

2. リー・カーター・モデルと年齢変換

2.1 年齢変換を伴ったリー・カーター・モデルについて

年齢シフトモデルの中で用いられた年齢変換は、基本的には以下のような式で表されるものである^{*1}。すなわち、 x ：変換前の年齢座標、 y ：変換後の年齢座標とし、 $x = f_t(y)$ を以下のように定義する。

$$f_t(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y & (y \leq B_1) \\ \left\{ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (B_2 - S_{t_0}) + S_t - B_1 \right\} \frac{y - B_1}{B_2 - B_1} + B_1 & (B_1 \leq y \leq B_2) \\ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (y - S_{t_0}) + S_t & (B_2 \leq y) \end{cases}$$

さらに、変換後の年齢座標における死亡率を以下のように定義する。

$$\tilde{m}_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} m_{f_t(y),t}$$

図9はこのような年齢変換の例を示したものであり、図10は $f_t(y)$, ($y = 0, 1, \dots, 110$)

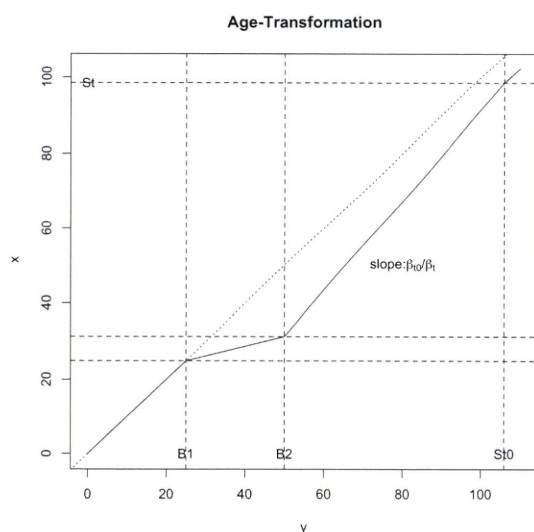


図9 Age-transformation Function

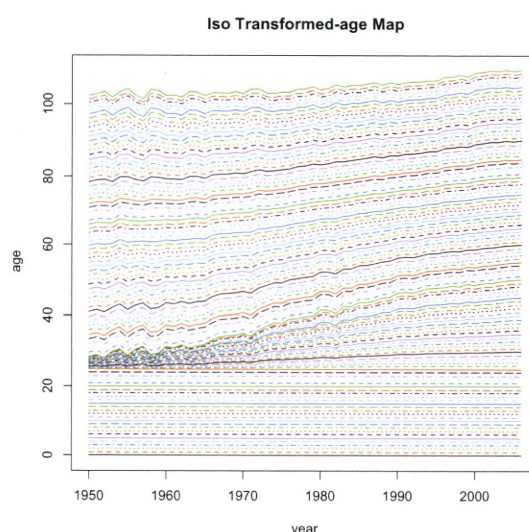


図10 Iso Transformed-age Map

を示したものである。後者は、変換前のどの年齢が変換後に同一視されるかを表したものであり、以下、iso transformed -age map と呼ぶこととする。

さて、このような年齢変換を行った上でリー・カーター・モデルを適用する効果がどのようなものであるか、再び、日本と米国のデータを用いて確認してみよう。リー・カー

^{*1} 実際に用いられた年齢変換では $y \geq S_{t_0}$ において異なる扱いをしているが、本質的な違いはないため、ここでは単純化したもので検討を行っている。

ター・モデルは、以下のように表される (Lee and Carter 1992)。

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + k_t b_x + \epsilon_{x,t}$$

ここで $\ln(m_{x,t})$ は年齢別死亡率の対数値、 a_x は平均的な年齢別死亡率パターンとし、 $\epsilon_{x,t}$ は平均 0 の残差項を示す。 b_x 、 k_t の推定にあたっては、行列 $\ln(m_{x,t}) - a_x$ に特異値分解 (SVD) を行い、

$$\ln(m_{x,t}) - a_x = \sum_i u_{xi} q_i v_{ti} \quad (q_1 \geq q_2 \geq \dots)$$

との表現を得た後、第一特異値 q_1 に関連する項のみを取り出して、

$$k_t = q_1 v_{t1}$$

$$b_x = u_{x1}$$

とすることにより行う。このとき、 k_t は死亡の一般的水準（「死亡指数」と呼ばれる）、 b_x は k_t が変化するときの年齢別死亡率の変化を表すパラメータとなる。リー・カーター・モデルによる死亡率の投影は、 k_t を将来に向けて投影することにより行われるが、以下では、 k_t の将来投影は行わず、特異値分解によるパラメータ推定、及び、これらのパラメータによる推計値の実績値に対する再現性に焦点を当てて検討を行うこととする。

図 11 - 22 が比較検討結果を示したものである。図 11 と 17 は変換前の $\log m_x$ を、図 12 と 18 は変換後の $\log m_x$ を表している。図 13 と 19 は iso transformed-age map である。図 14 と 20 は $\log m_x - a_x$ を、図 15 と 21 は変換を行わないで得た $\log \hat{m}_x - a_x$ の推計値を、図 15 と 21 は変換を行って得た推計値を示したものである。

両者とも年齢変換を行わない場合、死亡率改善は垂直方向にのみ起きているのに対し、(図 15、21)、年齢変換を行った場合、 β_t と S_t の変動を反映してより複雑な死亡率改善が表現され、特に高齢部分での死亡率改善パターンをよく反映している様子が観察される (図 16、22)。また、両国の結果を比較してみると、日本のデータでは S_t の顕著な増加傾向を受け、死亡率改善パターンが高齢側へとシフトしていく傾向が反映されているのに対し、米国のデータでは S_t の変動幅が日本ほど大きくないため高齢側へのシフトは顕著ではなく、また、若年層では年齢変換が死亡率改善パターンの再現性に与える有効性は必ずしも明らかではないように見受けられる。

