## 3 弱エルゴード性

時間依存の動態率をもつ線形人口モデル (2.1) がもつもう一つの著しい特性は**弱エルゴード性** (weak ergodicity) である。いま初期年齢分布が異なるだけで、同じ出生、死亡の動態率に従う 2 つの人口の時間発展を考えよう。簡単のため、ここでは一次元で考える。このとき各人口の出生数を $B_1(t)$, $B_2(t)$ とすれば、スカラーの再生方程式によって、

$$B_i(t) = G_i(t) + \int_0^t \psi(t,a)B_i(t-a)da, \quad i=1,2, \tag{3.1}$$

と書ける。ここで $\psi(t,a)$ は一次元の純再生産関数である。再生産年齢の上限を $\omega$ とすれば、$t>\omega$ では $G_i(t)=0$ であるが、再生産年齢より高齢の人口しか含まない「自明な」初期条件をのぞけば $0 \le t < \omega$ では $G_i(t)>0$ である。このとき二つの出生率時系列の比 $B_1/B_2$ は $t\to\infty$ において、一定値に収束することが示される。

一般的な証明は Inaba ([12]) に譲り、ここでは直感的な説明をおこなおう。いま初期人口が死滅したあと $(t>\omega)$ で考えると、$G_i(t)=0$ でかつ $a>\omega$ では $\psi(t,a)=0$ であるから、

$$\frac{B_1(t)}{B_2(t)} = \frac{\int_0^\omega \psi(t,a)B_1(t-a)da}{\int_0^\omega \psi(t,a)B_2(t-a)da} = \int_0^\omega \left[\frac{\psi(t,a)B_2(t-a)}{\int_0^\omega \psi(t,\zeta)B_2(t-\zeta)d\zeta}\right]\frac{B_1(t-a)}{B_2(t-a)}da \tag{3.2}$$

ここで、

$$x(t) := \frac{B_1(t)}{B_2(t)}, \quad \Theta(t,a) := \frac{\psi(t,a)B_2(t-a)}{\int_0^\omega \psi(t,\zeta)B_2(t-\zeta)d\zeta} = \psi(t,a)\frac{B_2(t-a)}{B_2(t)},$$

とおけば、(2.11) は

$$x(t) = \int_0^\omega \Theta(t,a)x(t-a)da \tag{3.3}$$

とかけ、しかも

$$\int_0^\omega \Theta(t,a)da = 1$$

である。従って (3.3) は過去の長さ $\omega$ のデータ $x(t)$ の平均をとる操作を反復していくプロセスを表現している。適当な条件のもとでは過去のデータの振幅は単調に減少して、終局的には $x(t)$ は一定の値に収束することが期待できる。

出生数が比例するようになれば、生残率は共通だから二つの人口の年齢分布は漸近的に比例してくるようになる。このことは線形人口モデルにおいては初期条件が年齢分布に及ぼす影響は過渡的なものであって、それは時間とともに消失して動態率だけによってきまる年齢構造が一義的に出現してくることを意味している。このような性質を**弱エルゴード性** (weak ergodicity) とよぶ。

弱エルゴード性を過去のデータ時系列に適用してみると、遠い過去の初期条件の違いは時間とともに消失するから、十分に長い時間の動態率の時系列は現在ないし最近過去の年齢構造の変化を（スケールを除いて）ほぼ一義的に決めていることがわかる。極限的な場合を考えると、無限に長い動態率の歴史と矛盾のない年齢構造の変化の歴史は一通りに決まってしまうことになる ([12])。

特に時間不変な動態率をもつ安定人口モデルにおいては、$\psi(t,a)$ が時間に依存しないために、オイラー・ロトカの特性方程式

$$\int_0^\omega e^{-\lambda_0 a}\psi(a)da = 1$$

をみたす自然成長率 $\lambda_0$ がただ一つ存在した。そこで $B_1(t)$ として、特殊解 $e^{-\lambda_0 t}$ を選べば、$\theta(a)=e^{-r_0 a}\phi(a)$ であり、$x(t)$ は定数に漸近する。そこで一般の解 $B_1(t)$ に対して、$t\to\infty$ において $x(t)=B_1(t)/e^{\lambda_0 t}\to const.$ であることがわかる。すなわち、弱エルゴード性によってほかの任意の解もまた漸近的にマルサス成長することがわかる。これが安定人口モデルの**強エルゴード性** (strong ergodicity) である。

# 4 変動環境における人口再生産

## 4.1 非自律系の成長特性

パラメータ変動に関してなんらの法則性も仮定しなければ、線形人口モデルに関して弱エルゴード性以上の性質を期待できない。しかし、弱エルゴード性が成り立つ過程においては、時間に関して持続的な特殊解が存在すれば、一般解の漸近挙動はその特殊解と同様だからである。

一般に、複素数 $\lambda\in\mathbf{C}$ と正の有界関数 $\phi(t,a)$ が存在して、$e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が人口発展システム $U(t,s)$ と共立[*3]であるときに、これを**指数関数解** (exponential solution) とよび、$\lambda$ をその**内的成長率**とよぼう。弱エルゴード的過程では、指数関数解が存在すれば、正の解はすべてそれに漸近的に比例するから、内的成長率 $\lambda$ が長期的成長特性を表現している。モデル (2.1) における微分を、注 2 で示したような方向の微分 $D$ によって置き換えて、弱い解を考えれば以下が示される：

