

## 5 統計学的観点からのモデル比較

ここまで、「低下」型、「シフト」型それぞれの死亡モデルに関する定義や数値評価に関する議論を行ってきた。本節においてはこれらを踏まえ、高齢死亡率改善を死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのかという問いに定量的な回答を与えることを目的として、「低下」型モデルと「シフト」型モデルの両者のパフォーマンスを統計学的観点から比較することとする。「低下」型モデルで最もあてはまりがよかったのは LC モデル、「シフト」型モデルでは LD モデルであったことから、この 2 モデルを用いて比較・検討を行うこととする。ここでは、以下のようなアプローチによりこの比較を行う。

1. 真の死亡率がモデルによって推定された率であると仮定する。
2. 死亡数は二項分布  $B(N_{x,t_c}, p_{x,t_c})$  に従うものとする。ただし、 $N_{x,t_c}$ 、 $p_{x,t_c}$  は、 $x$  歳、暦年  $t_c$  における人口及び死亡率を表す。
3.  $N_{x,t_c}$  は、死亡リスクに曝される生存述べ年数  $E_{x,t}$  に最も近い整数により近似する。

ここで、我々のフレームワークにおいては、日本女性人口の  $N_{x,t_c}$  が非常に大きい値であり、通常信頼区間の算定で用いられるような危険率では多くの実績値が信頼区間の外に出て、有効な比較とならない可能性があることに注意が必要である。このような理由から、ここでは、信頼区間の算定にあたって、0.01% という極めて低い危険率を設定することとした。

図 18、19 は対数死亡率の実績値 (“actual”で示されたもの) 及びその (100 - 0.01)% 信頼区間 (“upper”と“lower”で示されたもの) と、LC モデルによる対数死亡率との差を見たものである。一方、図 20、21 は同じ図を LD モデルについて観察したものである。まず、これらの図からわかることは、50 歳以下の若年層と 90 歳以上の高齢層では、信頼区間の幅が極めて広いことである。これは、若年層では死亡率が低いこと、高齢層では人口規模が小さいことによっている。したがって、これらの間にある 50~90 歳の近辺の年齢層について観察することに意味が大きいといえるだろう。

このような観点から両者を比較してみると、LC モデルについては、80 歳近辺において、多くの実績値が信頼区間の外に出てしまっている。一方、LD モデルについては実績値が外に出ている数はより少ない。したがって、この結果からは LD モデルの方のパフォーマンスが優れているのではないかと示唆される。

これをより明確に見るため、図 22 に、各年齢について対数死亡率の実績値が信頼区間の外側に出る割合を示した。これによれば、高い年齢で LD モデルの方が割合が高い部分は若干あるものの、総じて LD モデルのパフォーマンスが LC モデルをかなり上回っていると見ることができるだろう。この両モデルの比較の結果は、わが国の近年の高齢死亡率

改善について、「低下」よりは「シフト」と捉える見方の方がより強く支持されることを示唆しているものと見ることができる。

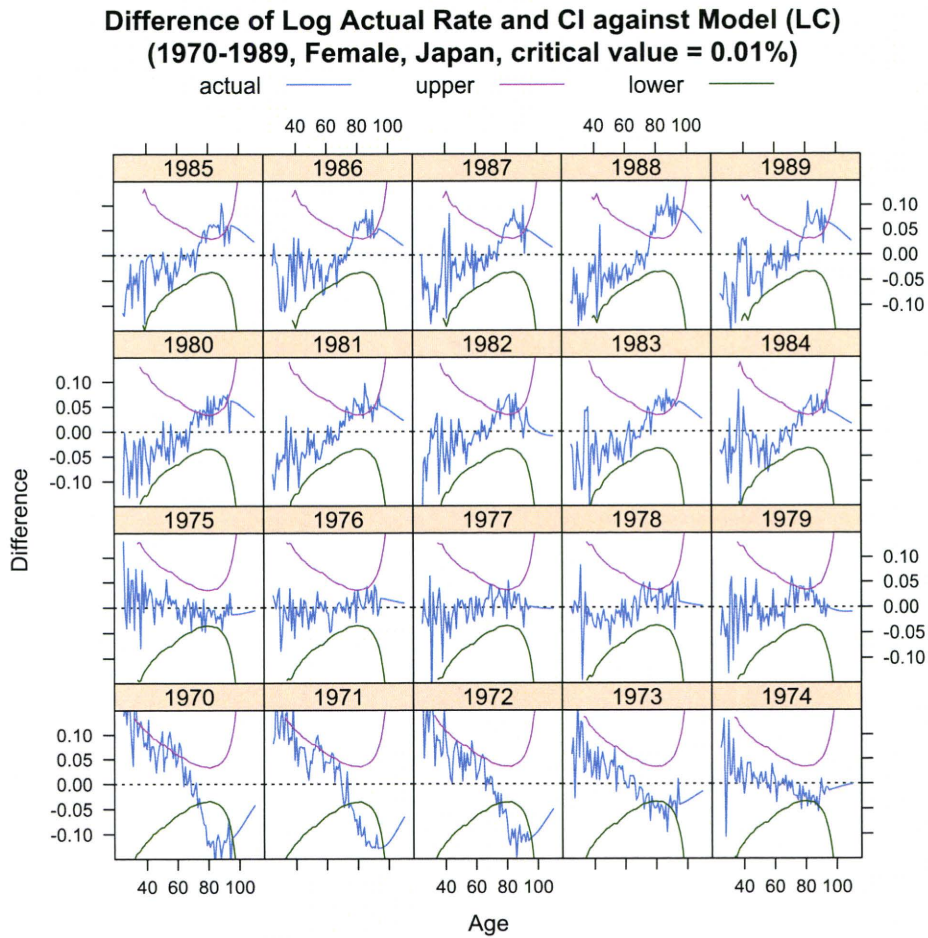


図 18 Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LC) (1970-1989, Female, Japan, critical value = 0.01%)

**Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LC)  
(1990-, Female, Japan, critical value = 0.01%)**

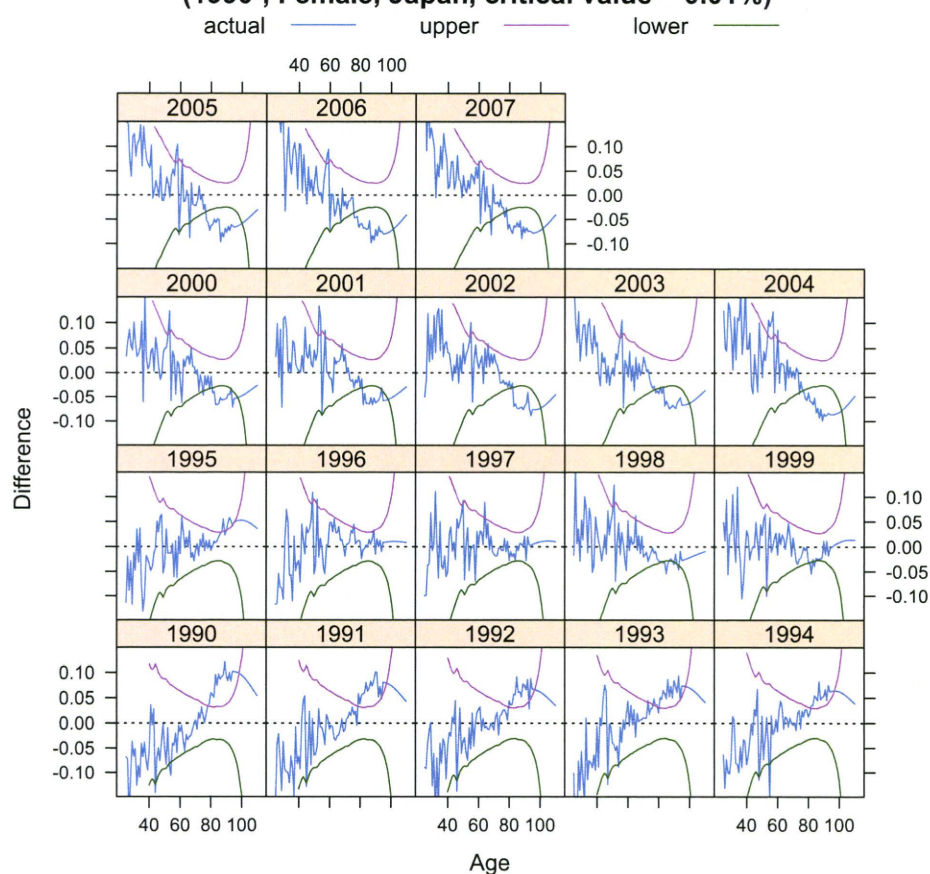
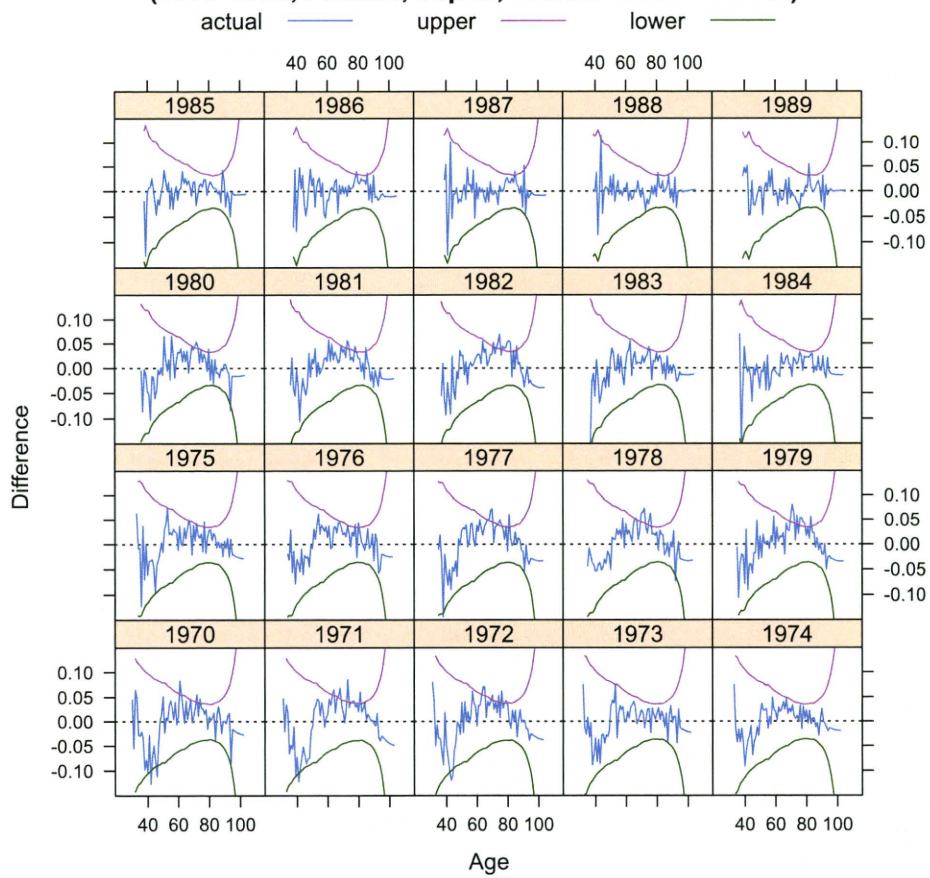