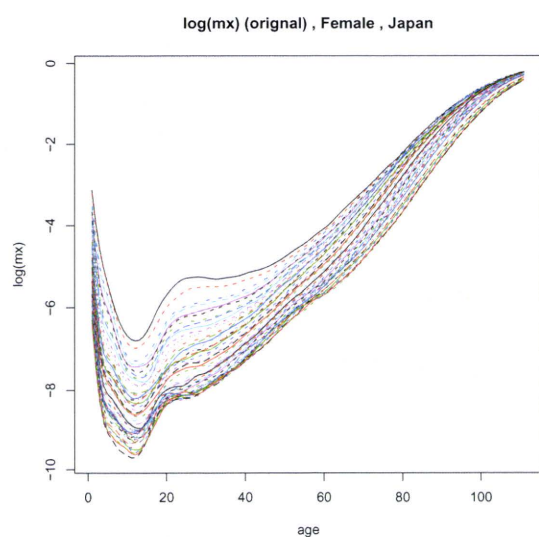


図 11 $\log m_x$, Female, Japan

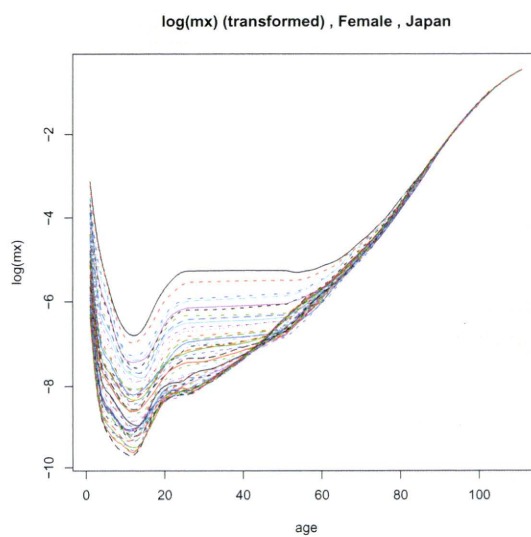


図 12 $\log \tilde{m}_y$, Female, Japan

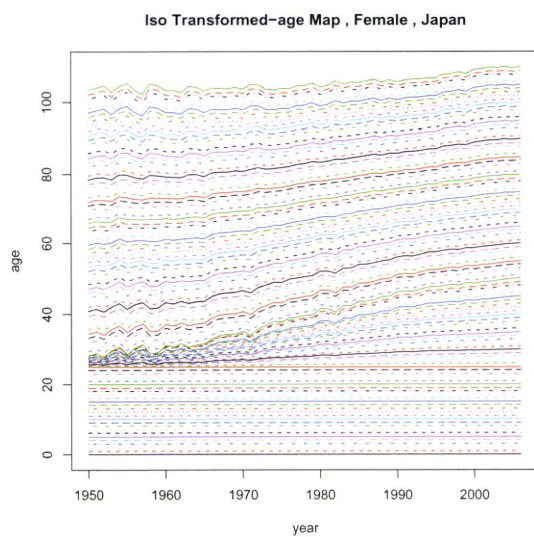


図 13 Iso Transformed-age Map, Female, Japan

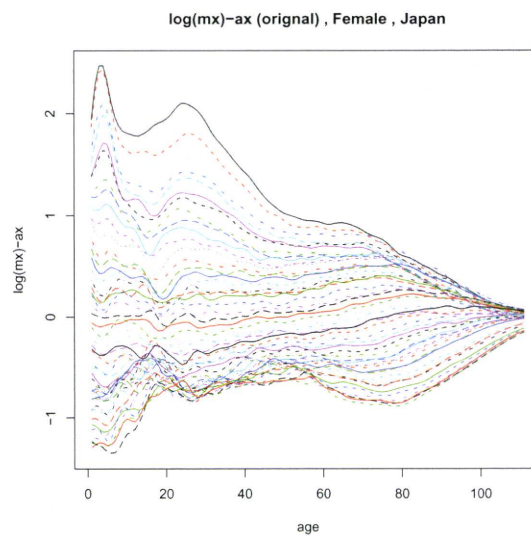


図 14 $\log m_x - a_x$, (original), Female, Japan

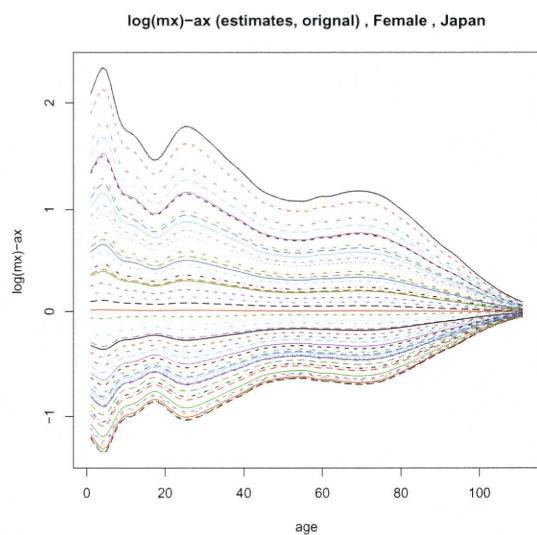


Figure 15 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (original), Female, Japan

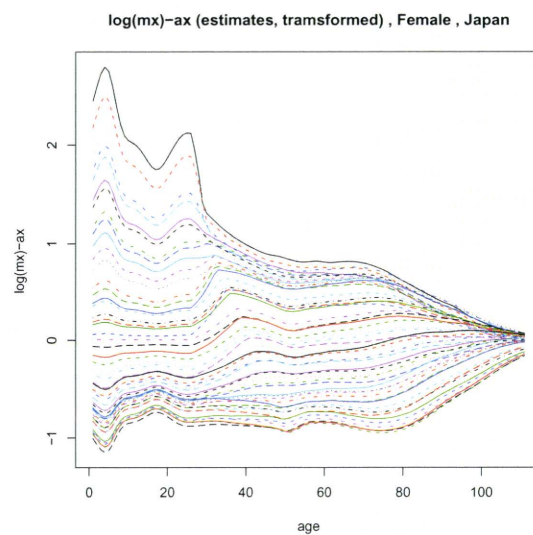


Figure 16 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (transformed), Female, Japan

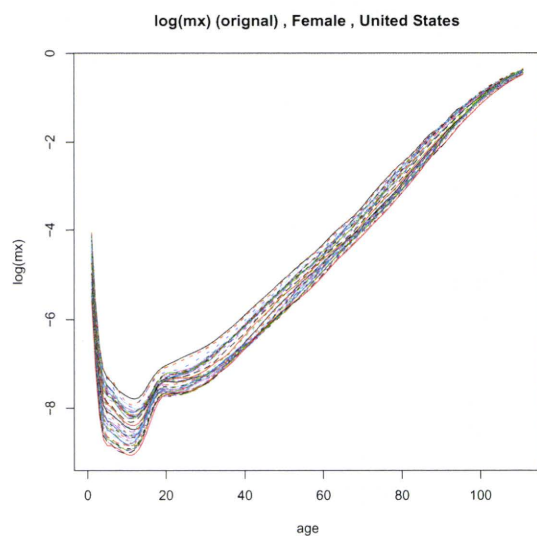


Figure 17 $\log m_x$, Female, USA

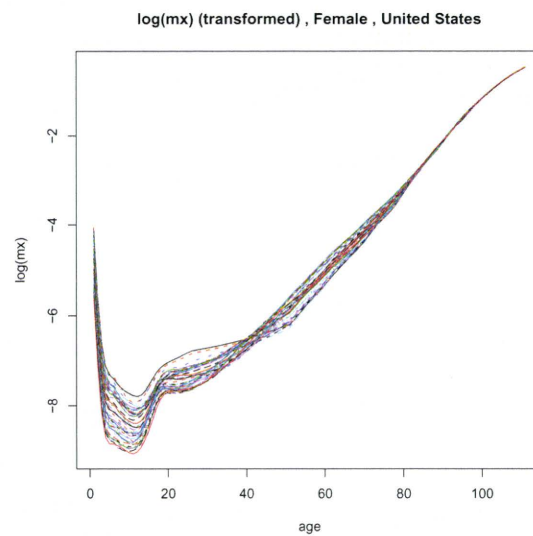
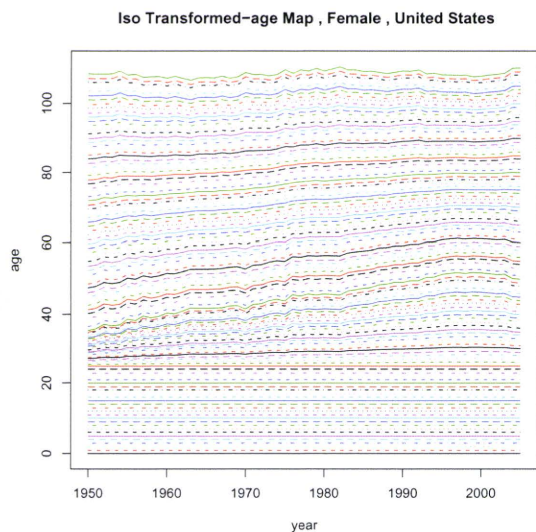
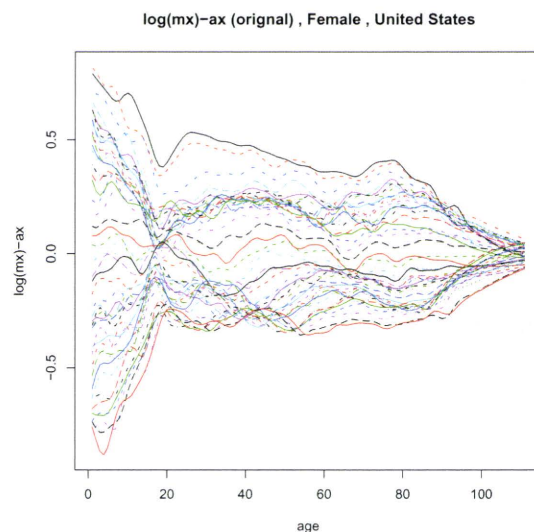


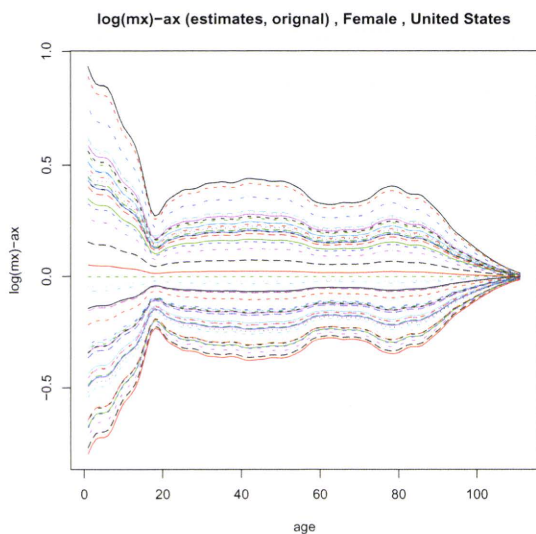
Figure 18 $\log \tilde{m}_y$, Female, USA