**定理 4.1** $f(t,a)$ が $U(t,s)$ と共立であるためには、$f(t,\cdot)\in X_+$ であり、かつ以下が成り立つことが必要十分である：

$$
\begin{aligned}
f(t,a) &= L(a;t-a,0)f(t-a,0)\\
f(t,0) &= \int_0^\omega \Psi(t,a)f(t-a,0)da,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

**系 4.2** $U(t,s)$ と共立な関数 $f(t,a)$ が存在するためには、ある可測関数 $\phi(t)$, $-\infty<t<\infty$ が存在して

$$
\phi(t)=\int_0^\omega \Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.2}
$$

となることが必要十分である。

そこで指数関数解 $e^{\lambda t}\psi(t,a)$ が存在しているとすれば、$f(t,0)=e^{\lambda t}\psi(t,0)$ であるから、$\phi(t):=\psi(t,0)$ として (4.2) に代入すれば、以下がなりたたねばならないことがわかる：

$$
\phi(t)=\int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.3}
$$

逆に (4.3) をみたす $\lambda$ と有界可測な $\phi(t)$ が存在すれば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi(t-a)$ が (4.1) を満たし、$U(t,s)$ と共立な指数関数解になる。

いま形式的な非負作用素 $K(\lambda)$ を

$$
(K(\lambda)\phi)(t):=\int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.4}
$$

[*3] $X$-値の関数 $f(t)$, $-\infty<t<\infty$ が、$f(t)=U(t,s)f(s)$, $-\infty<s\le t<\infty$ をみたすとき、$f(t)$ は $U(t,s)$ と共立 (consistent) であるという。

と定義すれば、ある実数 $\lambda_0$ に対して $K(\lambda)$ が固有値 1 と対応する（有界可測な）正の固有関数 $\phi_0$ をもてば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ は正の指数関数解を与えることになる。逆に、指数関数解が存在するならば、有界可測関数の空間上で作用素 $K(\lambda)$ は固有値 1 を持たねばならない。

一般に $K(\lambda)$ がコンパクト作用素であれば、Krein-Rutman の定理などによって $K(\lambda)$ がそのスペクトル半径 $r(K(\lambda))$ を固有値として、対応する正の固有関数をもち、$r(K(\lambda))$ は $\lambda$ の単調減少関数になることが期待されるから、ある実数 $\lambda_0$ が存在して $K(\lambda_0)$ が固有値 1 と対応する有界可測な正の固有関数 $\phi_0$ をもつであろう。その場合、

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(K(0)) - 1) \tag{4.5}$$

となるから、正作用素 $K(0)$ を、そのスペクトル半径が人口成長の閾値を与えるという意味で次世代作用素（純再生産作用素）として定義して、そのスペクトル半径を基本再生産数（純再生産率）として定義できる*4。

## 4.2 周期系の場合

人口動態が周期的である場合は、指数関数解の存在する最も重要なケースであり、安定人口モデルと同様な漸近挙動が得られる*5。

いま $Q(t,a)$, $M(t,a)$ は時間 $t$ に関して周期 $\theta$ をもつ連続関数であると仮定しておこう。すなわち

$$M(t+\theta,a) = M(t,a), \quad Q(t+\theta,a) = Q(t,a)$$

このとき以下が成り立つ：

$$L(x;t+\theta,a) = L(x;t,a). \tag{4.6}$$

そこで、さらに表現 (2.5) から以下が成り立つことがわかる：

$$U(t+\theta,s+\theta) = U(t,s). \tag{4.7}$$

周期系に関しては、複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ と、時間に関して周期的な関数 $\phi(t,a)$ が存在して、$e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が $U(t,s)$ と共立である場合、それを周期系の指数関数解とよび、$\lambda$ をその内的成長率とよぼう。

**補題 4.3** 内的成長率 $\lambda$ の指数関数解が存在するためには、モノドロミー作用素 $U(\theta,0)$ が正固有値 $e^{\lambda\theta}$ をもつことが必要十分である*6。

**証明：** 指数関数解 $e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が存在すれば、以下のように書けているはずである：

$$e^{\lambda t}\phi(t,a) = (U(t,0)\phi_0)(a), \quad \phi_0 := \phi(0,a).$$

ここで、周期性から $\phi(\theta,a) = \phi(0,a)$ であるから、$e^{\lambda\theta}\phi_0 = U(\theta,0)\phi_0$ を得る。これは $U(\theta,0)$ が固有関数 $\phi_0$ と対応する固有値 $e^{\theta\lambda}$ を持つことを意味している。逆に $e^{\theta\lambda}$ が $U(\theta,0)$ の固有値であれば、ある可積分関数 $\phi_0$

*4 Thieme ([17]) は evolution semigroup の概念によって、指数関数解やエルゴード性を利用することなく、適当な $\phi$ の関数空間に関し、$\mathrm{sign}(\omega(U)) = \mathrm{sign}(r(K(0)) - 1)$ が一般に成り立つことを示している。ここで $\omega(U)$ は発展システム $U(t,s)$ の指数関数的成長上限 (exponential growth bound) であり、

$$\omega(U) := \inf\{\omega : \text{there exists a } M \geq 1 \text{ such that } |U(\tau+s,s)| \leq Me^{\omega\tau}, \forall s \in \mathbf{R}, \tau \geq 0\}$$

