

示法による対数死亡率曲面を示したものの、すなわち、X-T平面から $\lambda_{x,t}$ によって定まる曲面の高さによる表示である。黒い点是对数死亡率曲面上の点 $(x,t,y) = (1,2,-1.5)$ を示しており、これは、 $(x,t) = (1,2)$ の時の X-T平面からの高さが-1.5であると理解される。ここで、 x を固定したままこの曲面を移動すると、茶色の矢印に示される通り、 $t=3$ のときの X-T平面からの高さは-1.86に減少する。この2つの高さの差が $-\rho_{x,t}$ に対応する。

一方、対数死亡率曲面は $v_{y,t}$ によって定まる Y-T平面からの高さとしても表される。この観点からは、黒い点は $(y,t) = (-1.5,2)$ の時の高さが1というふうに理解される。オレンジの線は y を固定した時の曲面上の等高線を表したものであり、 y を固定したときは、この線に沿って曲面上を移動することになる。再度、黒い点から今度は y を固定して移動すると、図の紫色の矢印で示されているように、 $t=3$ の時は Y-T平面からの高さは3となる。この2つの高さの差が $\tau_{y,t}$ に対応する。

2 4つの死亡モデルの定義とその微分型表示

本節においては、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証する観点から、「低下」型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーショナルハザードモデル、リー・カーター・モデルの2モデルの定義を述べるとともに、これら2つのモデルに対応する「シフト」型モデルである、水平シフトモデルと水平リー・カーター・モデルの2モデルを導入し、全部で4つの死亡モデルを定義する。また同時に、これらの死亡モデルを、時間微分した関数により表示する微分型表示を導入し、後の議論の準備を行う。

2.1 プロポーショナルハザードモデル (PH)

プロポーショナルハザードモデル(以下、PH)は、死亡率改善を「低下」型として表現する単純なモデルである。PHモデルでは $\lambda_{x,t}$: 時刻 t における死力が、

$$\lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t} = a_x + k_t$$

と表される。ここで、 a_x は基準となる対数死力関数である。この式によれば、PHモデルでは、各時点における対数死力関数が、基準となる死力関数に定数を加えて表現されていることから、死亡率の改善局面においては、全年齢の死力が一律に「低下」という仮定に基づいて死力関数がモデル化されていることになる。

ところで、ここでいう「死亡率の改善」とは死力関数の時間的変化であり、死亡率を「低下」で表現するといった場合、モデル式自体を時間的変化から特徴づけるということは自然な発想である。そこで、対数死力関数を直接表示するのではなく、対数死力関数を時間微分した死力改善率を用いて死亡モデルを表現することを考え、これを微分型表示と呼ぶこととする。

PHモデルにおいては、上式を t で微分することにより、 $\rho_{x,t}$:死力改善率は、

$$\rho_{x,t} = -\frac{dk_t}{dt} = -k'_t$$

と表される。これは、各 t において $\rho_{x,t}$ が x についての定数関数となることを表しており、これがPHモデルの微分型表示による表現となる。

2.2 リー・カーター・モデル (LC)

リー・カーター・モデル (以下、LC) は、PHモデルよりも一般的な形で死亡率改善を「低下」型として表現するモデルである (Lee and Carter 1992)。LCモデルは以下の式により表される。

$$\lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t} = a_x + k_t b_x$$

ここで、 a_x は標準的な死亡パターンを表す。 k_t は、死亡指数とも呼ばれ、死亡の一般的水準を表すパラメータであり、 b_x は k_t が変化する時の年齢別死亡率の変化を表すパラメータとなる。

両辺の時間微分を行うことにより、LCモデルの微分型表示を得る。

$$\rho_{x,t} = -\frac{dk_t}{dt} b_x = -k'_t b_x$$

これは、LCモデルにおいては、各 t について $\rho_{x,t}$ の年齢分布が一定となることを示す。

ここで、さらに k_t が t に関して線形な関数である場合を考えると、 k'_t は定数となり、 $\rho_{x,t}$ は t について定数関数となる。すなわち、死亡の一般的水準の改善スピードが一定という状況の下では、LCモデルは年齢別の死力改善率が一定であるとみなされる時、すなわち、死亡率改善が「低下」型であると考えられる時に、死亡率をよく表現するモデルであるといえる。

2.3 水平シフトモデル (HS)

次に、死亡率改善を「シフト」型により表現するモデルの議論に移る。「シフト」型による最も単純なモデルは、対数死力率曲線全体がそのまま高齢方向へと移動するものである。このモデルは対数死力の逆関数 $v_{y,t}$ を用いて表現すれば、 $v_{y,t}$ に関するプロポーショナルハザードモデルであるということが出来る。

本稿においてはこのモデルを水平シフトモデル (以下、HS) と呼ぶこととする。HSモデルは、PHモデルと同様に、以下のような式で表すことができる。

$$v_{y,t} = a_y + k_t$$

これは、微分型表示では、

$$\tau_{y,t} = \frac{dk_t}{dt} = k'_t$$

と書ける。

2.4 水平リー・カーター・モデル (HL)

年齢毎に異なる死亡率改善度合が設定でき、PHモデルに比べてより一般的なフレームワークを持つモデルとしてLCモデルを考えたのと同様に、より一般的なシフティングに関する特徴を持つモデルとして、 $v_{y,t}$ についてのリー・カーター・モデルを考えることができる。これを、水平リー・カーター・モデル（以下、HL）と呼ぶことにしよう。HLモデルは、LCモデルの表示と同様に、以下のように表すことができる。

$$v_{y,t} = a_y + k_t b_y$$

さらに両辺を t で微分することにより、微分型表示

$$\tau_{y,t} = \frac{dk_t}{dt} b_y = -k'_t b_y$$

を得る。

3 モデルの数値評価

本節では、これまでに述べた4つのモデルに日本女性の死亡率をあてはめ、パラメータ推定を行って、比較を行うこととする。数値評価にあたっては、連続型ではなく離散型で行う必要があるため、以下の評価においては、死力関数の近似として、Human Mortality Database (Human Mortality Database) における中央死亡率

$$m_{x,t_c}, \quad x = x_s (= 25), \dots, x_e (= 110) \quad \text{and} \quad t_c = t_s (= 1970), \dots, t_e (= 2007)$$

を用いることとする。ここで、連続型の $m_{x,t}$ は、時刻 t においてちょうど x 歳の死亡率を表すのに対し、離散型の m_{x,t_c} は、ある暦年 t_c における、年齢 $[x, x+1)$ 歳の中央死亡率を表している点に注意が必要である。このため、離散型における m_{x,t_c} は、連続型の $\mu_{x+0.5,t_c+0.5}$ の近似となる。