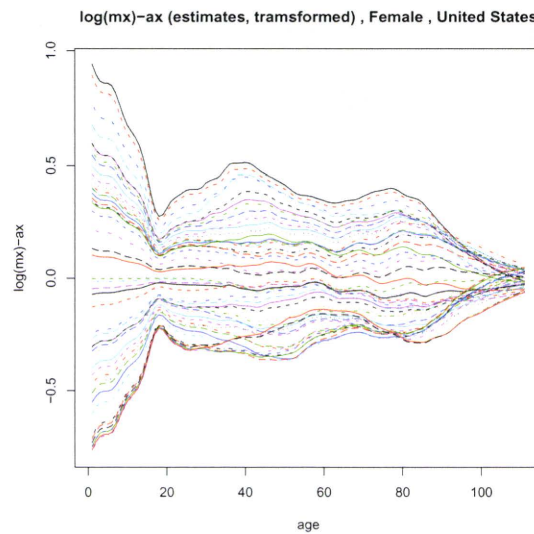
☒ 19 Iso Transformed-age Map, Female, USA



☒ 20 $\log m_x - a_x$, (original), Female, USA



☒ 21 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (original), Female, USA



☒ 22 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (transformed), Female, USA

2.2 リー・カーター・モデルへの年齢変換適用の評価

リー・カーター・モデルへの年齢変換適用の評価を行うため、以下で定義される $\rho_{x,t}$: 死亡率改善率を計算した。

$$\rho_{x,t} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \log \mu_{x,t}}{\partial t}$$

ここでも、 $m_{x,t}$ を $\mu_{x+0.5,t}$ の近似として用いた。リー・カーター・モデルにおいては、

$$\rho_{x+0.5,t} \approx -\frac{\partial \log m_{x,t}}{\partial t} = -\frac{\partial k_t}{\partial t} b_x$$

が成立する。すなわち、リー・カーター・モデルにおいては $\rho_{x,t}$ の年齢分布が一定であることを意味している。

ここでは、まず、5年平均死亡率 $\log m_{x,t}$, (1950 – 54, 1955 – 59, ...) を計算し、これを用いて10年間隔のペアから $\rho_{x,t}$ を計算した。図23は、日本のオリジナルデータに対する $\rho_{x,t}$ であり、年齢分布が時系列的に変化している様子が観察される。図24は、リー・カーター・モデルによる推計値の $\rho_{x,t}$ であり、年齢分布が一定であることがわかる。一方、図25は、年齢変換を伴うモデルでの $\rho_{x,t}$ であり、死亡率改善率の時系列変化を表すことに成功していることが読み取れる。図26 - 28は同様のものを米国のデータに関して評価したものであり、ここでも特に高齢死亡率においては年齢変換アプローチの有効性が示唆されたものの、一方で若年層の死亡率についてはどちらのアプローチがより有効であるかの評価はやや難しい。

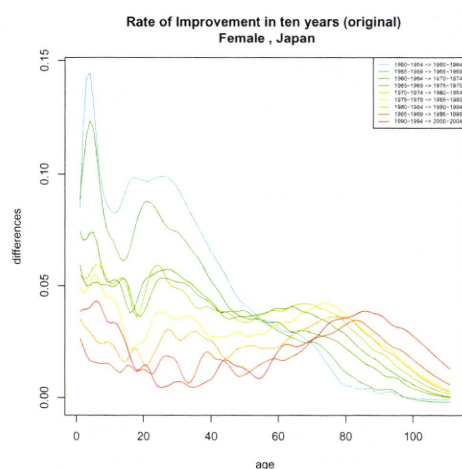


図 23 Rate of Improvement in ten years (original), Female, Japan

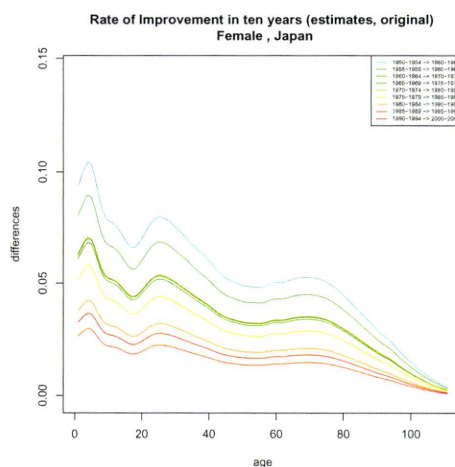
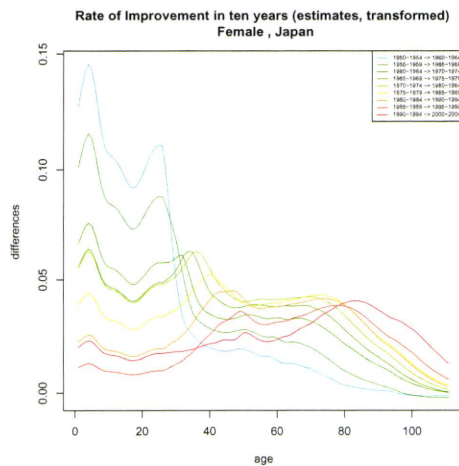
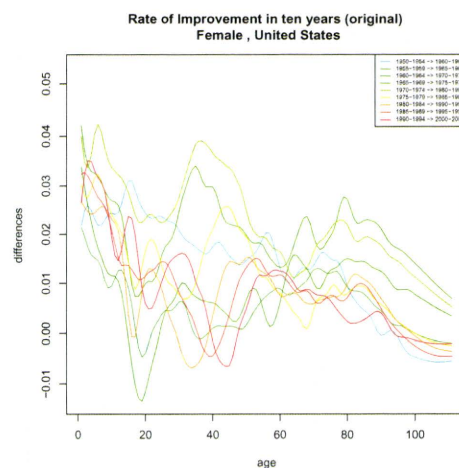


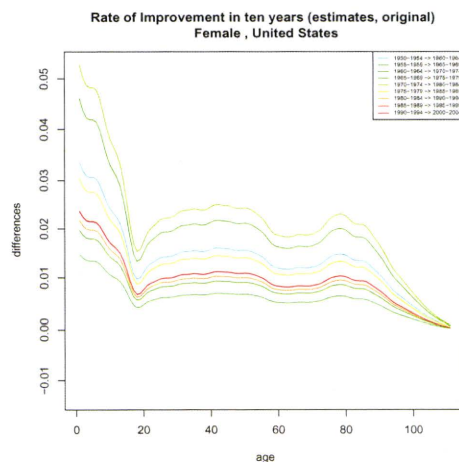
図 24 Rate of Improvement in ten years (estimates, original), Female, Japan



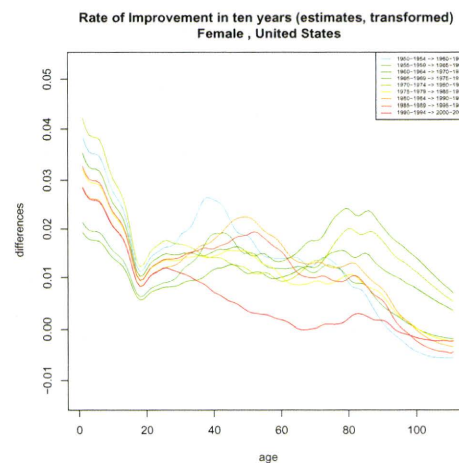
☒ 25 Rate of Improvement in ten years (estimates, transformed), Female, Japan



☒ 26 Rate of Improvement in ten years (original), Female, USA



☒ 27 Rate of Improvement in ten years (estimates, original), Female, USA



☒ 28 Rate of Improvement in ten years (estimates, transformed), Female, USA

3. 他の先進諸国データへの適用の試み

ここまで、日本と米国のデータを用いて、年齢変換アプローチの有効性を観察してきたが、ここでは、フランス、カナダ、イングランド・ウェールズを例として、他の先進諸外国データへの適用可能性を検討する。

3.1 フランス

フランスのデータに基づく結果を図 29～36 に示した。図 29～32 による S_t 、 β_t の動向を見ると、フランスのデータは S_t が男女とも単調増加を続けてきており、この点で日本のデータに近いといえるが、一方、 β_t も特に 1980 年以降増加を続けてきている。