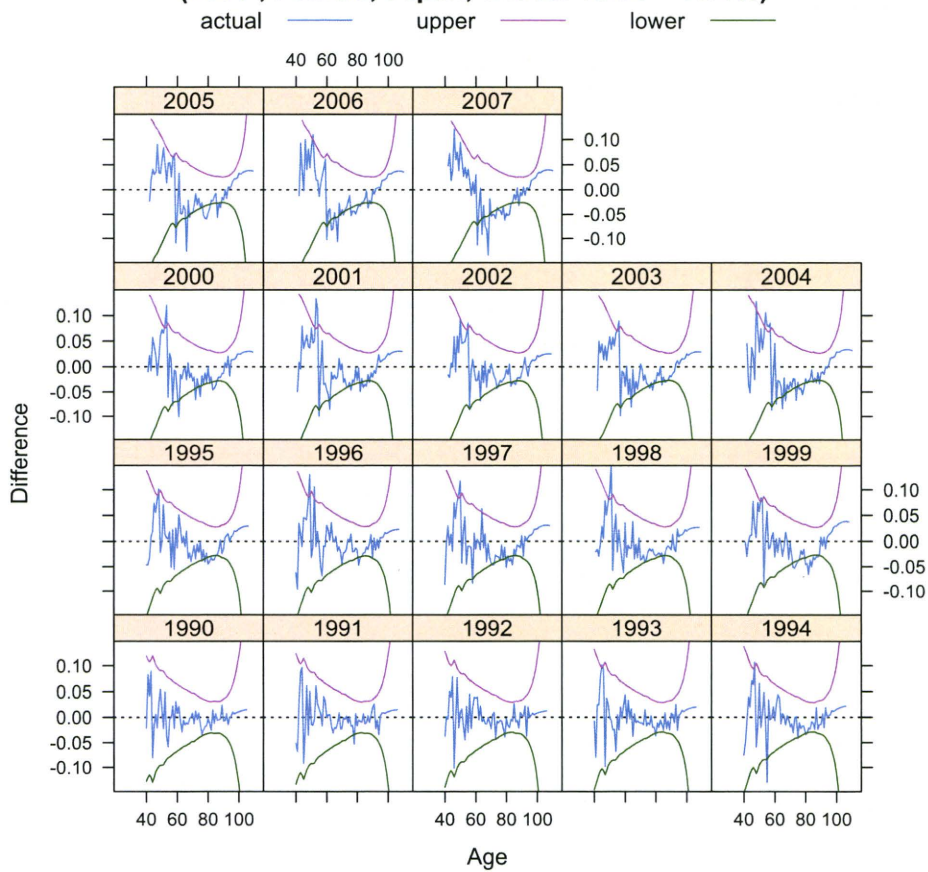
図 19 Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LC) (1990-, Female, Japan, critical value = 0.01%)

**Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LD)**  
**(1970-1989, Female, Japan, critical value = 0.01%)**

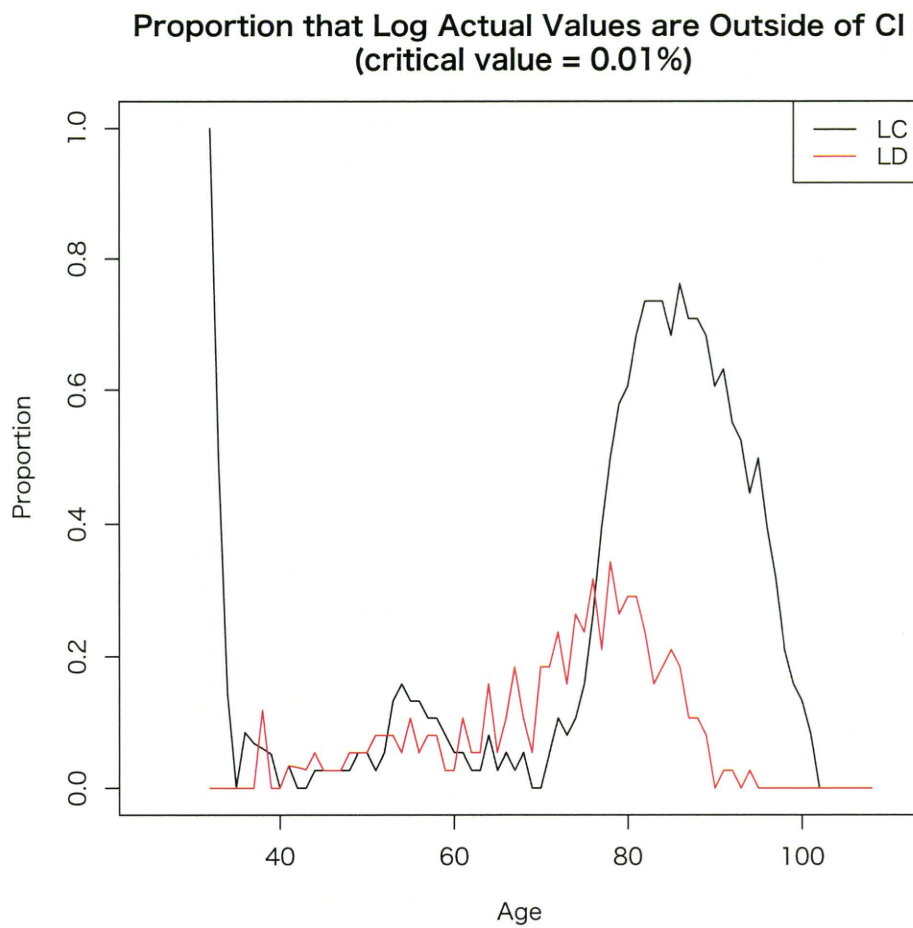


☒ 20 Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LD) (1970-1989, Female, Japan, critical value = 0.01%)

**Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LD)  
(1990-, Female, Japan, critical value = 0.01%)**



☒ 21 Difference of Log Actual Rate and CI against Model (LD) (1990-, Female, Japan, critical value = 0.01%)



☒ 22 Proportion that Log Actual Values are Outside of CI (critical value = 0.01%)

## 6 微分型表示と年齢変換の関係

第1節において、対数死亡率曲面上  $S$  で関数  $\rho_{x,t}$  と  $\tau_{y,t}$  を定義し、死亡モデルの微分型表示に用いた。ところで、これらの関数  $\rho_{x,t}$ 、 $\tau_{y,t}$  を用いたベクトル

$$\rho(x_0, t_0, y_0) = (0, 1, -\rho_{x_0, t_0})$$

$$\tau(x_0, t_0, y_0) = (\tau_{y_0, t_0}, 1, 0)$$

は、 $S$  の接ベクトルになる。そして、 $S$  の各点にこの接ベクトルを対応させることにより、 $S$  上に2種類の滑らかな接ベクトル場を定義することができる。

昨年度の研究において、年齢変換を定義する一つの方法として、等変換年齢図 (iso-transformed age map) を用いた。一般に、接ベクトル場の積分曲線を X-T 平面に射影することにより、等変換年齢図を誘導することができる。したがって、これに対応する年齢変換を定義することができる。 $\rho$  によって誘導される年齢変換は恒等変換であり、 $\tau$  によって誘導される年齢変換は、対数死力関数の値が同じ年齢を同一視する年齢変換である。 $S$  上に別の接ベクトル場を定義すれば、これに対応する等年齢変換図が誘導され、対応する年齢変換が定義されることになる。このように、 $S$  上に接ベクトル場を定義することは、年齢変換を定義する一方法として捉えることができる。

次に、石井 (2008) における年齢シフトモデルにおいて用いられた年齢変換と、LD モデルを表す接ベクトル場から誘導された年齢変換との関係について考察する。両者は、ともに年齢シフト量と勾配に対応するパラメータを持つという共通点があるものの、そのパラメータの表すものは同じではない。