と定義される。

*5 周期係数をもつ安定人口モデルに関する初期の研究として Coale ([6]) がある。

*6 時間原点をずらして $U(s+\theta,s)$ を考えても得られる条件は同じである。

が存在して、$e^{\lambda\theta}\phi_0 = U(\theta,0)\phi_0$ となる。(4.7) によって $e^{-\lambda t}U(t,0)\phi_0$ は時間について周期的な可積分関数値関数となる。そこで、$U(t,0)\phi_0$ は $\lambda$ を成長率とする指数関数解になる。(証明終)

一般線型人口モデル (2.1) に対応する発展システム $U(t,s)$ は正作用素であるから、適当な条件のもとで、モノドロミー作用素 $U(\theta,0)$ は正固有値 $\rho_0$ と対応する正固有ベクトル $\phi_0$ をもつ。その場合、$\lambda_0 = (\log\rho_0)/\theta$ とすれば、$U(t,0)\phi_0$ は $\lambda_0$ を成長率とする指数関数解になる。このとき

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(\rho_0 - 1) \tag{4.8}$$

であり、$U(t,s)$ が弱エルゴード的であれば、任意の正の解は、漸近的に正の指数関数解に比例する。したがって、人口が潜在的に正の成長力をもつか否かは、モノドロミー作用素の正固有値が 1 より大きいか否かに対応している。その意味で $\rho_0 = r(U(\theta,0))$ は安定人口モデルにおける純再生産率に相当する役割を果たしている。

しかし、$U(\theta,0)$ は (2.5)-(2.6) によって解析的に表現できるにしても、その計算は容易ではなく、自律系の場合の純再生産行列と対応していない。実際、$M(t,a)$, $Q(t,a)$ が時間的に依存しなければ、$U(t,s) = T(t-s)$ として人口半群 $T(t)$ が得られ、$U(\theta,0) = T(\theta)$ は初期時刻の年齢密度分布を $\theta$ 時間後のそれに変換する（期間的な変動を記述する）作用素となるから、世代ごとの変化を記述する純再生産行列とは非常に異なっている。

そこで、自律系に対する純再生産行列の直接的な拡張と見なせるような、周期系における次世代作用素として $K(0)$ を定義しよう。$\mathbf{R}$ 上の $\theta$ 周期の連続関数の空間 $E := C_\theta(\mathbf{R}:\mathbf{R}^n)$ における線形作用素 $K(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ を

$$(K(\lambda)\phi)(t) := \int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.9}$$

と定義しよう。上記の議論から、ある実数 $\lambda_0$ に対して $K(\lambda)$ が固有値 1 と対応する正の固有関数 $\phi_0 \in E_+$ をもてば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ は正の指数関数解を与えることになる*7。

この場合、$K(\lambda)$ は実数 $\lambda$ に対しては正のコンパクト作用素*8であるから、もしそれが強正値 (strongly positive) であれば、Krein-Rutman の定理によって、そのスペクトル半径 $r(K(\lambda))$ が正の固有値となり、それに対応する正の固有関数が $E_+$ に存在する。しかも $r(K(\lambda))$ は $\lambda$ の単調減少関数である。明らかに $\lim_{\lambda\to\infty} r(K(\lambda)) = 0$ であるが、さらに $r(K(\lambda)) > 1$ となるような $\lambda$ が存在すれば*9、$r(K(\lambda)) = 1$ となるただ一つの実根 $\lambda_0$ が存在して、

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(K(0)) - 1) \tag{4.10}$$

となる。このとき $K(\lambda_0)$ の固有値 1 に対応する正の固有関数を $\phi_0(t)$ とおけば、$e^{\lambda_0(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ が正の指数関数解を与える。発展システム $U(t,s)$ が弱エルゴード的であれば、他のすべての正の解は正の指数関数解に漸近的に比例する。したがって、内的成長率 $\lambda_0$ が正であれば、人口成長がおきるが、負であれば人口は絶滅するという正確な閾値条件が得られる。

このとき、漸近的な年齢分布は

$$c_0(t,a) = \frac{p(t,a)}{\int_0^\omega p(t,a)da} = \frac{e^{-\lambda_0 a}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)}{\int_0^\omega e^{-\lambda_0 a}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)}$$

となるが、これは $\theta$ を周期とし、正規化された任意の年齢分布 $c(t,a)$ に関して

$$\lim_{t\to\infty} |c(t,a) - c_0(t,a)| = 0$$

*7 $K(0)$ による基本再生産数の定義は数理疫学モデルにおいてすでに導入されている ([1]), [19], [17])。
*8 正確には、周期性によって有限区間 $\mathrm{m}[0,\theta]$ 上の連続核積分作用素と同一視できるという意味で、コンパクト作用素になる ([2])。
*9 そのような $\lambda$ が存在しない場合は人口は絶滅するので、$K(0)$ が閾値を与えることに変わりはない。