次に、特に女子の死亡率についてリー・カーター・モデルへの適用を行った図 33～36 を見ると、オリジナルデータによる $\log m_x - a_x$ を表す図 34 によれば、 S_t の変化を受け、高齢部分でやや死亡率のシフトの効果が見られる。そして、この点は年齢変換アプローチに基づく推計値の方が再現性に優れていることが、変換を行わない $\log \hat{m}_x - a_x$ の推計値である図 35 と、変換を行って得た $\log \hat{m}_x - a_x$ の推計値である図 36 の比較から観察できる。

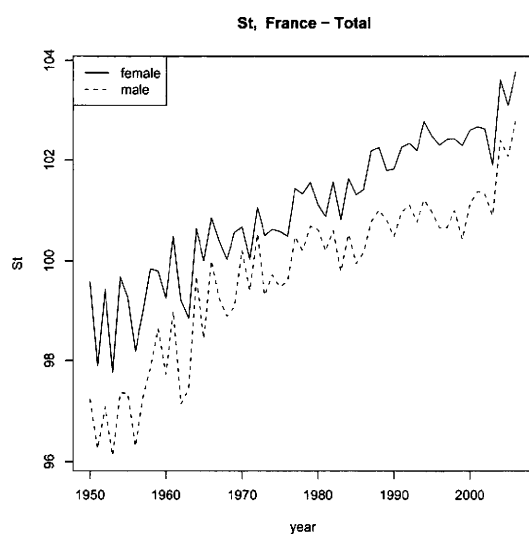


図 29 S_t (France)

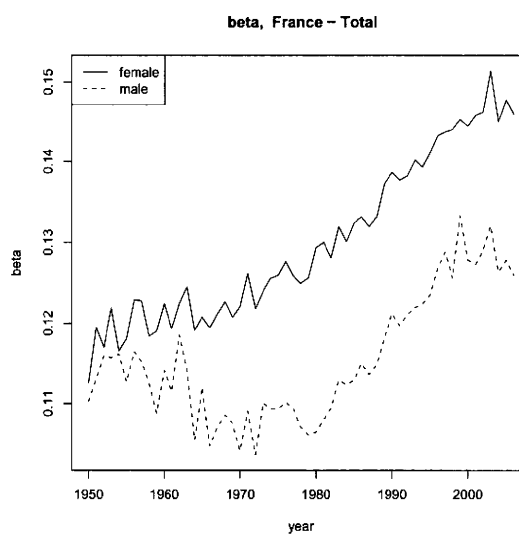


図 30 β_t (France)

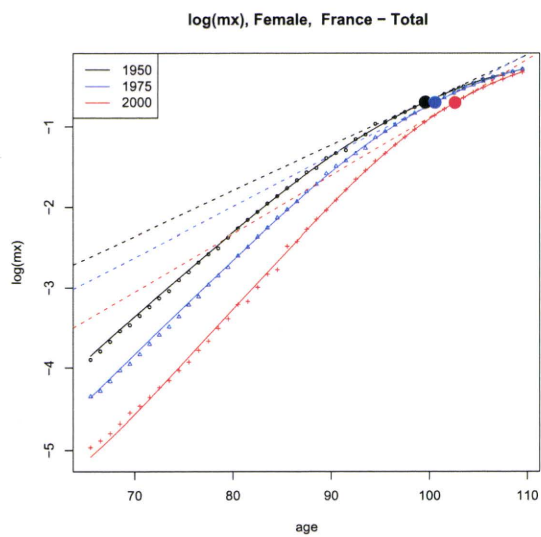


Figure 31 $\log(m_x)$ (1950,1975 and 2000, Female, France)

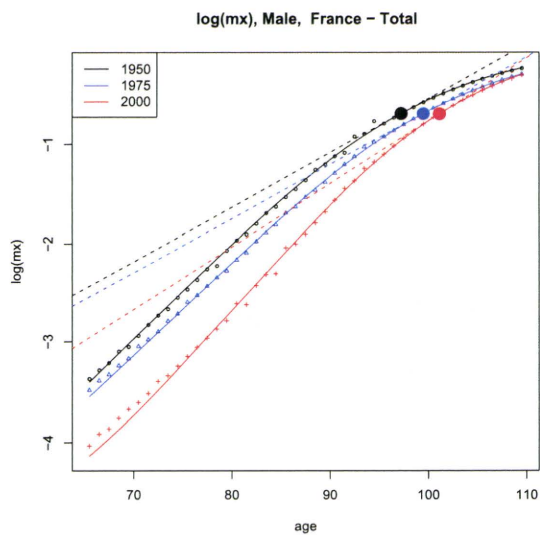


Figure 32 $\log(m_x)$ (1950,1975 and 2000, Male, France)

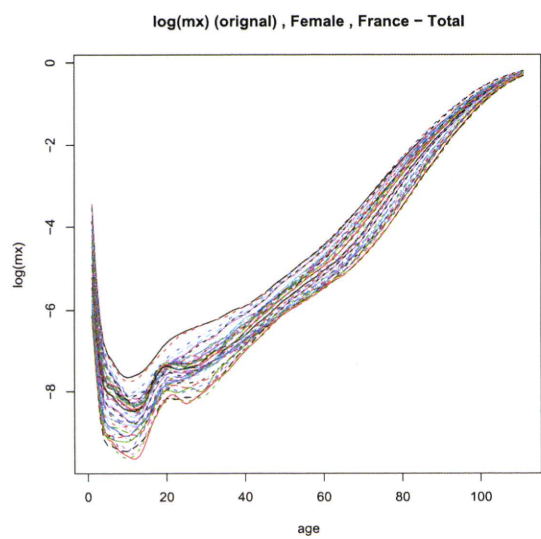


Figure 33 $\log m_x$, Female, France

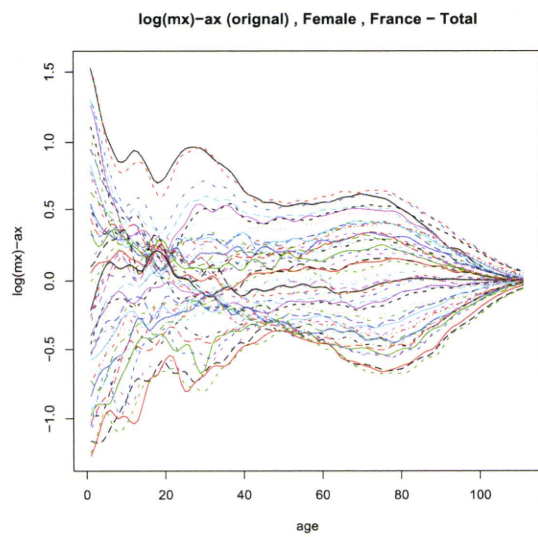


Figure 34 $\log m_x - a_x$, (original), Female, France

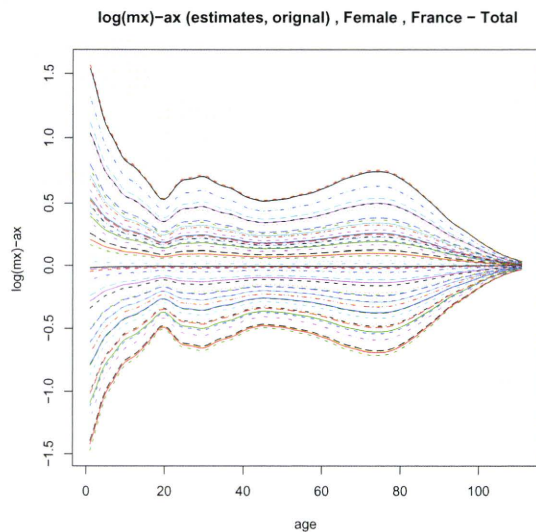


図 35 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (original), Female, France

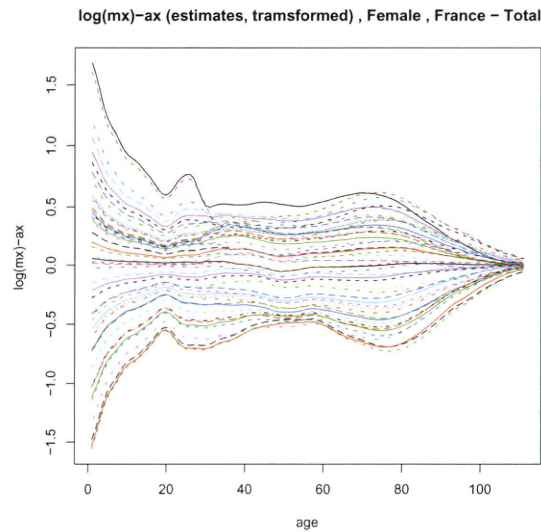


図 36 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (transformed), Female, France