数値評価にあたり、関数 $v_{y,t}$ は

$$\begin{aligned} y &= y_s, y_s + 0.05, \dots, y_e - 0.05, y_e \\ &= -7.1, -7.05, \dots, -0.50, -0.45 \end{aligned}$$

に対応する年齢 x を線形補間によって求めることによって推定した。

また、離散型表示における ρ_{x,t_c} と τ_{y,t_c} の時間微分については、数値の安定性の観点から以下のような近似を用いた。

$$\rho_{x,t_c} \approx -\frac{\lambda_{x,t_c+2} - \lambda_{x,t_c-2}}{4}$$

$$\tau_{y,t_c} \approx \frac{v_{y,t_c+2} - v_{y,t_c-2}}{4}$$

3.1 プロポーショナルハザードモデル (PH)

PH モデルの評価にあたり、 a_x として、対数死力関数の全期間における平均値をとった。すなわち、

$$a_x = \frac{1}{t_e - t_s + 1} \sum_{t_c=t_s}^{t_e} \lambda_{x,t_c}$$

である。

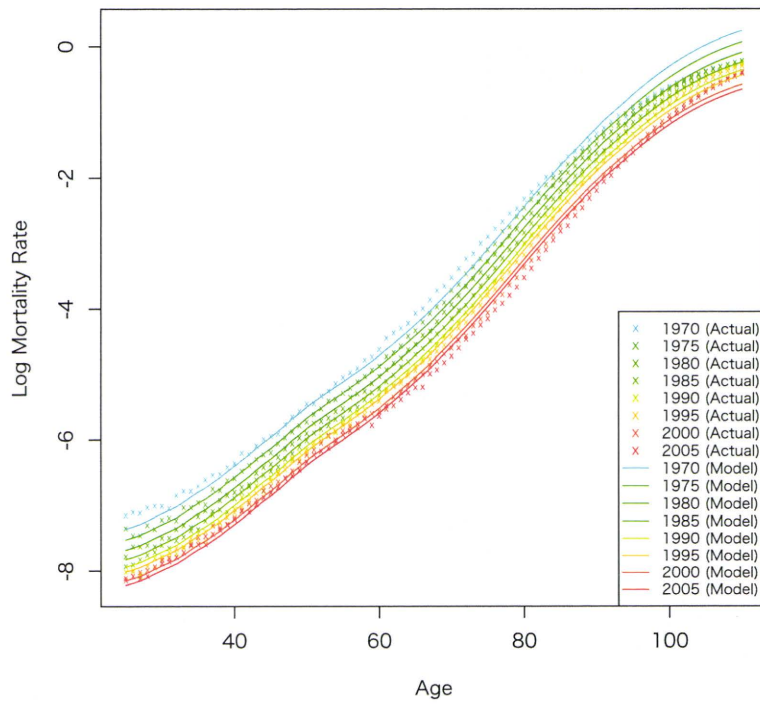
このとき、パラメータ k_{t_c} は、最小二乗法により、以下のように推定される。

$$k_{t_c} = \frac{1}{x_e - x_s + 1} \sum_{x=x_s}^{x_e} (\lambda_{x,t_c} - a_x)$$

図2は、対数死力関数 (λ_{x,t_c}) の実績値と PH モデルによる推定値を示したものである。この図から、モデルによる推定値は高齢部分で実績値へのあてはまりが悪いことが読み取れる。

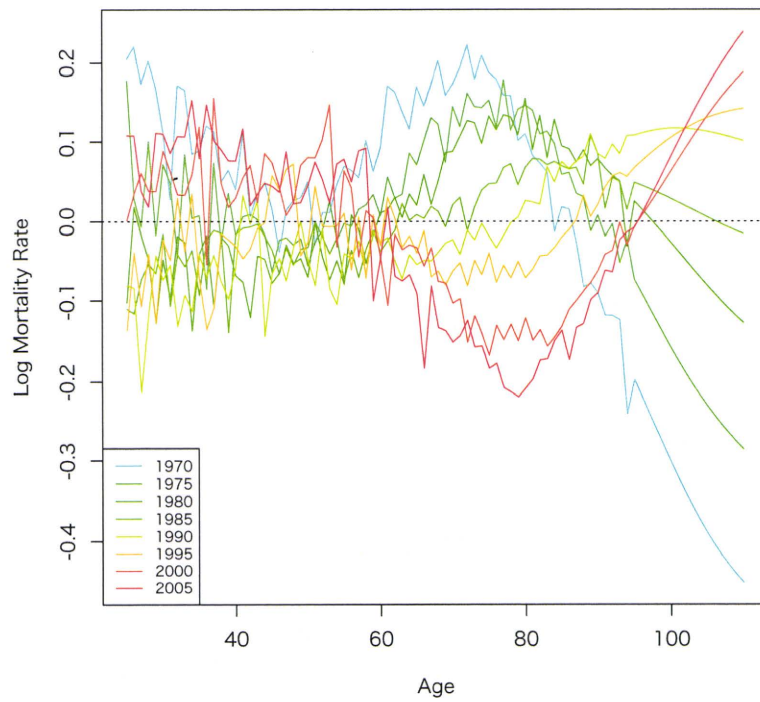
図3は、実績値からモデルによる推定値を差し引くことにより、両者の乖離度合を示したものである。このグラフより、1970年では60歳から80歳のところで実績値はモデルに比べて高い値となっているが、時間の経過に伴って低くなることがわかる。しかしながら、90歳以上においてはこれとは反対の傾向が見られる。これは、60歳から80歳においては死力改善率の実績値がモデルによる推定値より大きい一方で、90歳以上では小さいことによるものであり、死力改善率が年齢に関して定数であるという PH モデルの制約条件に起因するものである。

Mortality Rates (Actual and Model, PH)



☒ 2 Mortality Rates (Actual and Model, PH)

Difference of Mortality Rates (Actual - Model, PH)



☒ 3 Difference of Mortality Rates (Actual - Model, PH)

3.2 リー・カーター・モデル (LC)

LC モデルについても、 a_x として全期間における平均値をとった。すなわち、

$$a_x = \frac{1}{t_e - t_s + 1} \sum_{t_c=t_s}^{t_e} \lambda_{x,t_c}$$

である。

パラメータ k_{t_c} 、 b_x は以下のようにして推定される。

行列 $\lambda_{x,t_c} - a_x$ の特異値分解 (SVD) を

$$\lambda_{x,t_c} - a_x = \sum_i u_{xi} q_i v_{t_c i} \quad (q_1 \geq q_2 \geq \dots)$$

と表す。このとき、まず、

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{t_c} &= q_1 v_{t_c 1} \\ \tilde{b}_x &= u_{x1} \end{aligned}$$