という意味で安定である。

さらにもしパラメータが時間に依存しないのであれば、

$$(K(\lambda)\phi)(t) = \int_0^{\omega} e^{-\lambda a}\Psi(a)\phi(t-a)da$$

である。このときを正行列 $\hat{\Psi}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda a}\Psi(a)da$ のスペクトル半径 $r(\hat{\Psi}(\lambda))$ が 1 になるような実数 $\lambda_0$ と、対応する $\hat{\Psi}(\lambda)$ こ固有ベクトルを $c_0$ とすれば、$\phi_0 \equiv c_0$ という定数値関数は $K(\lambda_0)\phi_0 = \phi_0$ を満たしている。従ってこのときは、$e^{\lambda_0(t-a)}L(a)c_0$ が指数関数解になっていて、他の正の解（共立な関数）はすべて漸近的にこれに比例する。これは多状態安定人口モデルの強エルゴード定理にほかならず、$R_0 = r(\hat{\Psi}(0))$ である。$K(0)$ を定数値関数（任意の周期をもつ関数）のなす空間上での作用素とみれば、それは $\mathbf{R}^n$ 上の作用素 $\hat{\Psi}(0)$ と同一視できる。したがって、作用素 $K(0)$ を周期系における次世代作用素と定義すれば、そのスペクトル半径 $r(K(0))$ は、安定人口モデルにおける $R_0$ の定義の直接的な拡張になっている。

## 4.3 繁殖価概念の拡張

基本モデル (2.1) は形式的には以下のような発展方程式（バナッハ空間 $X$ における常微分方程式）とみなせる：

$$\frac{dp(t)}{dt} = A(t)p(t) \tag{4.11}$$

ここで、$A(t)$ は以下のような境界条件のついた微分作用素である：

$$\begin{aligned}(A(t)p(t))(a) &= \left(-\frac{d}{da} + Q(t,a)\right)p(t,a) \\ p(t,0) &= \int_0^{\omega} M(t,a)p(t,a)da\end{aligned} \tag{4.12}$$

このとき、指数関数解 $e^{\lambda t}\psi(t,a)$ が存在して微分可能であれば、$(\lambda,\psi)$ は以下の固有値問題の解であることが、(4.11) に代入することでわかる：

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial a} + Q(t,a)\right)\psi(t,a) &= \lambda\psi(t,a), \\ \psi(t,0) &= \int_0^{\omega} M(t,a)\psi(t,a)da\end{aligned} \tag{4.13}$$

$A(t)$ の共役作用素 $A^*(t)$ を以下のように定義しよう：

$$\begin{aligned}(A^*(t)v(t))(a) &= \frac{dv(t,a)}{da} + v(t,a)Q(t,a) + v(t,0)M(t,a) \\ v(t,\omega) &= 0\end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、$v(t)$ は $X^* = L^{\infty}([0,\omega];\mathbf{R}^n)$ に値をとる関数である。ただし $n$ 次元ベクトルとしては横ベクトルをとることにしておく。このとき

$$\langle v(t), p(t)\rangle := \int_0^{\omega} v(t,a)p(t,a)da$$

とすれば、

$$\langle A^*(t)v(t), p(t)\rangle = \langle v(t), A(t)p(t)\rangle$$

が成り立つ。さらに発展システム $U(t,s)$ の共役作用素 $U(t,s)^*$ を $x^* \in X^*$, $x \in X$ に対して

$$\langle U(t,s)^* x^*, x\rangle = \langle x^*, U(t,s)x\rangle$$

によって定義しておけば、$U^*(s,t) := U(t,s)^*$ は**後退発展システム** (backward evolutionary system) になる。すなわち、

$$U^*(s,r)U^*(r,t) = U^*(s,t), \quad s \le r \le t$$

発展作用素 $U(t,s)$ を用いれば、$p(t) = U(t,s)p(s)$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s) \tag{4.15}$$

である。このときさらに

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t,s)A(s) \tag{4.16}$$

となることが示される ([5])。このことから、

$$\begin{aligned}\langle x^*, \frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x\rangle &= -\langle x^*, U(t,s)A(s)x\rangle \\ &= -\langle A^*(s)U^*(s,t)x^*, x\rangle = \frac{\partial}{\partial s}\langle U^*(s,t)x^*, x\rangle\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial s}U^*(s,t) = -A^*(s)U^*(s,t) \tag{4.17}$$

が従う。そこで、$X^*$ の発展方程式

$$\frac{dv^*(s)}{ds} = -A^*(s)v^*(s) \tag{4.18}$$

を**後退方程式** (backward equation) とよぼう。$v^*(s) = U^*(s,t)x^*$ のとき、$v^*(s)$ は後退方程式の解を与えている。一般に $v^*(s) = U^*(s,t)v^*(t)$ であるとき、$v^*(s)$ は $U^*(s,t)$ と共立であるという。後退方程式に関しては、$e^{-\lambda s}w^*(s,a)$ がその解となるとき、それを指数関数解とよぼう。この場合、$(\lambda, w^*)$ は以下の共役固有値問題の解である：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial s} + A^*(s,a)\right) w^*(s,a) &= \lambda w^*(s,a), \\ w^*(s,\omega) &= 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

**補題 4.4** $p(t) \in X_+$ が $U(t,s)$ と共立であるとき、$v^*(t) \in X^*$ が $U^*(s,t)$ と共立であれば、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定である。またもし任意の共立関数 $p(t)$ に対して、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であるような汎関数 $v^*(t)$ が存在すれば、それは共立汎関数である。