LD モデルは、 $\tau_{y,t_c}$  の実績値の観察を通して経験的に見いだされた、「 $\tau_{y,t_c}$  が各  $t$  において  $y$  の線形関数として表される」という仮定に基づいていた。この仮定は、Gompertz モデルでは成立するが、ロジスティックモデルでは一般に成立しない。2パラメータロジスティックモデルにおいては、この代わりとして以下の命題が成立する。

**命題 1.** 2パラメータロジスティックモデル

$$y = \lambda_{x,t} = \log \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)} = \log \alpha_t + \beta_t x - \log(1 + \alpha_t \exp(\beta_t x))$$

において、 $\tau_{y,t}$  は各  $t$  において  $x$  の線形関数である。すなわち、

$$\tau_{y,t} = k'_t + c'_t x$$

が成立する。

Proof.

$$e^y = \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_t \exp(\beta_t x) = \frac{e^y}{1 - e^y}$$

$y$  を固定したまま両辺を  $t$  で微分することにより、

$$\alpha'_t \exp(\beta_t x) + \alpha_t \exp(\beta_t x) \left( \beta'_t x + \beta_t \frac{\partial x}{\partial t} \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\alpha'_t}{\alpha_t \beta_t} - \frac{\beta'_t}{\beta_t} x$$

□

このように、LD モデルの前提は 2 パラメータロジスティックモデルでは  $x$  と  $y$  に線形関係がある範囲のみでしか成立しない。したがって、LD モデルによって誘導される年齢変換は、年齢シフトモデルにおいて用いられているものとは必ずしも一致しないことになる。しかしながら一方で、LD モデルによる年齢変換は、年齢シフトモデルで用いた年齢変換にはない以下のような長所がある。

年齢シフトモデルで用いられている年齢変換を行うためには、まず最初に死力曲線にロジスティックモデルをあてはめ、パラメータ推定をする必要がある。これは、年齢変換後に行うリー・カーター・モデルによるモデリングがノンパラメトリックな手続きによっているのに対し、年齢変換の中ではパラメトリックな手続きが必要であることを意味しており、一つのモデルの中に両者の手続きが混在することとなっていた。しかしながら、LD モデルによる年齢変換はノンパラメトリックな手続きであることから、モデル全体を完全にノンパラメトリックな手続きのみで構築することが可能となる。したがって、LD モデルを導入することにより、モデル内部の整合性をより高いレベルで達成することができるようになるのである。

## おわりに

本稿は、これまでとは異なる角度から、わが国の死亡率モデルに対する有効な年齢変換を定義するための基礎的な検討を行うことを目的として研究を行った。

まず、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証することを通じ、わが国の死亡データ特性に関する再検討を行った。このため、「低下」型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーションハザードモデル (PH)、リー・カーター・モデル (LC) の 2 モデルを、これら 2 つのモデルに対応する「シフト」型モデルである、水平シフトモデル (HS) と水平リー・



カーター・モデル (HL) の 2 モデルを導入し、全部で 4 つの死亡モデルを検討するとともに、これらの死亡モデルを、時間微分した関数により表示する微分型表示を導入した。

これらの死亡モデルについて、日本女性の死亡データにより数値評価を行ったところ、「低下」型モデルでは PH モデルに比べて LC モデルの、「シフト」型モデルでは HS モデルに比べて HL モデルのあてはまりがよいことが観察されたが、「低下」型のペアのあてはまりの違いほど、「シフト」型モデルのあてはまりの違いは大きくない。この差は、微分型表示の死力改善率  $\rho_{x,t_c}$  及び年齢増加率  $\tau_{y,t_c}$  を見ることにより明らかとなった。すなわち、「低下」型モデルにおける  $\rho_{x,t_c}$  の実績値はピークを持つ山形の形状をもつものに対し、HS モデルは水平な直線であり、ピークを持つことが可能な LC モデルに比べてあてはまりは悪くなる。一方、「シフト」型モデルの  $\tau_{y,t_c}$  を見ると、HS が水平な直線であるのに対し、HL モデルでもこれに比較的近い形状をしており、これが両者のフィッティングのパフォーマンスが大きく違わないことに結びついていたのである。

一方、各年の  $\tau_{y,t_c}$  の実績値の観察から、これを  $y$  の線形関数として見た場合、よりよくモデル化できるのではないかという点が示唆されたことから、これに基づいて、微分型表示を活用した線形差分モデル (LD) を提案した。日本女性データによる数値評価により、LD モデルは実績値へのあてはまりが極めてよいことが確認された。

また、「低下」型モデルと「シフト」型モデルのパフォーマンスを統計学的観点から比較するため、LC モデルと LD モデルについて、モデルを真とした場合の信頼区間から実績値がどの程度外れるのかという点について評価を行った。これによれば、高い年齢で LD モデルの方が実績値が外に出る割合が若干高い部分はあるものの、総じて LD モデルのパフォーマンスが LC モデルをかなり上回っていた。これは、わが国の近年の高齢死亡率改善について、「低下」よりは「シフト」と捉える見方の方がより強く支持されることを示唆しているものと見ることができる。

最後に、対数死亡率曲面  $S$  上の接ベクトル場として年齢変換が定義される点を論じた。死亡モデルの微分型表示等に用いられた関数  $\rho_{x,t}$  と  $\tau_{y,t}$  は、対数死亡率曲面  $S$  上の接ベクトル場を定義する。一般に、 $S$  上の接ベクトル場は等変換年齢図を誘導し、年齢変換を導くことから、対数死亡率曲面  $S$  上の接ベクトル場を定義することは、年齢変換を定義する一方法と考えることができる。LD モデルの仮定である、 $\tau_{y,t}$  の  $y$  に関する線形性は、2 パラメータロジスティックモデルでは  $x$  と  $y$  に線形関係がある範囲のみでしか成立せず、したがって、LD モデルによって誘導される年齢変換は、年齢シフトモデルにおいて用いられているものとは必ずしも一致しない。しかしながら一方で、LD モデルによる年齢変換はノンパラメトリックな手続きであることから、モデル全体を完全にノンパラメトリックに構築することが可能となる。このことから、LD モデルを導入することにより、モデル内部の整合性をより高いレベルで達成できるようになることがわかった。

本研究でその有効性が明らかとなった LD モデルであるが、実用化に向けてはまだ検討点を残すものである。まず、今回検討を行ったのは成人死亡に限定したモデルであること

から、全年齢を対象としたモデルの開発が必要である。また、今回は実績値のモデリングを中心とした検討を行ったが、将来推計を行うためにはパラメータの将来推計法についても検討が必要となる。このような点について、さらなる研究を行っていくことが今後の課題である。

## 参考文献

Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at [www.mortality.org](http://www.mortality.org) or [www.humanmortality.de](http://www.humanmortality.de).