と置き、これを以下のように変換することによりパラメータ推定を行う。

$$\begin{aligned} k_{t_c} &= \tilde{k}_{t_c} \frac{t_e - t_s}{\tilde{k}_{t_e} - \tilde{k}_{t_s}} \\ b_x &= \tilde{b}_x \frac{\tilde{k}_{t_e} - \tilde{k}_{t_s}}{t_e - t_s} \end{aligned}$$

図 4 は対数死力関数 (λ_{x,t_c}) の実績値と LC モデルによる推定値を示したものである。この図より、LC モデルでは、PH モデルに比べて実績値へのあてはまりがかなり改善していることがわかる。これは、LC モデルが年齢毎に異なった死力改善率を持つことが可能であることによるものである。

しかしながら、図 5 を見ると、若年層における実績値とモデルによる推計値との差は、データ範囲の最初と最後の年の近辺では高く、中間では低くなるという傾向が、また、高齢層ではこれとは逆の傾向が生じていることがわかる。

このような誤差項の傾向は、年齢別死力改善率の年齢分布が時間の経過に応じて変化しているに関連していると考えられる。そこで、次に、ここまで見た 2 つのモデルの $\rho_{x,t}$ ：死力改善率をより詳しく見てみることにしよう。

Mortality Rates (Actual and Model, LC)

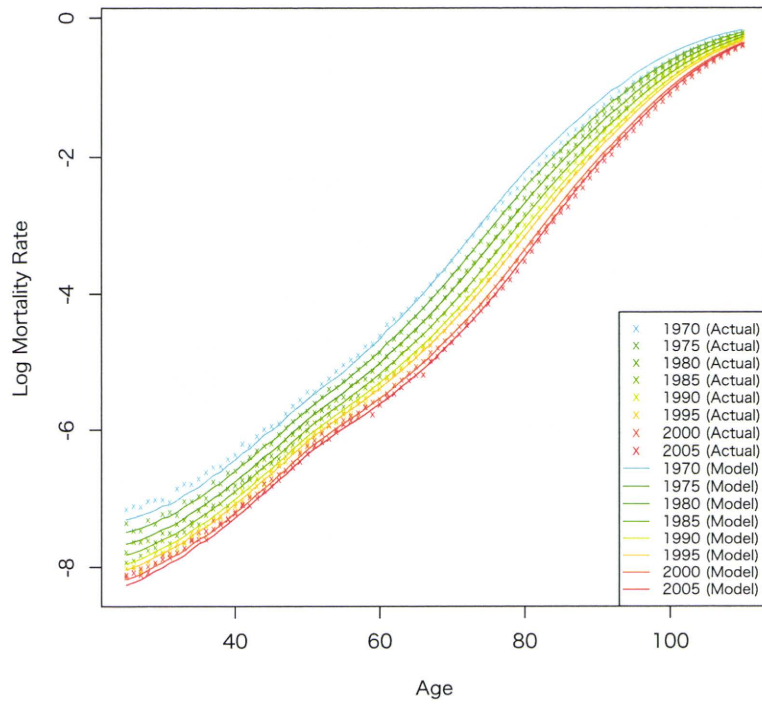


Figure 4 Mortality Rates (Actual and Model, LC)

Difference of Mortality Rates (Actual - Model, LC)

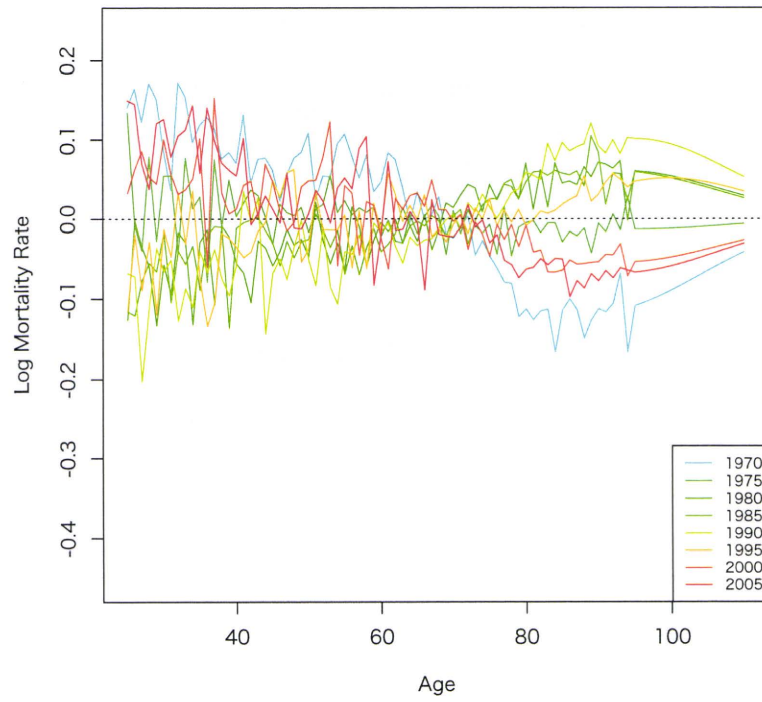


Figure 5 Difference of Mortality Rates (Actual - Model, LC)