**証明：** $v^*(s)U^*(s,t) = v^*(t)$ であれば、

$$\langle v^*(t), p(t)\rangle = \langle v^*(t), U(t,s)p(s)\rangle = \langle U^*(s,t)v^*(t), p(s)\rangle = \langle v^*(s), p(s)\rangle$$

したがって $\langle v^*(t), p(t)\rangle$ は時間によらず一定である。また汎関数 $v^*(t)$ について、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であれば、任意の $x \in X_+$ に対して、$p(t) = U(t,s)x$ と考えれば、

$$\langle v^*(s), x\rangle = \langle v^*(t), U(t,s)x\rangle = \langle U^*(s,t)v^*(t), x\rangle$$

となるから、$v^*(s) = U^*(s,t)v^*(t)$ である。(証明終)

実は、$U(t,s)$ の弱エルゴード性を保証するような適当な仮定の下で、$0 \leq s \leq t < \infty$*10で $U(t,s)$ と共立な任意の正の関数 $p(t)$ に対して $\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であるような正汎関数 $v_0^*(t)$ が存在して、それは $U^*(s,t)$ と共立であり、定数培の任意性を除けば一意的であることが示される ([4], [12], [13])。そのような正汎関数 $v_0(t)$ を**主要汎関数** (importance functional) とよぶ。

主要汎関数は一つの共立な関数 $g(t)$ を基準にして、他の正の共立関数 $f(t)$ との漸近的な比例係数を与えるものであり、以下が成り立つ ([13], 定理 D.8)：

$$|f(t) - \langle v_0^*(s), f(s)\rangle g(t)| \leq \epsilon(t) g(t), \quad \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0 \tag{4.20}$$

ここで $\epsilon(t)$ はスカラー関数で、基準となる $g(t)$ を変えれば $v_0^*(t)$ も変わるが、それらはお互いに比例しているから、本質的にはただ一つの主要汎関数がさだまる。

**補題 4.5** 半開区間 $0 \leq s \leq t < \infty$ において $U^*(s,t)$ と共立な汎関数は、定数培を除けば主要汎関数だけである。

**証明：** $v^*(t)$ を任意の共立汎関数とすれば、(4.20) から

$$|\langle v^*(t), f(t)\rangle - \langle v_0(s), f(s)\rangle \langle v^*(t), g(t)\rangle| \leq \epsilon(t)\langle v^*(t), g(t)\rangle$$

補題 4.4 から $\langle v^*(t), f(t)\rangle$, $\langle v^*(t), g(t)\rangle$ は一定値であるから、

$$|\langle v^*(s), f(s)\rangle - \langle v_0(s), f(s)\rangle \langle v^*(s), g(s)\rangle| \leq \epsilon(t)\langle v^*(s), g(s)\rangle$$

$t \to \infty$ で $\epsilon(t) \to 0$ であるから、

$$\langle v^*(s), f(s)\rangle = \langle v_0(s), f(s)\rangle \langle v^*(s), g(s)\rangle$$

がすべての $s \geq 0$ で成り立つ。$f(s)$ は任意にとれるから、

$$v^*(s) = \langle v^*(s), g(s)\rangle v_0^*(s)$$

となっていなければならない。$\langle v^*(s), g(s)\rangle$ は定数であるから、$v^*$ は $v_0^*$ に比例している。(証明終)

特に周期系のように指数関数解 $e^{\lambda t}\phi(t)$ が存在すれば、それを基準として用いることで、

$$|f(t) - \langle v_0^*(s), f(s)\rangle e^{\lambda t}\phi(t)| \leq \epsilon(t) e^{\lambda t}\phi(t)$$

ここで $\phi(t)$ は有界だから、

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} f(t) = \langle v_0^*(s), f(s)\rangle \phi(t) \tag{4.21}$$

となる。すなわち、周期系では発展方程式の解は漸近的に指数関数と周期関数の積に書けることになる。

**定理 4.6** $v^*(s,a)$ が $U^*(s,t)$ と共立であるためには以下が成り立つことが必要十分である；

$$v^*(s,a) = \int_a^\omega v^*(s+y-a, 0) M(s+y-a, y) L(y-a; s, a) dy \tag{4.22}$$

*10 $0 \leq s$ としたのは便宜的で、時間原点はどこでもよい。

**証明：** (4.22) を満たす $v^*(t,a)$ は $U^*(s,t)$ と共立であることをしめそう。上記の考察から (4.22) をみたす $v^*(s)$ と、$U(t,s)$ と共立な $p(t)$ に対して $\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらないことを示せばよい。定義域を拡張して $a>\omega$ では $v^*=p=0$ としておけば、

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \int_0^\infty v^*(t,a)p(t,a) \\
&= \int_0^\infty \int_a^\infty v^*(t+y-a,0)M(t+y-a,y)L(y-a;t,a)dyL(a;t-a,0)p(t-a,0)da \\
&= \int_{-\infty}^t dz \int_{t-z}^\infty v^*(y+z,0)M(y+z,y)L(y;z,0)dyp(z,0)
\end{aligned}
$$

そこで、

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \int_0^\infty v^*(y+t,0)M(y+t,y)L(y;t,0)dyp(t,0) - \int_{-\infty}^t v^*(t,0)M(t,t-z)p(z,0)dz \\
&= v^*(t,0)\left[p(t,0) - \int_0^\infty M(t,a)p(t-a,0)da\right] = 0
\end{aligned}
$$