3.2 カナダ

次に、カナダのデータに基づく結果を図 37～44 に示した。図 37～40 による S_t 、 β_t の動向を見ると、米国のように S_t が比較的小さい幅の中で変動しており、また単調な動きもしていない。一方、 β_t は特に 1980 年以降増加を示している。

女子の死亡率についてリー・カーター・モデルへの適用を行った図 41～44 によれば、評価がやや難しいものの、図 44 の年齢変換アプローチに基づく推計値 $\log \hat{m}_x - a_x$ では、高齢部分の死亡率の動きはオリジナルデータによる $\log m_x - a_x$ (図 42) にやや近いものの、近年の若年層の死亡動向を必ずしもうまく反映できていない。この点では、年齢変換を行わないで得られる $\log \hat{m}_x - a_x$ の推計値である図 43 と比べ、年齢変換による優位性はそれほど大きいものとはいえないと考えられる。米国とカナダのデータの検討から推察されるのは、現在の年齢変換は、 S_t の変動幅が比較的小さく、 β_t の増加傾向によって死亡率改善が起きるようなケースにおいては、高齢部分の死亡率改善パターンは改善するものの、特に若年層の死亡率推定においては通常のリー・カーター・モデルに対しての優位性はそれほど大きいものとはいえないということであろう。

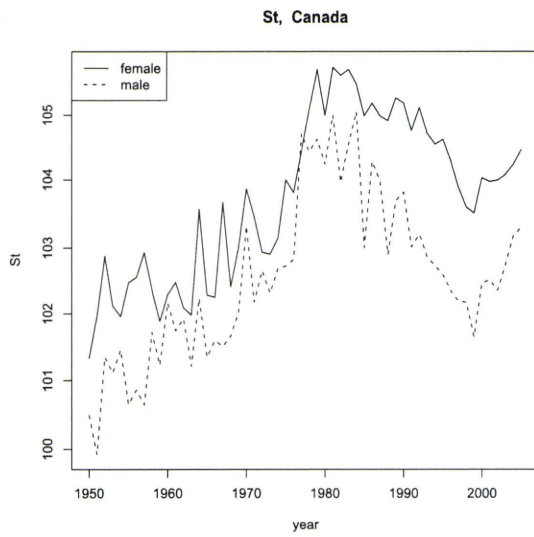


Figure 37 S_t (Canada)

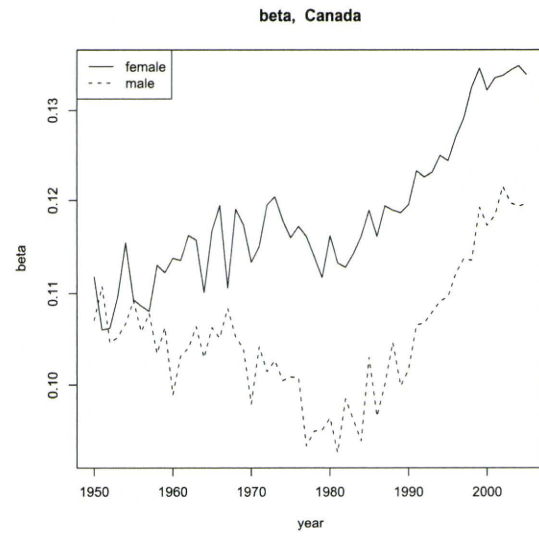


Figure 38 β_t (Canada)

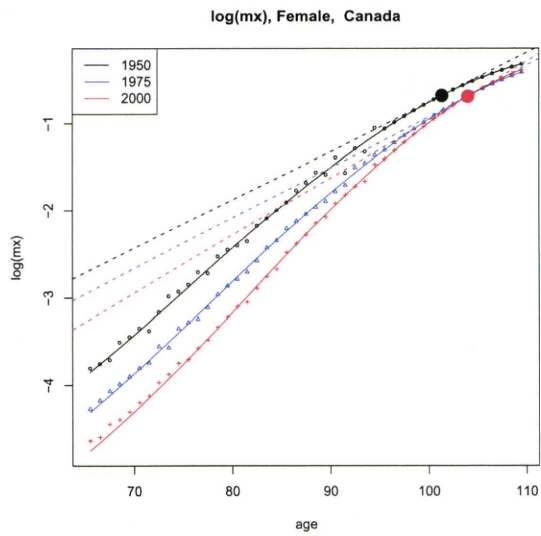


Figure 39 $\log(m_x)$ (1950,1975 and 2000, Female, Canada)

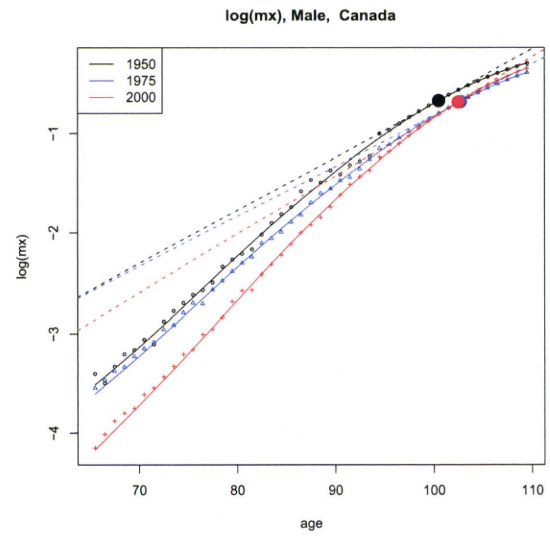


Figure 40 $\log(m_x)$ (1950,1975 and 2000, Male, Canada)

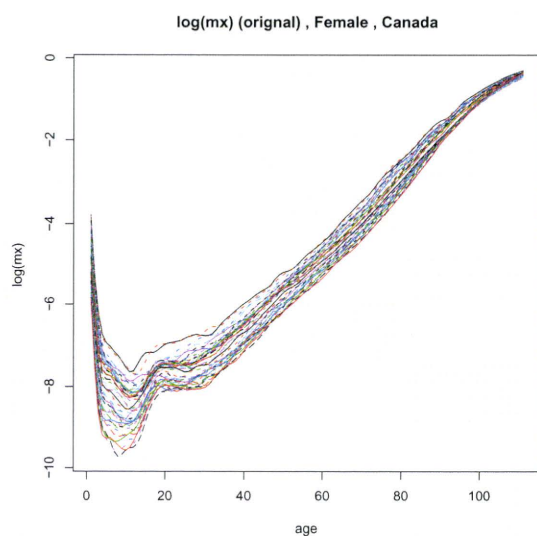


Figure 41 $\log m_x$, Female, Canada

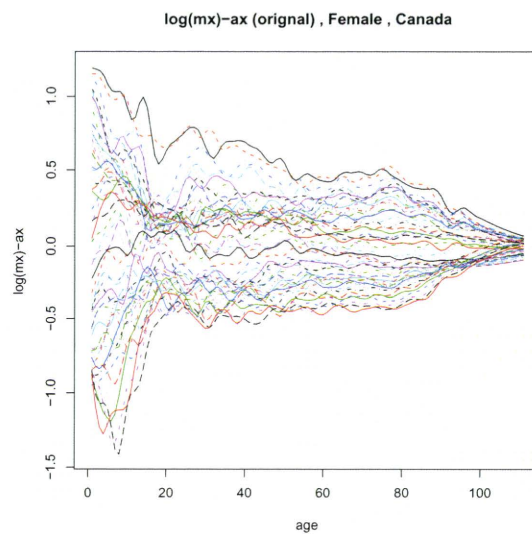


Figure 42 $\log m_x - a_x$, (original), Female, Canada

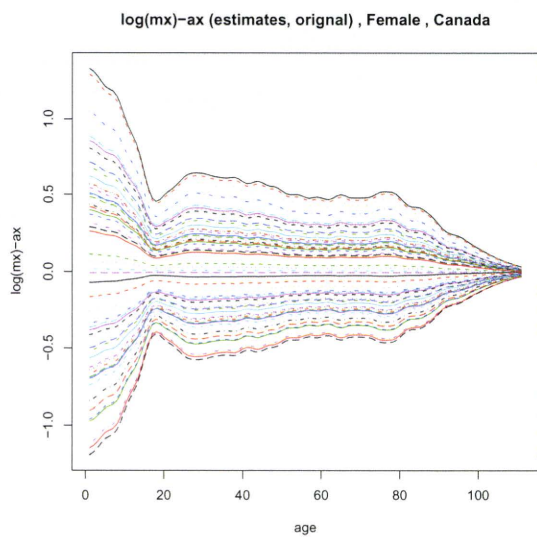


Figure 43 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (original), Female, Canada