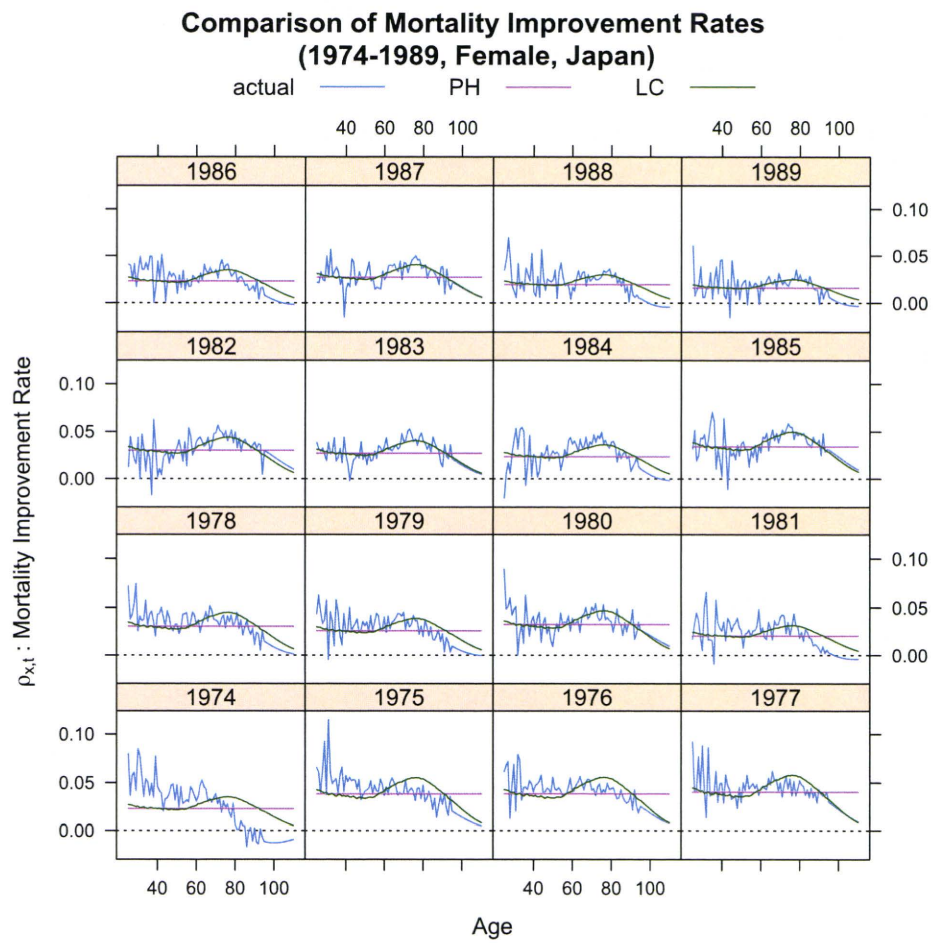
3.3 死力改善率の比較

図6、7は、2つのモデルについて、実績値とモデルによる推定値に基づく ρ_{x,t_c} : 死力改善率を示したものである。1974年から1989年についての死力改善率を図6に、1990年から2005年についてを図7に示している。これらの図から、 ρ_{x,t_c} の2つのモデル値と実績値の時系列変化を見ることができる。

青い線は実績値に基づく ρ_{x,t_c} である。死力改善率の実績値は、概ねピークを持つ山形の形状をしていることがわかる。しかしながら、PHモデルによる死力改善率は、各 t について定数関数であることから、ピンク色の線で示されているように横軸に水平な直線となっている。この形状の違いが、先に見たような、PHモデルによる推計値と実績値との乖離を引き起こしたとみることができる。

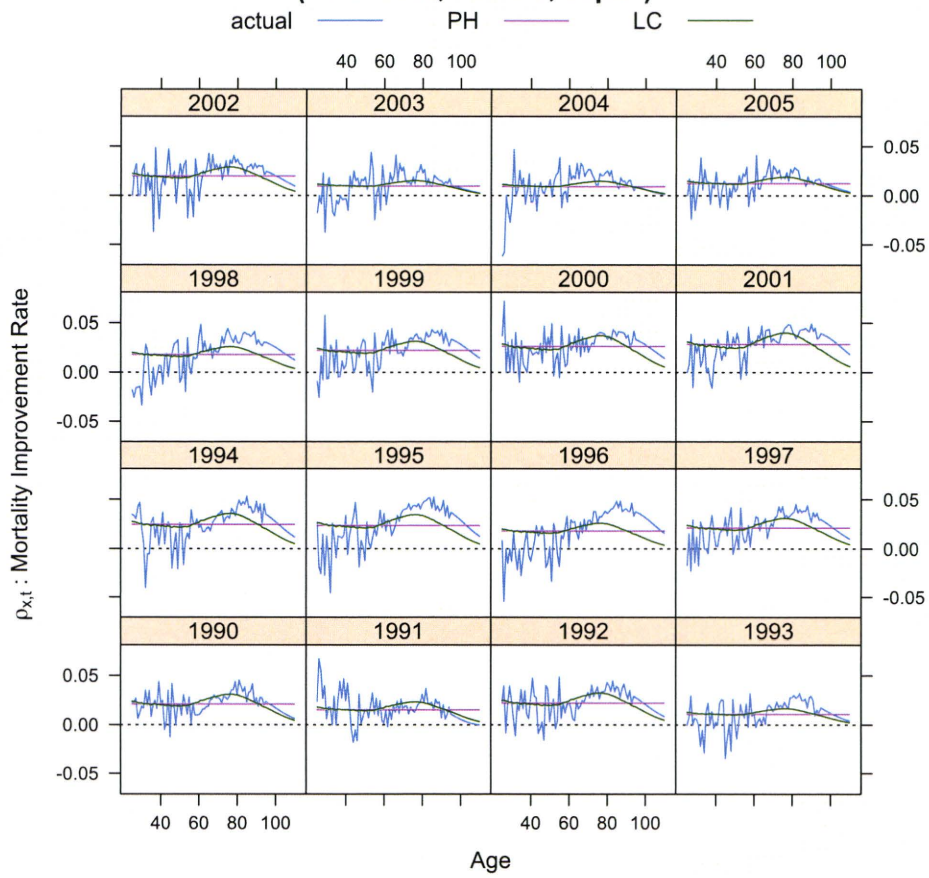
一方、LCモデルによる死力改善率は緑色の線で表されているが、こちらは実績値と同様にピークを持った山形の形状となっており、これがPHモデルに比べて実績値へのあてはまりが改善した要因となっている。しかしながら、LCモデルの死力改善率の年齢分布は固定されている一方で、実績値の分布は変動している。例えば、1995年前後の死力改善率を比較すると、高齢における実績値の改善率はモデルによる推定値よりも高く、ピークもより右の方に位置している。

このように、死力改善率の年齢分布の実績値は、時間の経過に応じて変化しており、LCモデルの仮定のように一定とはなっていない。そして、このことが図5において観察された、LCモデルの誤差項に見られた傾向を導いているのである。このことは、LCモデルのように死亡率改善を「低下」型として捉えるモデルの一つの限界を示しているともできる。



☒ 6 Comparison of Mortality Improvement Rates (1974-1989)

**Comparison of Mortality Improvement Rates
(1990-2005, Female, Japan)**



☒ 7 Comparison of Mortality Improvement Rates (1990-2005)