したがって (4.22) は十分条件である。逆に $v^*(s,a)$ が $U^*$ と共立ならば後退方程式を満たすが、それを特性線に沿って解けば表現 (4.22) を得る。(証明終)

(4.22) において、境界値を $\phi^*(t) := v^*(t,0)$ とおけば、

$$
\phi^*(s) = \int_0^\infty \phi^*(s+y)\Psi(s+y,y)dy \tag{4.23}
$$

を得る。ただし $a>\omega$ では $\Psi(t,a)=0$ と拡張しておく。(4.23) から境界値が定まれば、それを (4.22) に投入して $v^*(t,a)$ が決定される。したがって、$U^*(s,t)$ と共立な関数 $v^*(t,a)$ が存在するためには、ある $\phi^* \in L^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ が存在して (4.23) を満たせばよい。(4.23) はロトカの（同次）積分方程式の共役方程式である。

上記の結果から、共役システムの指数関数解 $e^{-\lambda s}w^*(s,a)$ が存在するためには

$$
\phi^*(s) = \int_0^\omega e^{-\lambda y}\phi^*(s+y)\Psi(s+y,y)dy \tag{4.24}
$$

となる有界可測な $\phi^*(s)$ 存在すればよい。実際、そのような $\phi^*(s)$ を用いて、

$$
w^*(s,a) = \int_a^\omega e^{-\lambda(y-a)}\phi^*(s+y-a)M(s+y-a,y)L(y-a;s,a)dy \tag{4.25}
$$

と定義すれば、$w^*(s,0)=\phi^*(s)$ であり、$e^{-\lambda s}w^*(s,a)$ は (4.22) を満たしている。

方程式 (4.24) は作用素

$$
(K^*(\lambda)\phi^*)(s) := \int_0^\omega e^{-\lambda y}\phi^*(s+y)\Psi(s+y,y)dy
$$

がちょうど 1 を固有値として持つことを意味している。従って $K^*$ がコンパクトな正作用素であれば、前進システムの指数関数解と同様に、$r(K^*(\lambda))=1$ となるような実数 $\lambda_0$ と、$r(K^*(\lambda_0))=1$ に対応する正の固有関数 $\phi_0^*$ の存在が示される。周期系は明らかにそのような議論が成立する系であり、(4.23) を満たす周期関数が存在して、(4.25) から定まる周期的な $X^*$ 値関数 $w_0^*(a,a)$ によって、$e^{-\lambda_0 s}w_0^*(s,a)$ が指数関数解（主要汎関数）になる。

またパラメータが時間に独立であれば、

$$(K^*(\lambda)\phi^*)(s) = \int_0^\omega e^{-\lambda y}\phi^*(s+y)\Psi(y)dy$$

であるから、正行列 $\int_0^\omega e^{-\lambda y}\Psi(y)dy$ が固有値 1 をもつような実数 $\lambda_0$ がただひとつ存在して、対応する左正固有ベクトルを $\phi_0^*$、

$$w^*(a) = \phi_0^* \int_a^\omega e^{-\lambda_0(y-a)}M(y)L(y-a;a)dy$$

とすれば、$e^{-\lambda_0 s}w^*(a)$ が後退システムの指数関数解（主要汎関数）である。このとき $w^*(a)$ は多状態安定人口モデルにおける**繁殖価** (reproductive value) に他ならない ([13])。

共役固有値問題 (4.19) が正の解をもつならば、その固有値 $\lambda$ は固有値問題 (4.12) の正の固有関数に対応する固有値に等しい。それゆえ、共役システムの指数関数解がもとまるのであれば、そのパラメータ $\lambda$ は必然的に前進システムの内的成長率に他ならない。

後退システムが弱エルゴード的であれば、時間区間 $(s,\infty)$ において $U^*(s,t)$ と共立な関数は定数倍を除いてただひとつ主要汎関数のみであった。それゆえ、もし指数関数解が存在すれば、それが主要汎関数であり、他の任意の解はその定数倍である。そこで、$w^*(s,a)$ を**変動環境下における繁殖価**と定義できるであろう。

$p(t,a)$ を前進システムの解、$e^{-\lambda t}w^*(t,a)$ を後進システムの指数関数解とすれば、補題 4.4 から

$$\langle e^{-\lambda t}w^*(t,\cdot), p(t,\cdot)\rangle = e^{-\lambda t}\langle w^*(t,\cdot), p(t,\cdot)\rangle = \langle w^*(0,\cdot), p(0,\cdot)\rangle$$

であるから、

$$V(t) := \langle w^*(t,\cdot), p(t,\cdot)\rangle = e^{\lambda t}V(0) \tag{4.26}$$

となる。これは安定人口モデルの総繁殖価に関する Fisher の定理の拡張に他ならない。このことは、指数関数解が存在すれば、一般の変動環境においても繁殖価理論を安定人口モデルの場合と同様に展開できるということを意味している。

## 4.4 人口学的ポテンシャルと繁殖価

繁殖価概念は進化生物学において適応度を測る一つの尺度と考えられ、その変動環境のケースへの一般化は古くから生物学者の関心を引く問題であった ([18], [16])。