石井太 (2008) 「近年のわが国の死亡動向に適合した 将来生命表推計モデルの研究-年齢シフトモデルの開発-」, 『人口問題研究』, 第 64 巻, 第 3 号, pp.28-44.

国立社会保障・人口問題研究所 (2007) 『日本の将来推計人口ー平成 18 年 12 月推計ー』, (財) 厚生統計協会.

Lee, R. and L. Carter (1992) “Modeling and Forecasting U.S. Mortality”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419, pp. 659-675.

## 7 対数死亡率曲面上の接ベクトル場を利用した死亡率モデルの検討

石井 太

### はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成 18 年 12 月推計）」（国立社会保障・人口問題研究所 2007）の将来生命表作成にあたっては、現在国際的に標準的な方法とされ、平成 14 年 1 月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えた「年齢シフトモデル」により死亡率の投影を行った（石井 2008）。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線をあてはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

昨年度までの研究において、この年齢シフトモデルの理論的再検討を端緒とする死亡率モデルの検討を行ってきた。近年のわが国における死亡率改善は高齢死亡率によるところが大きいが、昨年度の研究では、これを死亡率の「低下」と捉えるよりも死亡の「シフト」と捉えることにより、よりの確なモデリングが可能となることを示した。具体的には、「低下」型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーションナルハザードモデル (PH)、リー・カーター・モデル (LC) の 2 モデルを、これら 2 つのモデルに対応する「シフト」型モデルである、水平シフトモデル (HS) と水平リー・カーター・モデル (HL) の 2 モデルを導入し、全部で 4 つの死亡モデルを検討するとともに、これらの死亡モデルを、時間微分した関数により表示する微分型表示を導入した。

また、さらに、このような「シフト」という形で死亡率改善を表現する「LD モデル」を提案し、現在、標準的な死亡率推計モデルとして用いられているリー・カーター・モデルとの比較を通じてこのモデルの有効性を示した。具体的には、「低下」型モデルと「シフト」型モデルのパフォーマンスを統計学的観点から比較するため、LC モデルと LD モデルについて、モデルを真とした場合の信頼区間から実績値がどの程度外れるのかという点について評価を行い、わが国の近年の高齢死亡率改善について、「低下」よりは「シフト」と捉える見方がより強く支持されることを示唆しているとの結果を得た。

このように有効性が明らかとなった LD モデルであるが、これは成人死亡率のみを表現するモデルであり、そのまま全年齢の死亡率モデルとして利用することはできない。また、昨年度の研究の中で、LD モデルは年齢シフトモデルのシフト量・勾配パラメータ等を求める際の理論的基礎となっているロジスティックモデルとの整合性の観点で課題があ

ることについて触れた。

本年度の研究では、LD モデルについて、ロジスティックモデルとより整合性を高める観点からの改良を行うとともに、死亡率のモデル化にあたって、対数死亡率曲面上の接ベクトル場を利用することの有効性を示し、高齢部分に LD モデルの構造を持つ全年齢死亡率モデル構築の方法論に関して検討を行うことを目的とする。

## 1 対数死亡率曲面、対数死亡率とその逆関数について

本節では、昨年度の研究で導入した、対数死亡率曲面の 2 つの表示方法、対数死亡率とその逆関数に関し、本年度の研究で用いる部分についてまとめる。

$X = [0, +\infty)$  を年齢、 $T = (-\infty, +\infty)$  を時間を表す変数とする。以下の死亡モデリングの議論においては、年齢  $x \in X$ 、時刻  $t \in T$  における死力関数  ${}_{x,t}$  を用いる。また、

$$y = {}_{x,t} = \log {}_{x,t}$$

で死力の対数を表す。ここで、 $y \in Y = (-\infty, +\infty)$  は対数死力関数の値を表す。このとき、 $S$  を、

$$S = \{(x, t, y) | y = {}_{x,t}\}$$

とすると、これにより、 $\mathbb{R}^3$  における曲面が定義される。これを、対数死亡率曲面 (the log mortality surface) と呼ぶ。これは、対数死亡率曲面の一般的な表示方法である。この表示方法において、 $y = {}_{x,t}$  は、 $\mathbb{R}^3$  の中で、 $X$ - $T$  平面からの高さとして捉えることができる。

以下、 ${}_{x,t}$  は、 $X_0 \quad T_0 = [0, \omega] \quad [t_0, t_1] \quad X \quad T$  上で定義された、 $x$  と  $t$  に関する滑らかで連続な関数であると仮定する。ただし、 $\omega < +\infty$  は死亡率モデルを考える上でのある有限な年齢の最大値とする。

成人死亡率のモデリングにあたっては、さらに、 ${}_{x,t}$  は各  $t$  について、 $x > x_0(t)$  の範囲で  $x$  について狭義単調増加であると仮定してよい。ここで、 $x_0(t)$  は各  $t$  について、 ${}_{x,t}$  が狭義単調増加関数となる  $x$  の下限値を示す。このとき、各  $t$  に対して、関数  ${}_t(x)$

$${}_t : \tilde{X}_t \rightarrow Y, \quad {}_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} {}_{x,t}$$

は  $x$  について単射である。ただし、 $\tilde{X}_t = [x_0(t), \omega]$  である。 $\tilde{Y}_t = {}_t(\tilde{X}_t)$  とすると、関数  ${}_t(x) : \tilde{X}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$  は各  $t$  について、 $\tilde{Y}_t$  上で定義される逆関数  $\nu_t(y) : \tilde{Y}_t \rightarrow \tilde{X}_t$  を持つ。

そこで、 $Y_0$  を以下のように定義する\*1。

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} [y_0, y_1] \quad \text{ただし} \quad y_0 = \sup_{t \in T_0} \min \tilde{Y}_t, \quad y_1 = \inf_{t \in T_0} \max \tilde{Y}_t,$$