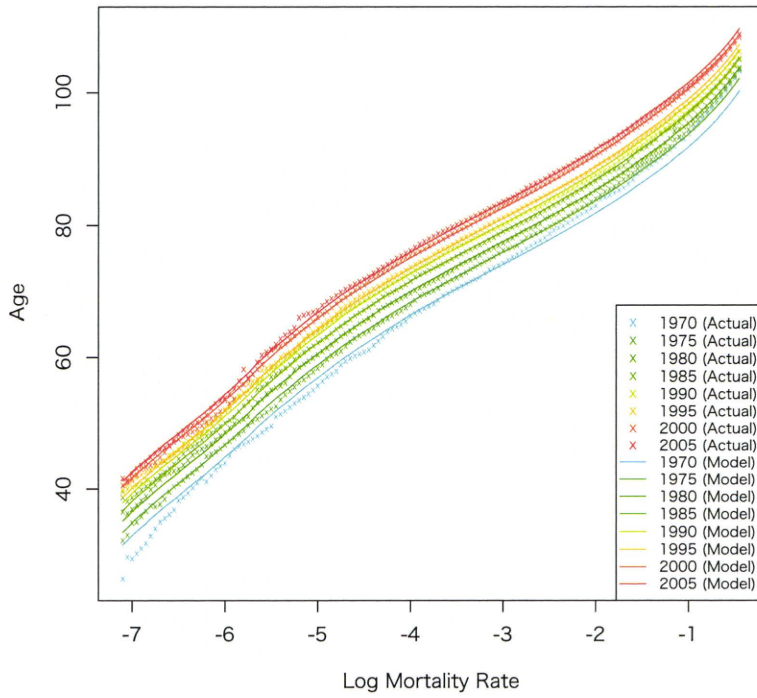
3.4 HS モデルと HL モデル

HS モデルと HL モデルに対するパラメータ推定は、 λ_{x,t_c} の代わりに ν_{y,t_c} に対して適用する点以外は完全に PH モデル、LC モデルと同様に行うことができる。図 8、9 は、死力逆関数 (ν_{y,t_c}) の実績値と PH モデルによる推定値、及び実績値と推定値の乖離を示したものである。また、図 10、11 は、HL モデルに対する同様の図を示したものである。

まず、HS モデルの評価結果からわかることは、HS モデルは PH モデルと同じ構造を持っているにもかかわらず、そのあてはまりは PH モデルよりもかなりよいことである。もちろん、HS モデルでもライトブルーの線で示された 1970 年では若年層で実績値の方がかなり高く、高齢層では逆に低くなっていることが観察されるが、それ以外の年次についての誤差はそれほど大きいものとはなっていない。

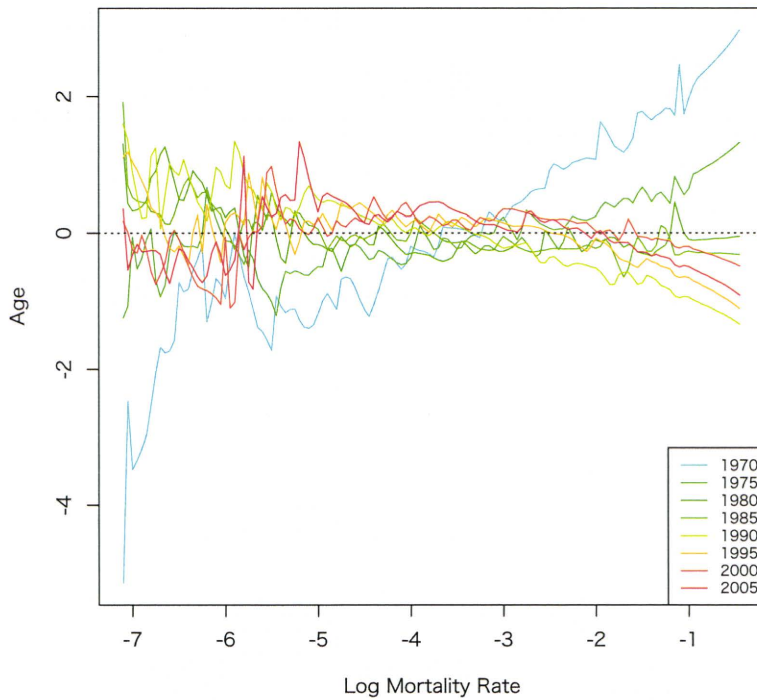
次に HL モデルの結果を見てみると、HL モデルは HS モデルに比べて、全体的にあてはまりが改善していることがわかる。特に、HS モデルで誤差が大きかった 1970 年でのあてはまりも改善している。しかしながら、同時に、「低下」型のペアのあてはまりの違いほど、「シフト」型モデルのあてはまりの違いが大きくないように見える。すなわち、PH モデルにおいては死力改善率が各年次において年齢の定数関数となっているという制約条件が強く、この制約条件が LC モデルにおいて緩和されたことによるフィッティングのパフォーマンス向上が大きいものであったのに対し、HS モデルで年齢増加率が定数関数となっている制約を HL モデルにおいて緩和しても、大きなパフォーマンス向上に繋がっていないということである。この違いを詳細に分析するためには、 τ_{y,t_c} : 年齢増加率を観察する必要がある。そこで、次節において、HS モデル、HL モデルの年齢増加率の違いを見てみることにする。

Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)



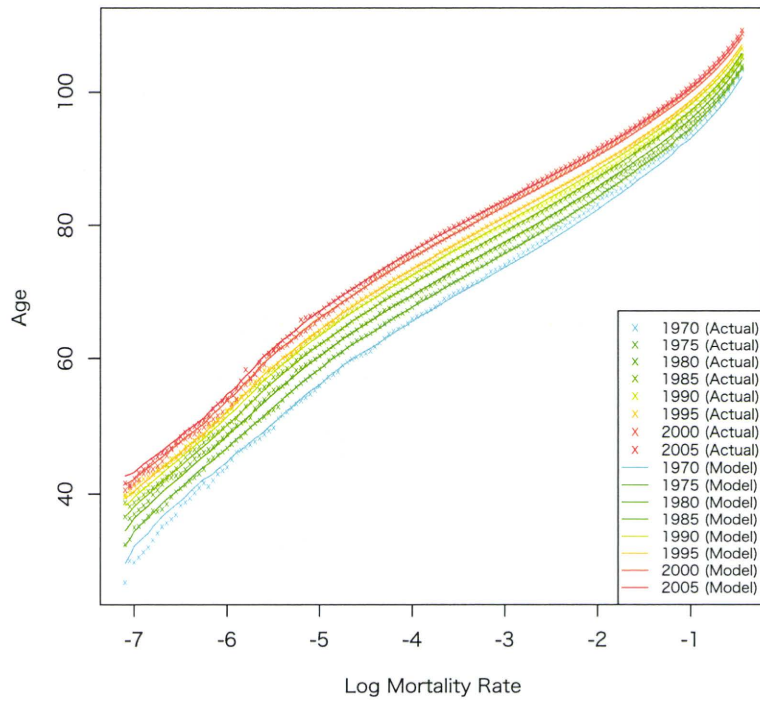
☒ 8 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)

Difference of Inverse Mortality Rates (Actual - Model, HS)



