilon}_i \tag{20}
$$

と表すことができよう。この式は定数項のない線形式になっていることに注意するととも