\*1  $x_0(t)$  は必ずしも連続とは限らないため、 $\{\min \tilde{Y}_t | t \in T_0\}$  には最大値がない可能性もある。

このとき、 $\nu_{y,t} : Y_0 \rightarrow X_0$  を

$$\nu_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_t(y)$$

により定義する。 $\nu_{y,t}$  は、時刻  $t$  における対数死力関数の値が  $y$  となるような年齢  $x$  を示している。

さらに、死亡モデルの微分型表示において用いる、(1)  $x_{,t}$ : 死力改善率と (2)  $y_{,t}$ : 年齢増加率を、以下の式によって定義する。

$$x_{,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_{,t}}{\partial t} = \frac{\partial \log x_{,t}}{\partial t}$$

$$y_{,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \nu_{y,t}}{\partial t}$$

## 2 低下型モデルとシフト型モデル

昨年度の研究においては、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証することを通じ、わが国の死亡データ特性に関する再検討を行った。この目的のため、まず、低下型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーションナルハザードモデル (PH)、リー・カーター・モデル (LC) の 2 モデルを、これら 2 つのモデルに対応するシフト型モデルである、水平シフトモデル (HS) と水平リー・カーター・モデル (HL) の 2 モデルを導入し、これら 4 種類の死亡モデルを検討した。また、各年の  $y_{,t_c}$  の実績値の観察から、これを  $y$  の線形関数として見てモデリングを行うシフト型モデルの線形差分モデル (LD) を提案した。本年度の研究では、これらの成果をさらに発展させる形で、全年齢死亡率モデルの構築を検討するが、そこで用いる LC モデルと LD モデルについて必要な事項をまとめておくこととする。また、LD モデルについては、昨年度において課題とされた点を改良し、 $y_{,t_c}$  を  $x$  の線形関数と見るモデル改良を行ったので、それについても併せて述べることとする。

なお、2 節においては、成人死亡モデルを対象とし、日本女性の死亡率に対してモデルの当てはめを行った。基礎データとしては、Human Mortality Database (Human Mortality Database) の、

$$m_{x,t_c}, \quad x = x_s (= 25), \quad , x_e (= 150) \quad \text{and} \quad t_c = t_s (= 1970), \quad , t_e (= 2009)$$

を用いた。ここで、 $t_c$  は暦年を表す。また、110 歳以上の死亡率については、HMD の高齢部で用いられているのと同じ 2 パラメータロジスティック曲線を当てはめることによって補外した。

$$x_{,t} = \frac{t \exp(-t x)}{1 + t \exp(-t x)}$$

## 2.1 低下型モデルとしての LC モデル

リー・カーター・モデル (以下、LC) は死亡率改善を「低下」型として表現するモデルである (Lee and Carter 1992)。LC モデルは以下の式により表される。

$${}_{x,t} = \log {}_{x,t} = a_x + k_t b_x$$

ここで、 $a_x$  は標準的な死亡パターンを表す。 $k_t$  は、死亡指数とも呼ばれ、死亡の一般的水準を表すパラメータであり、 $b_x$  は  $k_t$  が変化する時の年齢別死亡率の変化を表すパラメータとなる。

両辺の時間微分を行うことにより、LC モデルの微分型表示を得る。

$${}_{x,t} = \frac{dk_t}{dt} b_x = k'_t b_x$$

これは、LC モデルにおいては、各  $t$  について  ${}_{x,t}$  の年齢分布が一定となることを示す。

ここで、さらに  $k_t$  が  $t$  に関して線形な関数である場合を考えると、 $k'_t$  は定数となり、 ${}_{x,t}$  は  $t$  について定数関数となる。すなわち、死亡の一般的水準の改善スピードが一定という状況の下では、LC モデルは年齢別の死力改善率が一定であるとみなされる時、すなわち、死亡率改善が「低下」型であると考えられる時に、死亡率をよく表現するモデルであるといえる。

図 1 は対数死力関数 ( ${}_{x,t_c}$ ) の実績値と LC モデルによる推定値を示したものである。昨年度に示した通り、LC モデルでは、PH モデルに比べて実績値へのあてはまりがかなり改善しており、これは、LC モデルが年齢毎に異なった死力改善率を持つことが可能であることによるものである。

しかしながら、図 2 を見ると、若年層における実績値とモデルによる推計値との差は、データ範囲の最初と最後の年の近辺では高く、中間では低くなるという傾向が、また、高齢層ではこれとは逆の傾向が生じていることがわかる。

このような誤差項の傾向は、これも昨年度の研究において示した通り、年齢別死力改善率の年齢分布が時間の経過に応じて変化していることによるものである。

图 1 Mortality Rates (Actual and Model, LC)