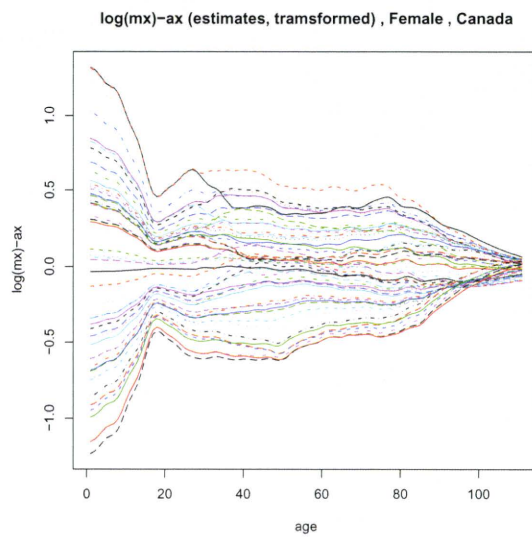


Figure 44 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (transformed), Female, Canada

3.3 イングランド・ウェールズ

最後に、イングランド・ウェールズに基づく結果である図 45～52 を見ることにする。イングランド・ウェールズでは、男女とも S_t は増加をしてきているが、その幅は男性の方が大きい。また、 β_t は、女性は 1970 年までは概ね一定でそれ以降増加を示しているのに対し、男性では 1980 年まで減少した後増加に転じるという動きをしている。

女子の死亡率についてリー・カーター・モデルへの適用を行った図 49～52 を見ると、オリジナルデータによる $\log m_x - a_x$ (図 50) がやや複雑な動きをしており、年齢変換を行わないで得られる $\log \hat{m}_x - a_x$ の推計値 (図 51)、年齢変換アプローチに基づく推計値 $\log \hat{m}_x - a_x$ (図 52) とともに再現性が必ずしも高いとはいえないように見える。特に、年齢変換アプローチに基づく推計値では、カナダにおいて見られたのと同様、近年の若年層の死亡動向をうまく反映できていない状況が観察され、ここでも若年層での年齢変換にさらなる検討の余地がある点が示唆されたといえよう。

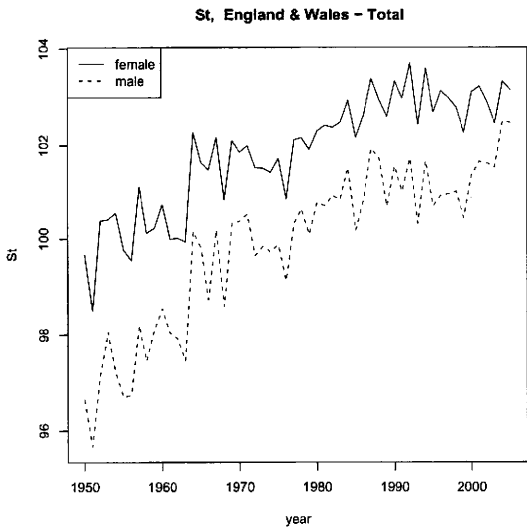


図 45 S_t (England and Wales)

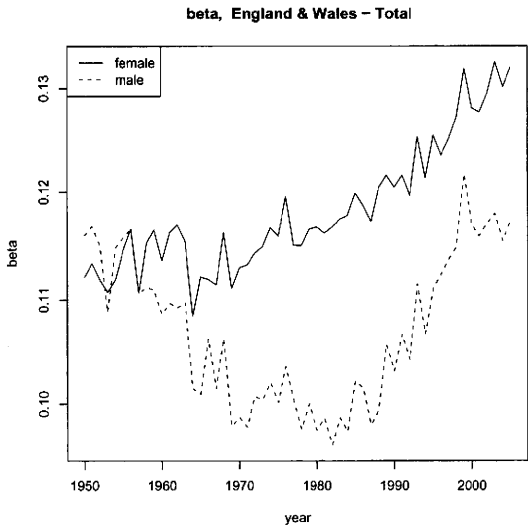


図 46 β_t (England and Wales)

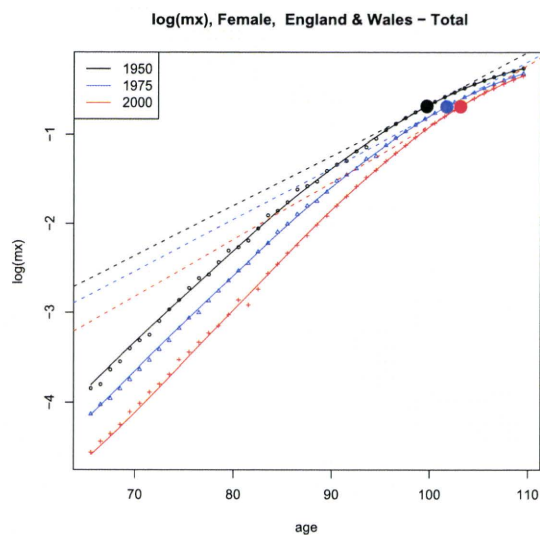


Figure 47 $\log(m_x)$ (1950, 1975 and 2000, Female, England and Wales)

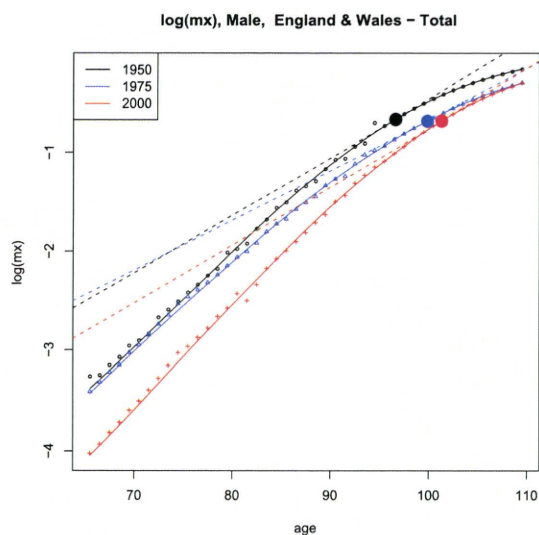


Figure 48 $\log(m_x)$ (1950, 1975 and 2000, Male, England and Wales)

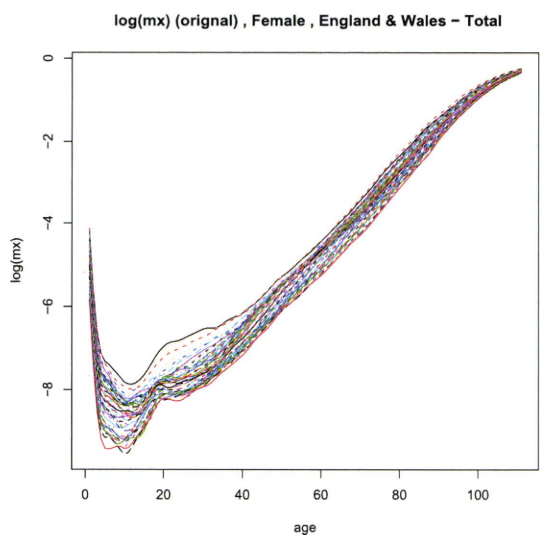


Figure 49 $\log m_x$, Female, England and Wales

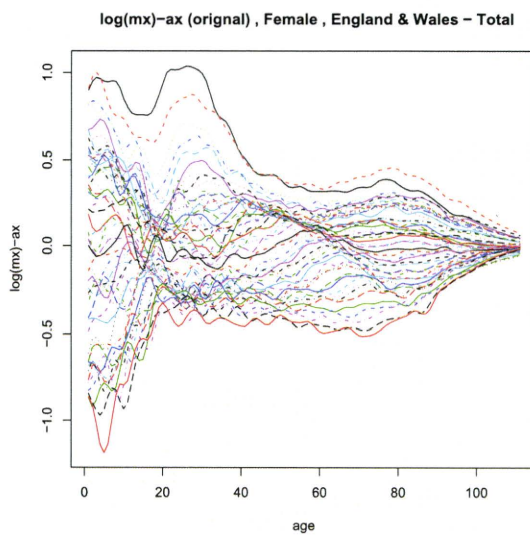


Figure 50 $\log m_x - a_x$, (original), Female, England and Wales

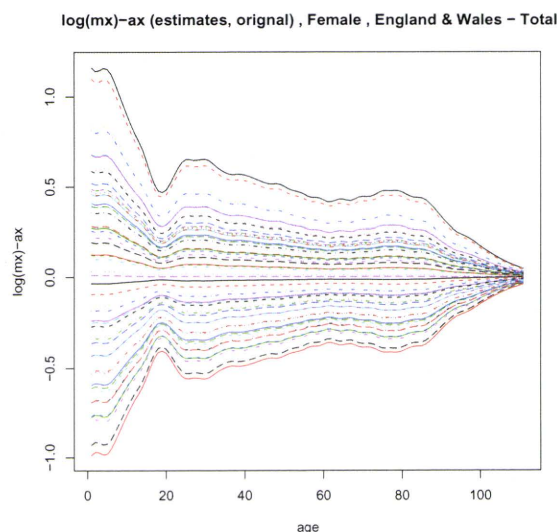


図 51 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (original), Female, England and Wales