一方、人口学においては、ウィーン人口研究所の Ediev は一連の研究において、**人口学的ポテンシャル** (demographic potential) という概念を提唱し、それを繁殖価概念の一般化として考察している。$\tau$ 年生まれの $a$ 歳の人口学的ポテンシャル $c(a;\tau)$ は、一次元の場合以下をみたす関数とされる ([9])[*11]：

$$c(a;\tau) = \int_a^\infty c(0;\tau+y)m(\tau+y,y)\ell(y-a;a+\tau,a)dy$$

ただし、$m(t,a)$, $\ell(x;t,a)$ は一次元の出生率、生残率関数である。これは $c(a;\tau) = v^*(\tau+a,a)$ を意味している。それゆえ、Ediev の人口学的ポテンシャルは後退システムの解に他ならない。Ediev はまた時刻 $t$ の全人口学的ポテンシャルを $\int_0^\infty c(a;t-a)p(t,a)da$ と定義して、これが時間的に一定であることを示しているが、

---

*11 Ediev の記号では $(a,t)$ は生まれ時刻 $t$、年齢 $a$ 歳をあらわし、$(a;t)$ は時刻 $t$ での年齢 $a$ を表しているが、ここで使用している記法とはちょうど逆であることに注意。

これは我々の補題 4.4 に他ならないが、発展システムとその共役に関して古くから知られていたことである ([3], [4], [12], [13])。

Bacaër and X. Abdurahman ([2]) は、周期系の共役システムの正の指数関数解の周期部分 $w^*(s,a)$（共役固有値問題の正の固有関数）を周期的な人口システムの繁殖価と定義することを提唱したが、Ediev は以下のような別の定義を与えている*12：

$$v_E(t,a) := \frac{v^*(t,a)}{v^*(t,0)}$$

ここで $v_E$ は Ediev の意味での繁殖価であるが、後退システムが弱エルゴード的で、指数関数解 $e^{-\lambda t}w^*(t,a)$ が存在するならば、すべての共立汎関数はそれに比例しているから、

$$v_E(t,a) = \frac{w^*(t,a)}{w^*(t,0)}$$

であり、特に自律系（安定人口モデル）では

$$v_E(t,a) = \frac{w^*(a)}{w^*(0)} = \int_a^\infty e^{-\lambda_0(y-a)}m(y)\frac{\ell(y)}{\ell(a)}dy$$

となって、ゼロ歳児の値が 1 になるように規格化された Fisher の繁殖価が得られる。しかしながら、$v_E$ による総繁殖価 $\langle v_E(t,\cdot), p(t,\cdot)\rangle$ は、非自律系においてはもはや指数関数的に変化はしない。 しかし Ediev ([9]) が仮定したように (4.23) が定数解をもてば、すなわち一次元のコーホート的なロトカの特性関係

$$1 = \int_0^\omega e^{-\lambda y}m(s+y,y)\ell(y;s,0)dy \tag{4.27}$$

がある $\lambda$ に対してつねに成り立てば、$w^*(t,0) = \phi^* = const.$ であり、

$$V_E(t) := \langle v_E(t), p(t)\rangle = \frac{1}{w^*(t,0)}\langle w^*(t), p(t)\rangle = \frac{1}{\phi^*}\langle w^*(0), p(0)\rangle e^{\lambda t} = V_E(0)e^{\lambda t}$$

という総繁殖価のマルサス法則を再び得る。

しかし Bacaër and Abdurahman が批判するように、コーホート的な特性関係 (4.27) が成立するような、各コーホートに共通の不変なマルサスパラメータ $\lambda$ が存在するという仮定は、変動環境下では現実には成り立つ可能性がきわめて低く、その意義は明らかではない。また出生時点での繁殖価が 1 になるように規格化することは、多状態の場合には意味がないし、そもそも Galindo ([7], [11]) が指摘したように、一次元のケースでも必ずしも適切な規格化とはいえず、Fisher の本意でもなかった。実際、出生時点での繁殖価を 1 に規格化した場合は、同じコーホートの各年齢における繁殖価の相対比較をたやすくする意味はあるが、別種の人口の繁殖価を比較するためには不適切である。Ediev の定義は人口学的ポテンシャルと繁殖価を本質的に区別しないことから出てきているように思われる。実際、Ediev の過去の論文ではしばしば両者は混同されている。しかしながら、繁殖価は、人口の再生産力を成長率で割り引いて、いわばその現在価値を導くためのものであり、内的成長率の存在と総繁殖価のマルサス法則は繁殖価概念の拡張にとって無視できない前提であろう。ただし、純生物学的な観点からは、必ずしもマルサス的な成長法則を前提としない繁殖価概念も提唱されている ([16])。

*12 ただし記号はすべて本論文のものを利用している。また Ediev はスカラーシステムしか考察していないので、ここではすべて一次元である。

## 5 おわりに

本稿では、パラメータの時間的変動を考慮した一般線形年齢構造化人口モデルによって、少なくとも周期系に関しては古典的な安定人口モデルの基本概念が、その本質的な意味を失わない形で拡張できることを示した。