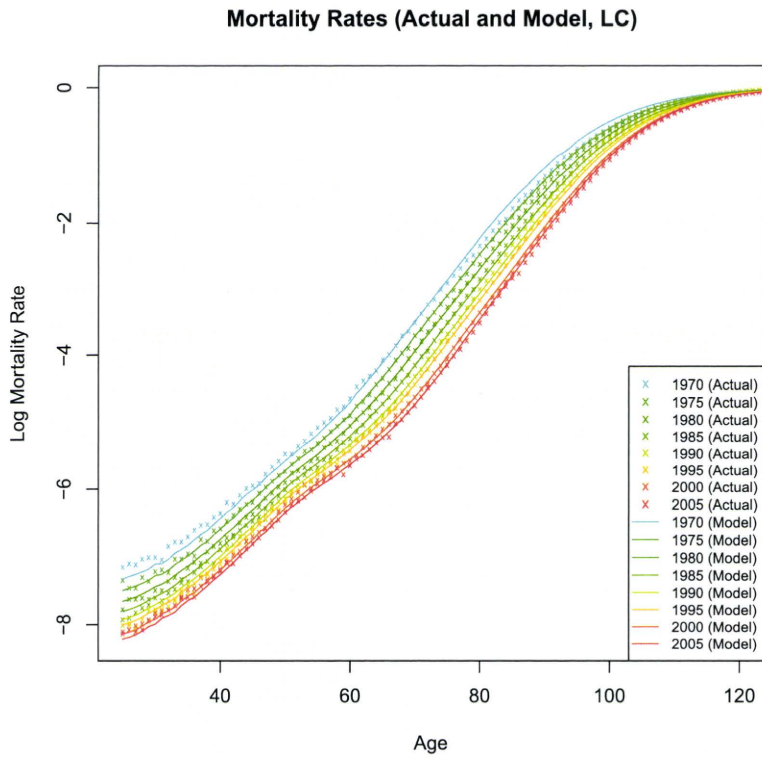
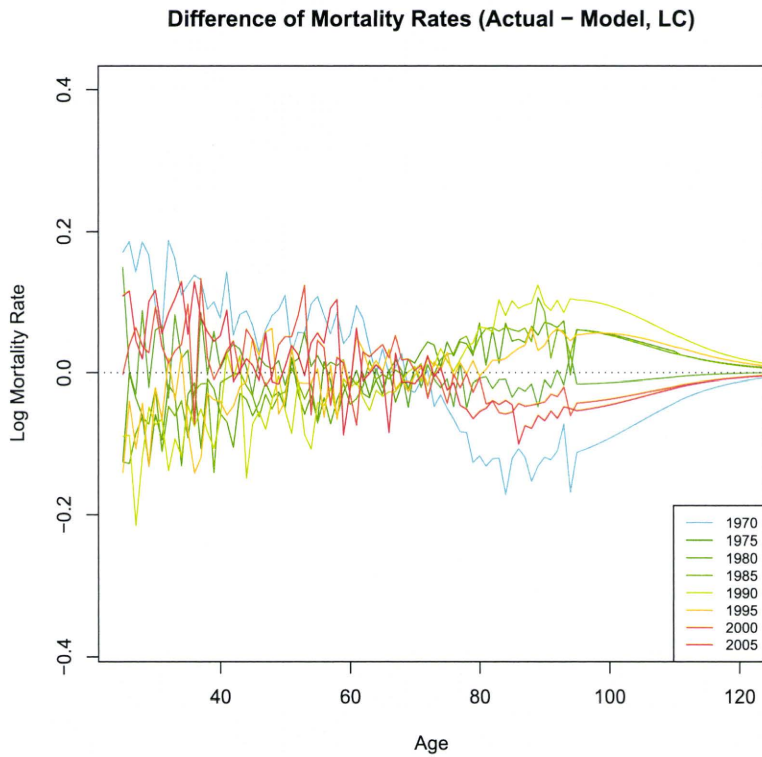


图 2 Difference of Mortality Rates (Actual and Model, LC)



## 2.2 シフト型モデルとしての LD モデル

昨年度の研究においても、シフト型モデルとしての線形差分モデル (LD モデル) に関して述べたが、本年度の研究においては、これをさらに改良した LD モデルを以下で導入して用いることとする。

高齢部の死亡率を表すパラメトリックなモデルに関してはこれまで多くのものが提案されている。このようなものの中から、Thatcher et al. (1998) は、13 カ国の 80~120 歳の高齢死亡率データに対し、6 種類のパラメトリックモデルを当てはめ、モデル間の比較検討を行っている。ここで比較対象となったモデルは、

1. Gompertz:  $x = ae^{bx}$
2. Weibull:  $x = ax^b$
3. Helligman & Pollard:  $q_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$
4. Quadratic:  $\ln(x) = a + bx + cx^2$  ( $c < 0$ )
5. Logistic:  $x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} + c$
6. Kannisto:  $x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$

であるが、この中で、もっともパフォーマンスが高かったものは、Logistic と Kannisto のロジスティックモデルであり、特に、Kannisto は 2 つだけのパラメータで高齢死亡率をよく表現できるという利点があるとされている。また、この 2 パラメータロジスティックモデルは、本研究で基礎データとして用いている HMD において、高齢部のあてはめに用いられているモデルでもある。

本研究では、LC モデルのようなノンパラメトリックなモデルを基本として検討を行ってきたことから、このようなパラメトリックモデルを直接的に利用することは困難である。しかしながら、提案するノンパラメトリックなモデルが、この 2 パラメータロジスティックモデルと整合的な性質を仮に持つとすれば、それはモデルが高齢死亡率を表現する上で好ましい性質を備えていることの裏付けとなる。

一方、昨年度の研究において、死亡率モデルを、対象となる関数の時間的変化、すなわち、微分型表示を用いて定義することの有効性を述べた。シフト型モデルについては、 $y_{,t}$ : 年齢増加率がこれに相当する。ここで、2 パラメータロジスティックモデルの  $y_{,t}$ : 年齢増加率が持つ特性について、以下の命題が成立する。

**命題 1.** 2 パラメータロジスティックモデル

$$y = x_{,t} = \log \frac{t \exp(t x)}{1 + t \exp(t x)} = \log t + t x - \log(1 + t \exp(t x))$$



において、 $y_{,t}$  は各  $t$  において  $x$  の線形関数である。すなわち、

$$y_{,t} = f'_t + g'_t x$$

が成立する。

*Proof.*

$$e^y = \frac{{}_t \exp({}_t x)}{1 + {}_t \exp({}_t x)}$$

$$\Leftrightarrow {}_t \exp({}_t x) = \frac{e^y}{1 - e^y}$$

$y$  を固定したまま両辺を  $t$  で微分することにより、

$${}_t \exp({}_t x) + {}_t \exp({}_t x) \cdot {}_t x + {}_t \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{{}_t}{t} - \frac{{}_t}{t} x$$

□

したがって、 $y_{,t}$  が  $x$  の線形関数であるとしてモデリングを行うことにより、高齢死亡部において、2パラメータロジスティックモデルが年齢増加率で満たすような性質を持つモデルを構築することが可能となることがわかる。そこで、年齢増加率が実際にこの条件を満たすようにモデリングを行ったものがLDモデルである。すなわち、LDモデルは、以下のように表すことができる。