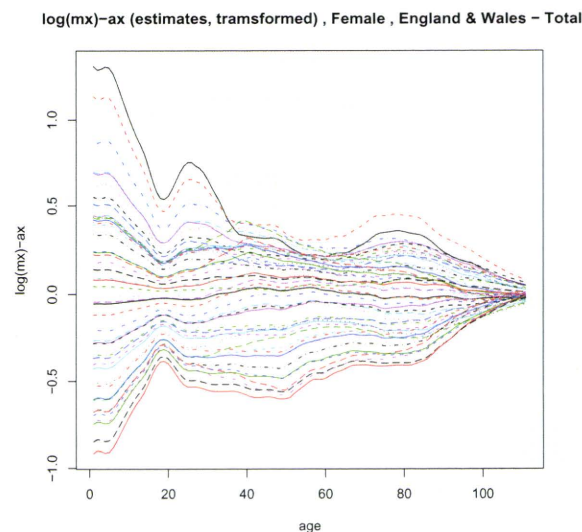


図 52 $\log \hat{m}_x - a_x$, estimates (transformed), Female, England and Wales

おわりに

本研究では、ロジスティックモデルと年齢変換との関係に関して再整理を行い、リー・カーター・モデルへの年齢変換の適用及びその評価について、わが国及び米国の死亡データを用いて検討を行った。この中では、 S_t, β_t 等のパラメータの動向等などから近年の両国の死亡動向に関する特性分析を行うとともに、リー・カーター・モデルへの年齢変換アプローチ適用による効果を評価し、年齢シフトモデルについてより幅広い観点から有効性を検証した。両国の比較から、わが国の高齢死亡率改善のパターンは米国と比べてより S_t の増加、すなわち、高齢方向への死亡率改善パターンのシフティングが顕著であり、年齢シフトモデルの持つ特性が有効に機能しているのに対して、米国のデータでは、若年層に対してはあまり有効に機能していない面があるということであろう。

また、フランス、カナダ、イングランド・ウェールズを例にとり、他の先進諸外国データへの適用可能性に関する分析を実行し、近年の各国の死亡動向の共通性・多様性、および年齢シフト構造との整合性等に関する比較検討結果を成果として得た。具体的には、フランスでは S_t が単調増加を続けてきており、高齢部分でやや死亡率のシフトの効果が見られたことから、この点で年齢変換アプローチに基づく推計値の方が再現性に優れていることが観察された。一方、カナダでは米国のように S_t が比較的小さい幅の中で変動しており、また単調な動きもしていない。このため、年齢変換による再現値は高齢部分ではやや優位性が認められたものの、近年の若年層の死亡動向を必ずしもうまく反映できていないことも観察された。米国とカナダのデータの検討から推察されるのは、現在の年齢変換

は、 S_t の変動幅が比較的小さく、 β_t の増加傾向によって死亡率改善が起きるようなケースにおいては、高齢部分の死亡率改善パターンは改善するものの、特に若年層の死亡率推定においては通常のリ・カーター・モデルに対しての優位性はそれほど大きいものとはいえないということである。また、イングランド・ウェールズでは実績死亡率改善パターンがやや複雑な動きをしており、年齢変換を行わない推計値・行った推計値ともに再現性が必ずしも高いといえないことが観察された。特に、年齢変換アプローチに基づく推計値では、カナダにおいて見られたのと同様、近年の若年層の死亡動向をうまく反映できていない状況が観察され、若年層での年齢変換にはさらなる検討の余地がある点が示唆された。

これらの結果は、死亡率モデルの理論的枠組みの再検討に対し、以下の二点のような示唆を与えているといえるだろう。一点目は、年齢シフトモデルがわが国の死亡率推計に対して有効に機能したのは、 S_t の顕著な増加に代表されるわが国の死亡率改善パターンの特殊性と結びついているのではないかと考えられる点である。世界の中でトップクラスの平均寿命を維持しつつ、さらに死亡率改善を継続しているわが国の死亡率は、他の先進諸外国と比較して特殊な状況にある。したがって、他の先進諸外国、特に S_t が小さい変動幅で推移している国では、現在の年齢シフトモデルで用いている年齢変換が必ずしも有効に機能するとはいえない状況が見られた。しかしながら、これは年齢シフトモデルの枠組みが他の先進諸外国に対して全く有効でないということではない。フランスのように、 S_t の増加傾向を反映して一定の効果が認められた国もあった。また、将来、他の先進諸外国においてさらに平均寿命が伸長する際に、わが国において経験されたような死亡率改善パターンと似たかたちで死亡率が改善していくことも考えられ、その際には、年齢シフトモデルにおいて用いられた年齢変換は有効に働く可能性を秘めているといえよう。

二点目は、年齢シフトモデルにおいて用いられた年齢変換は、いくつかの国のデータに対して、近年の若年層の死亡動向をうまく反映できていない状況が観察され、若年層での年齢変換に関してさらなる検討の余地が示唆された点である。 S_t の変動幅が比較的小さく、 β_t が大きく変化した場合、年齢シフトモデルにおける年齢変換の枠組みは、若年層の死亡率を死亡率改善パターンの表現性を高めるのとは関係ない方向に変換を行っている可能性がある。このような性質を持つ死亡率データに対しても有効な年齢変換を検討することは、年齢シフトモデルを改善する一つの方向性であるとも考えられ、今後更なる検討が必要な課題であると考えられる。

最後に、本研究においては、年齢シフトモデルを年齢変換という概念を用いて再整理したが、これは単に方法論上の問題というだけではなく、実体としてのライフサイクルにも関連する問題であることを付言しておく。例えば、石井 (2008b) においては、等価退職年齢という概念を利用して老年従属人口指数に関する再検討を行ったが、この等価退職年齢は一種の年齢変換であり、年齢シフトモデルに用いた年齢変換を使って新たな等価退職年齢を定義することも可能である。このような観点からライフサイクルを再考することは、死亡率改善が社会・経済に与える影響を分析する上でも重要な問題であると考えられ、今

後さらなる研究が必要な課題であると考えられる。

参考文献

- Bongaarts, J. (2005) "Long-range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods", *Demography*, Vol. 42, No. 1, pp. 23–49.
- 石井太 (2008a) 「近年のわが国の死亡動向に適合した 将来生命表推計モデルの研究-年齢シフトモデルの開発-」, 『人口問題研究』, 第 64 巻, 第 3 号, pp.28–44.
- (2008b) 「人口変動要因が将来推計人口の年齢構造に与える影響-老年従属人口指数を中心として-」, 『人口学研究』, 第 43 巻, pp.1–20.
- 国立社会保障・人口問題研究所 (2007) 『日本の将来推計人口—平成 18 年 12 月推計—』, (財) 厚生統計協会.
- Lee, R. and L. Carter (1992) "Modeling and Forecasting U.S. Mortality", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419, pp. 659–675.
- Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de.