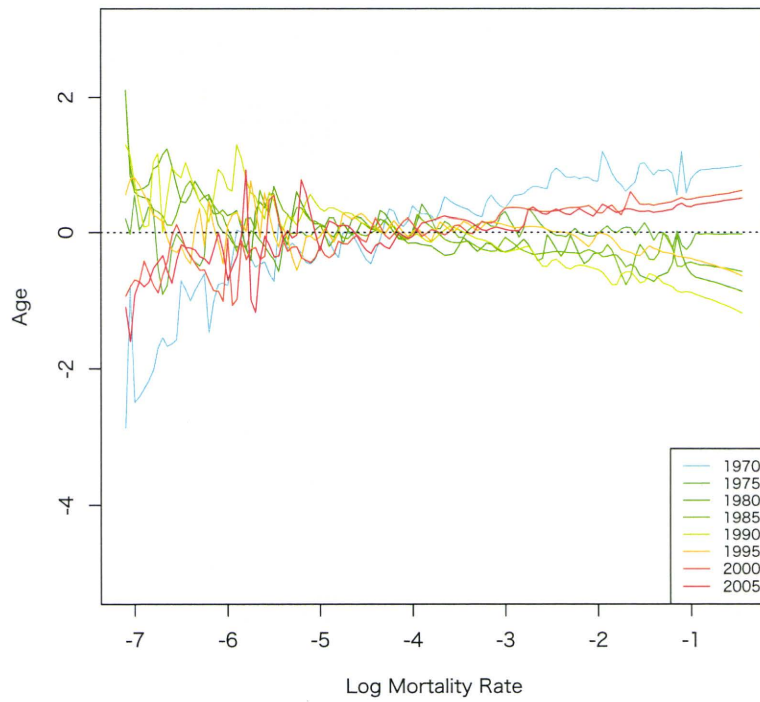
☒ 9 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)

Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HL)



☒ 10 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HL)

Difference of Inverse Mortality Rates (Actual - Model, HL)



☒ 11 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HL)

3.5 年齢増加率の比較

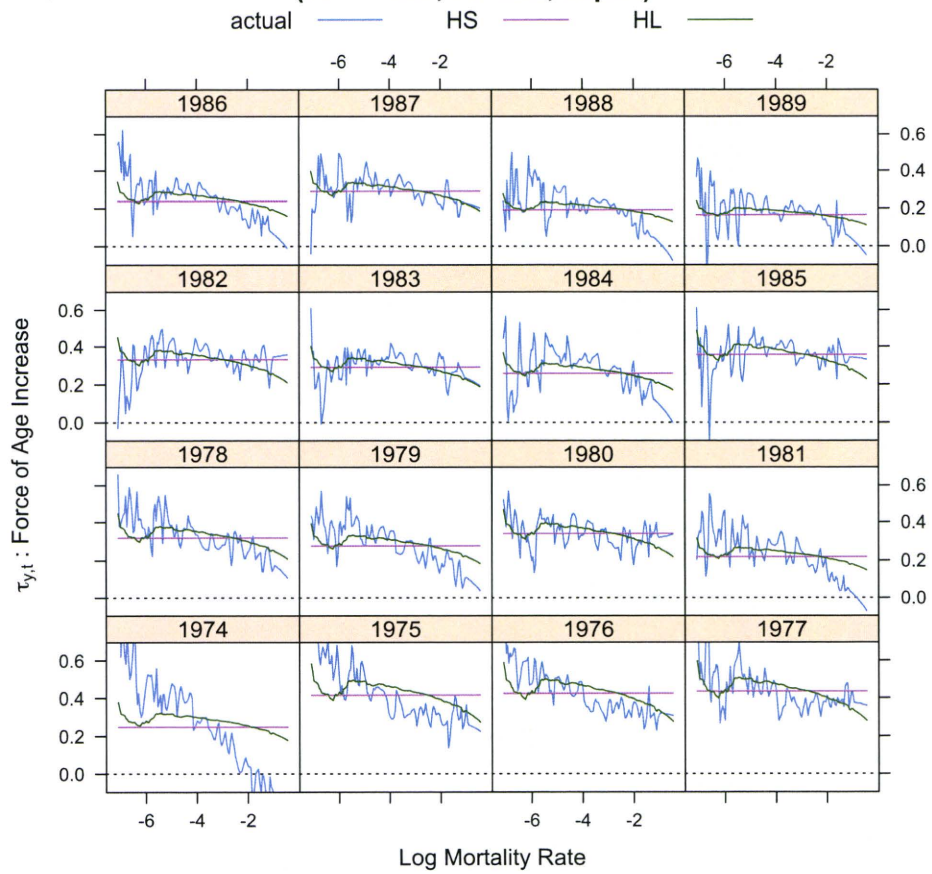
図 12、13 は、実績値と 2 つの「シフト」型モデルによる推定値に基づく τ_{y,t_c} : 年齢増加率を示したものである。1974 年から 1989 年までの年齢増加率を図 12 に、1990 年から 2005 年までを図 13 に示した。

図 12 における 1974 年の年齢増加率の実績値（青線）を見ると、傾きの大きい右肩下がりの傾向を示しており、ピンク色の線で表された HS モデルの水平な直線とは大きく乖離している。このことは、先に HS モデルによる 1970 年の推定値にかなりのずれが出ていたことに対応していると考えられる。一方で、図 13 における 1990 年以降の傾向を見ると、多くの年次において実績値が水平な直線で近似される傾向が高まっている様子が観察され、これが PH モデルに比べて HS モデルのパフォーマンスが高いことに繋がったものと考えられる。

一方、HL モデルによる τ_{y,t_c} は緑色の線で示したものであるが、これは全体的にやや右下がりの傾向を持つてはいるものの、ピンク色の線で表された HS モデルの水平な直線に比較的近い形状をしていることがわかる。すなわち、「低下」型のモデルの死力改善率の実績値が山形の形状を持ち、直線での近似が大きな誤差を生んでいたのに対し、「シフト」型の年齢増加率の実績値は直線との乖離が「低下」型ほど大きくないことから、HS モデルでも一定のパフォーマンスが得られる一方、HL モデルを用いて制約条件を緩めても目覚ましいパフォーマンス向上には繋がらないのである。したがって、これが、「低下」型のペアのあてはまりの違いほど、「シフト」型モデルのあてはまりの違いが大きくないことの原因になっていると考えられる。

ところで、この図から、各年の τ_{y,t_c} の実績値を表す青い線は、 y の線形関数として見た場合、よりよくモデル化できるのではないかが観察できる。本研究では、この観察に基づいて、「線形差分モデル」という新たな「シフト」型モデルを提案する。次節においては、この新モデルを改めて定義するとともに、そのモデルの内容について検討を行う。

**Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate
(1974-1989, Female, Japan)**



☒ 12 Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate (1974-1989)

**Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate
(1990-2005, Female, Japan)**

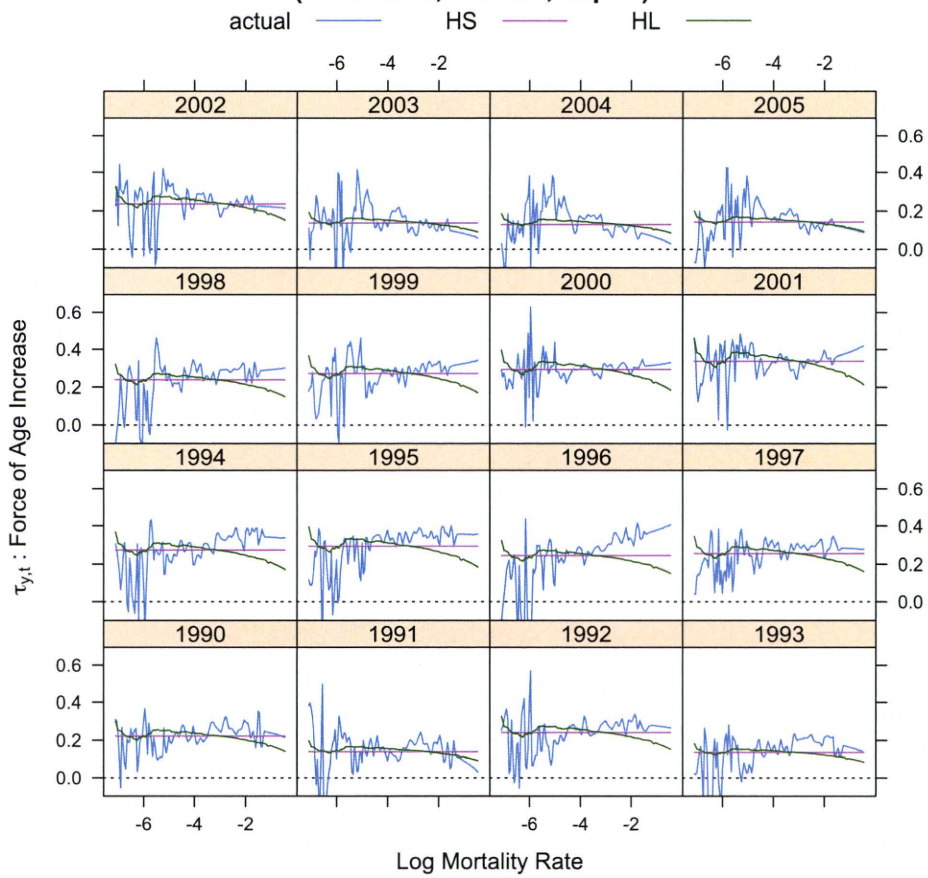


図 13 Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate (1990-2005)

4 線形差分モデル (LD)

最初に、線形差分モデル (以下、LD) を他のモデルで行ったのと同様、連続型で定義する。LD モデルは、各 t において $\tau_{y,t}$ が y の線形関数であることを仮定するモデルである。すなわち、

$$\tau_{y,t} = k'_t + c'_t y$$

という微分型表示に基づいてモデルを定義する。このように、LD モデルの定義においては、微分型表示が本質的な役割を果たしている。

この両辺を t で積分することにより、

$$v_{y,t} = k_t + c_t y + a_y$$

という通常の表示を得ることができる。ここで、 a_y は死力逆関数の標準的なパターンを表す関数である。

数値評価においては、 a_y を、

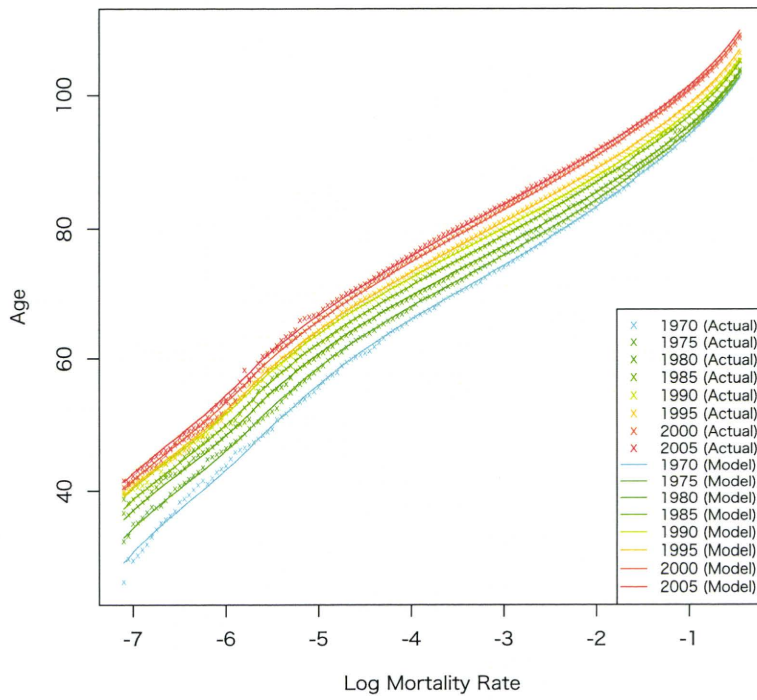
$$a_y = \frac{1}{t_e - t_s + 1} \sum_{t_c=t_s}^{t_e} v_{y,t_c}$$

とし、 k_{t_c} と c_{t_c} は最小二乗法によりパラメータ推定を行うことができる。

図 14、15 は死力逆関数の実績値と LD モデルによる推定値、及び、両者の乖離を表したものである。これらの図からは、LD モデルによる推定値の実績値へのあてはまりが極めて良いことが観察される。

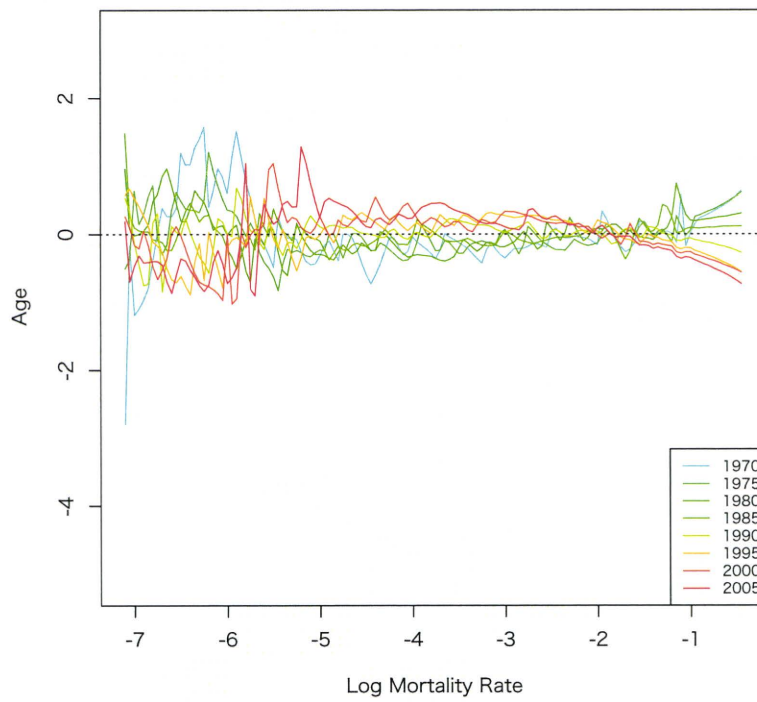
これは年齢増加率 τ_{y,t_c} の観察からも確認できる。図 16、17 は図 12、13 に LD モデル (赤線) による τ_{y,t_c} の推定値を加えたものである。この図から、 τ_{y,t_c} への線形仮定は他の 2 モデルよりも実績値の表現性に優れていることがわかる。

Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)



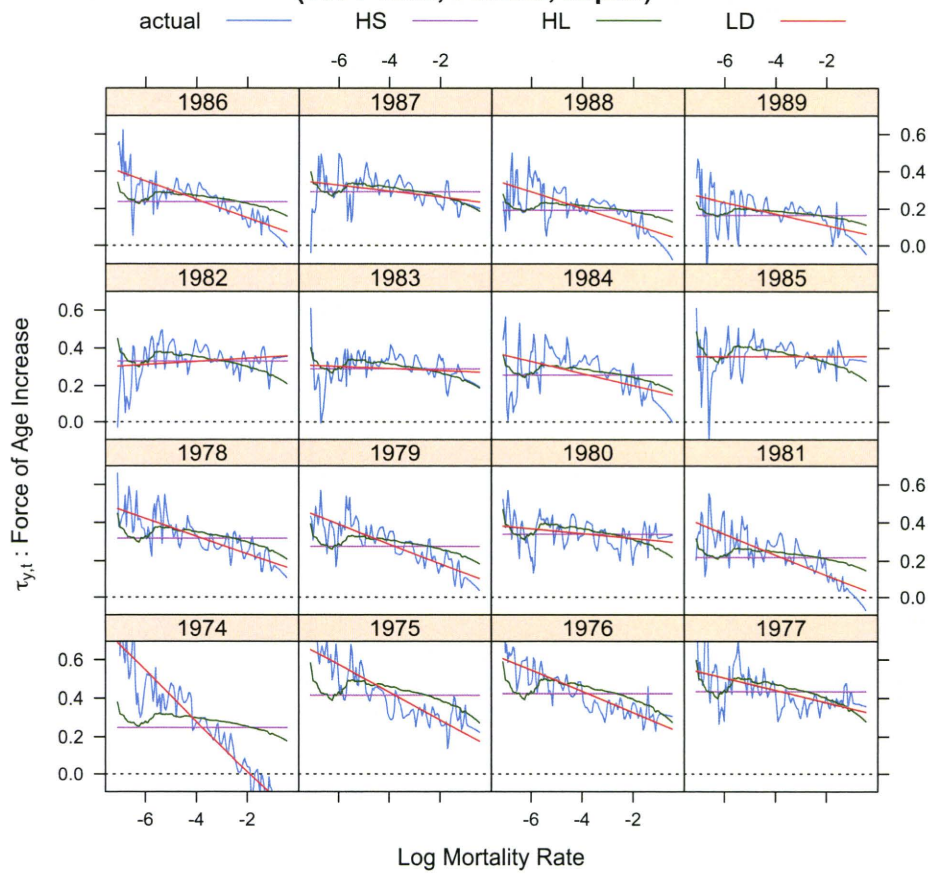
☒ 14 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)

Difference of Inverse Mortality Rates (Actual - Model, LD)



☒ 15 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)

**Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate
(1974-1989, Female, Japan)**



☒ 16 Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate (1974-1989)

**Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate
(1990-2005, Female, Japan)**

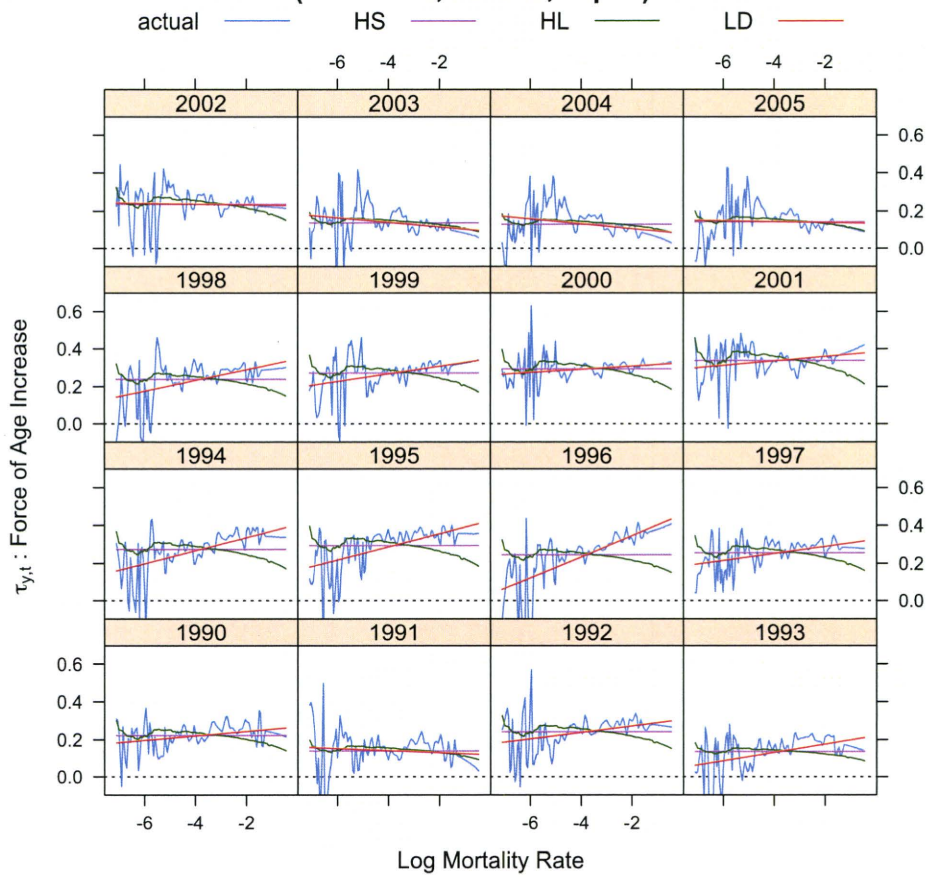


図 17 Comparison of the Force of Age Increase by Log Mortality Rate (1990-2005)