$$y_{,t} = f'_t + g'_t x$$

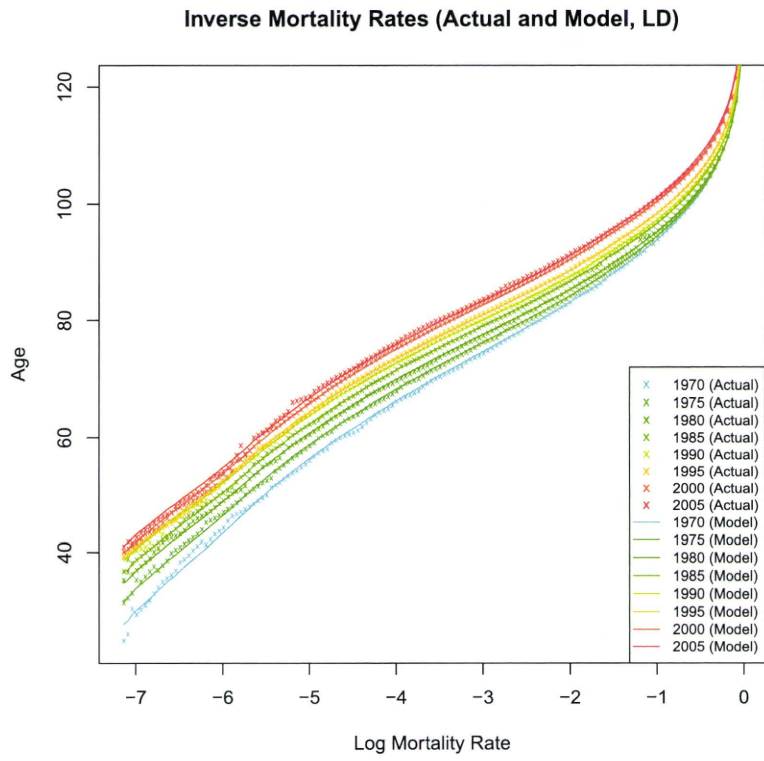
これは微分型表示であり、両辺を  $t$  で積分することにより、以下の通常型表示を得る。

$$\nu_{y,t} = f_t + g_t x + a_y$$

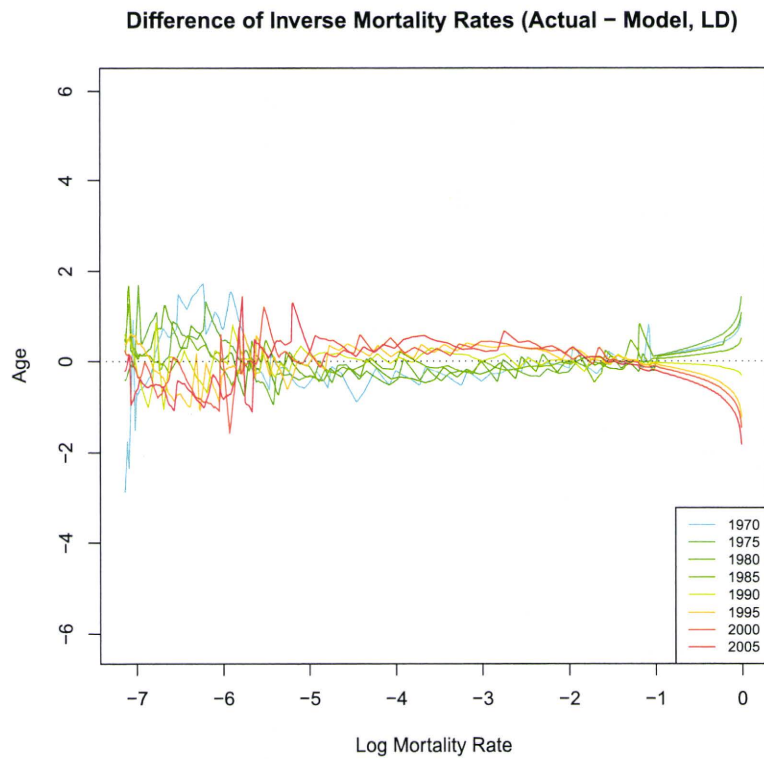
ここで、 $a_y$  は対数死亡率の逆関数に関する標準的なパターンを表す。

図3と図4は、対数死亡率の逆関数の実績値とLDモデルによる推計値、および、両者の差をグラフで表したものである。この図から、LDモデルは実績値によくあてはまっていることが観察される。

☒ 3 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)



☒ 4 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)



なお、昨年度の本研究、あるいは Ishii (2010) においては、 $y_{,t}$  を  $y$  の線形関数であると仮定して LD モデルを定義していた。今回のモデル改良は、 $y_{,t}$  を  $x$  の線形関数であると仮定する方が、年齢シフトモデルのシフト量・勾配パラメータ等を求める際の理論的基礎ともなっているロジスティックモデルと整合的であることに基づいているが、ここで、両者の各年齢に対する  $y_{,t}$ : 年齢増加率の違いについて比較を行っておくこととする。

図 5 と図 6 が、両モデルによる  $y_{,t}$ : 年齢増加の比較を示したものである。ここで、青い線で示されたのが実績値 (actual)、赤い線で示されたのが昨年度の研究で用いた  $y_{,t}$  を  $y$  の線形関数であると仮定したモデル (LD<sub>y</sub>)、緑の線で示されたのが本年度に改良された  $y_{,t}$  を  $x$  の線形関数であると仮定した LD モデル (LD) である。これを見ると、年齢増加率実績値は概ね年齢の線形関数で近似されることがわかり、LD<sub>y</sub>、LD とも実績値の傾向を表現できていることがわかる。また、HMD では 2 パラメータロジスティックモデルを用いて超高齢層の死亡率あてはめを行っていることから、先の命題で見た通り、超高齢層の年齢増加率実績値はほぼ完全な直線に近い形状をしていることも読み取れる。また、LD はその定義から全ての年齢層で線形関数となっているが、LD<sub>y</sub> では超高齢層でややカーブが屈曲するような傾向が見られる。

実績の年齢増加率の傾きが若年層と超高齢層で異なってくると、年齢増加率は全体として線形関数から遠ざかることから、LD<sub>y</sub>、LD のあてはめはやや悪くなってくる。ここで、その誤差については LD<sub>y</sub> の方が小さい場合と LD の方が小さい場合の両者がある。例えば、1975 年のケースでは LD<sub>y</sub> が超高齢層において傾きが緩やかとなることから実績値との乖離が小さくなるのに対し、1986 年のようなケースでは逆に乖離が大きくなっている。しかしながら、LD<sub>y</sub> の誤差が小さくなるのは、実績値における若年層と超高齢層の傾きの動きがたまたま LD<sub>y</sub> の超高齢層での屈曲の方向に一致していたというだけであり、死亡率が全体として 2 パラメータロジスティック曲線に近いと考えられる場合には LD の方が誤差は小さくなるはずであり、 $y_{,t}$  を  $x$  の線形関数と見る方が優れていると考えることができる。

図 5 Comparison of the Force of Age Increase by Age(1975-1990, Female, Japan)