6 死亡率推計モデルにおける年齢変換アプローチの応用

石井 太

はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成 18 年 12 月推計）」(国立社会保障・人口問題研究所 2007) の将来生命表作成にあたっては、現在国際的に標準的な方法とされ、平成 14 年 1 月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えた「年齢シフトモデル」により死亡率の投影を行った(石井 2008)。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線をあてはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

この年齢シフトモデルは、死亡率のモデリングに際し、単なる年齢軸のシフト（平行移動）のみならず、年齢スケールの変換をも同時に組み合わせていることから、理論的にはより一般的な「年齢変換」という概念を用いることで統一的に扱うことができることを昨年度の研究で示した。しかしながら、実際のモデリングにあたっては、いかに有効な年齢変換を定義できるかということが問題であり、そのためには、対象となるデータの特性に立ち返って考えることが必要となる。昨年度の研究において、年齢変換の概念から年齢シフトモデルを理論的に整理した際、基礎となっていたデータ特性とは、わが国の高齢死亡率をロジスティック曲線にあてはめた場合のパラメータから観察されたものであった。すなわち、わが国では 1950 年以降、年齢シフト量（横方向への動き）を表すパラメータ S_t が大きく増加しているという特性が観察されたことから、ロジスティック曲線のパラメータを用いることで有効な年齢変換の定義を導いたのである。

本研究は、これまでとは異なる角度から、わが国の死亡率モデルに対する有効な年齢変換を定義するための基礎的な検討を行うことを目的とする。議論は以下のように進められる。まず、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証することを通じ、わが国の死亡データ特性に関する再検討を行う。この目的のため、成年死亡率のモデリングに焦点を絞り、既存のモデルに新たに提案するモデルを加えた 5 つの死亡モデルを比較・検証する。この議論の中では、死亡モデルの微分型表示が本質的な役割を果たすこととなるが、この表示を利用すると、対数死亡率曲面上の接ベクトル場として年齢変換が定義されることを述べる。また、年齢シフトモデルのロジスティック曲線パラメータによる年齢変換と、新たなモデルによ

る接ベクトル場としての年齢変換の関係について述べる。

1 対数死亡率曲面の2つの表示方法

本節では、対数死亡率曲面の2つの表示方法、及び対数死亡率とその逆関数についてまとめ、次節以降の死亡モデルで用いられる微分型表示に関する準備を行う。

$X = [0, +\infty)$ を年齢、 $T = (-\infty, +\infty)$ を時間を表す変数とする。以下の死亡モデリングの議論においては、年齢 $x \in X$ 、時刻 $t \in T$ における死力関数 $\mu_{x,t}$ を用いる。また、本稿においては、

$$y = \lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t}$$

で死力の対数を表すこととする。ここで、 $y \in Y = (-\infty, +\infty)$ は対数死力関数の値を表す。このとき、 S を、

$$S = \{(x, t, y) | y = \lambda_{x,t}\}$$

とすると、これにより、 $\mathbb{R}^3$ における曲面が定義される。これを、対数死亡率曲面 (the log mortality surface) と呼ぶことにする。これは、対数死亡率曲面の一般的な表示方法である。この表示方法において、 $y = \lambda_{x,t}$ は、 $\mathbb{R}^3$ の中で、 X - T 平面からの高さで捉えることができる。

ここで、一定の仮定の下で、対数死亡率曲面の別の表示方法について考えよう。

以下、 $\lambda_{x,t}$ は、 $X_0 \times T_0 = [0, \omega] \times [t_0, t_1] \subset X \times T$ 上で定義された、 x と t に関する滑らかで連続な関数であると仮定する。ただし、 $\omega < +\infty$ は死亡率モデルを考える上でのある有限な年齢の最大値とする。

成人死亡率のモデリングにあたっては、さらに、 $\lambda_{x,t}$ は各 t について、 $x > x_0(t)$ の範囲で x について狭義単調増加であると仮定してよい。ここで、 $x_0(t)$ は各 t について、 $\lambda_{x,t}$ が狭義単調増加関数となる x の下限値を示す。このとき、各 t に対して、関数 $\lambda_t(x)$

$$\lambda_t: \tilde{X}_t \rightarrow Y, \quad \lambda_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{x,t}$$

は x について単射である。ただし、 $\tilde{X}_t = [x_0(t), \omega]$ である。 $\tilde{Y}_t = \lambda_t(\tilde{X}_t)$ とすると、関数 $\lambda_t(x): \tilde{X}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$ は各 t について、 $\tilde{Y}_t$ 上で定義される逆関数 $\nu_t(y): \tilde{Y}_t \rightarrow \tilde{X}_t$ を持つ。

そこで、 Y_0 を以下のように定義する^{*1}。

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} [y_0, y_1] \quad \text{ただし} \quad y_0 = \sup_{t \in T_0} \min \tilde{Y}_t, \quad y_1 = \inf_{t \in T_0} \max \tilde{Y}_t,$$

このとき、 $\nu_{y,t}: Y_0 \times T_0 \rightarrow X_0$ を

$$\nu_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_t(y)$$

^{*1} $x_0(t)$ は必ずしも連続とは限らないため、 $\{\min \tilde{Y}_t | t \in T_0\}$ には最大値がない可能性もある。

により定義する。 $v_{y,t}$ は、時刻 t における対数死力関数の値が y となるような年齢 x を示している。

さらに、これらの関数の時間微分から、以下の2つの関数を定義する。すなわち、(1) $\rho_{x,t}$: 死力改善率と (2) $\tau_{y,t}$: 年齢増加率である。これらは後述する死亡モデルの微分型表示において用いられる。

$$\rho_{x,t} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \lambda_{x,t}}{\partial t} = -\frac{\partial \log \mu_{x,t}}{\partial t}$$

$$\tau_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_{y,t}}{\partial t}$$

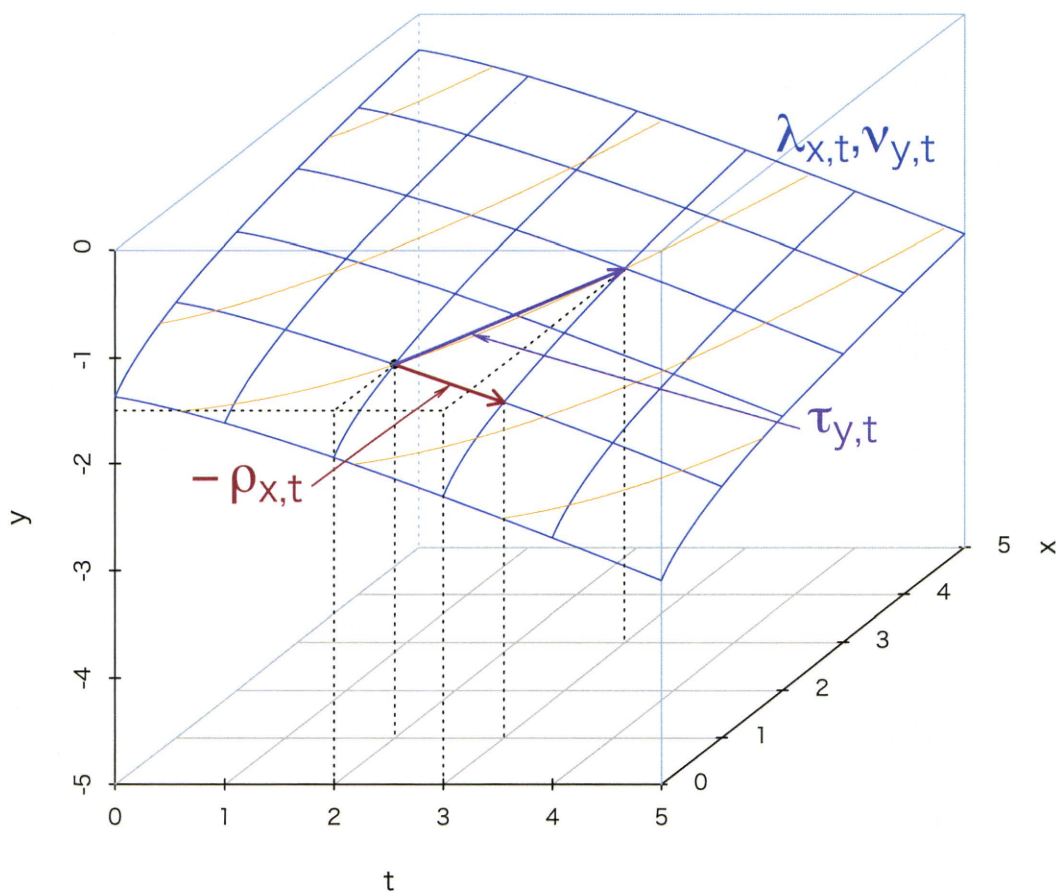


図1 Log Mortality Surface and Two Differential Functions

図1は、対数死亡率曲面と上記の二関数を模式的に示した例である。青い線は通常の表