周期性を超えて全く一般の動態率をもつ人口システムに関しては、Thieme による発展半群とレゾルベント正作用素の理論によって、周期系と同様にある種の積分作用素のスペクトル半径が発展半群の成長上限の正負を決定することが示されているが、その基礎となる関数空間の生物学的人口学的意義は明らかではない。今後の課題としては、時間変動するパラメータをもつ周期系以外の系で、純再生産率と内的成長率の概念の拡張を許すような人口学的に意義のある系を見いだすことが考えられる。漸近的に自律的となるような一般化安定人口モデルはそのような系の候補であるかもしれない。

本研究は人口学の基本的理論的課題に答えようとするものであるが、先進諸国の人口問題との関わりからすれば、周期性条件等はなお制約的である。イースタリンサイクルや景気変動による周期性も理論的には考えられるが、実証的根拠はいまだに乏しい、一方、安定人口モデルは感染症に罹患した集団の初期成長を記述するモデルとして近年その重要性が再認識されてきている。その基本再生産数は感染症の流行を根絶計画の要であるが、この場合はパラメータの季節変動性はきわめて現実的な問題であり、実証的データも豊富であるから人口学的モデルの応用としては今後の発展が期待される。

## 参考文献


[1] N. Bacaër and S. Guernaoui (2006), The epidemic threshold of vectir-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53: 421-436.

[2] N. Bacaër and X. Abdurahman (2008), Reasonance of the epidemic threshold in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 57: 649-673.

[3] G. Birkhoff (1962), Uniformly semi-primitive multiplicative process, *Trans. Am. Math. Soc.* 104: 37-51.

[4] G. Birkhoff (1965), Uniformly semi-primitive multiplicative process II, *J. Math. Mech.* 14(3): 507-512.

[5] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. J. A. M. Heijmans and H. R. Thieme (1988), Perturbation theory for dual semigroups II. Time-dependent perturbations in sun-reflexive case, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 109A: 145-172.

[6] A. J. Coale (1972), *The Growth and Structure of Human Populations*, Princeton UP, Princeton.

[7] J. F. Crow (2002), Perspective: Here's to Fisher, additive genetic variance, and the fundamental theorem of natural selection, *Evolution*: 56(7): 1313-1316.

[8] K. Deimling (1985), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

[9] D. M. Ediev (2007), On an extension of R. A. Fisher's result on the dynamics of the reproductive value, *Theor. Popul. Biol.* 72: 480-484.

[10] D. M. Ediev (2009), On the definition of the reproductive value: response to the discussion by Bacaer and Abdurahman, *J. Math. Biol.* 59: 651-657.

[11] C. Galindo (2007), On Fisher's reproductive value and Lotka's stable population, Paper presented at annual meeting of PAA.

[12] H. Inaba (1989), Weak ergodicity of population evolution processes, *Math. Biosci.* 96: 195-219.

[13] 稲葉 寿 (2002), 「数理人口学」, 東京大学出版会, 東京.

[14] H. Inaba (2010), The net reproduction rate and the type-reproduction number in multiregional demography, to appear in *Vienna Yearbook of Population Research 2009.*

[15] P. Michel, S. Mischler and B. Perthame (2005), General relative entropy inequality: an illusration on growth models, *J. Math. Pures Appl.* 84: 1235-1260.

[16] 太田 邦昌 (1973), 世代の重なる生物集団の成長諸特性 (2), 生物科学 第 25 巻第 3 号: 163-168.

[17] H. R. Thieme (2009), Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.* 70(1): 188-211.

[18] J. H. Vandermeer (1968), Reproductive value in a population of arbitrary age distribution, *The American Naturalist* Vol. 102, No. 928: 586-589.

[19] W. Wang and X. Q. Zhao (2008), Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments, *J. Dyn. Diff. Equat.* 20: 699-717.

[20] F. Zhang and X. Q. Zhao (2007), A periodic epidemic model in a patchy environment, *J. Math. Anal. Appl.* 325: 496-516.

# 3　変動環境下における人口の基本再生産数の定義について

稲葉 寿

## 1　はじめに

基本再生産数 (basic reproduction number)（$R_0$ と表記される）の概念は、すでに 19 世紀において芽生えていたが ([28], [29])、シャープ、ダブリン、ロトカによる安定人口理論によって初めて理論的な基礎を得て以来、人口成長の閾値条件を与える人口学・個体群動態学におけるもっとも基本的で、重要な指標として発展してきた ([11], [24])*1。過去 20 年間においては、人口学よりも感染症疫学において、基本再生産数に関わる理論が著しく発展してきており ([14])、個体の異質性や環境の変動などを考慮の入れた基本再生産数の概念が提案されてきている。特に、Diekmann, Heesterbeek, Metz ([8]) による年齢構造や生存状態等の個体の異質性を考慮した個体群ダイナミクスにおける基本再生産数の定義は、感染症疫学や個体群動態学に非常に大きな影響を与えた。その定義においては、基本再生産数はある種の正積分作用素ないしは正行列のスペクトル半径として与えられる。この作用素ないし行列を次世代作用素 (next generation operator: NGO) ないし次世代行列 (next generation matrix: NGM) とよぶ ([9], [10])。

Diekmann 等による $R_0$ の定義は、理論的にも実践的にも非常に有効であることが証明されてきたが、それは定常的環境における線形人口ダイナミクスにおける閾値条件を定式化するものであって、環境が時間的に変動する場合に、同様な指標が定義できるかどうかが、大きな問題であった。そこで、1990 年代半ばから、まず周期的環境において基本再生産数を定義する試みがなされるようになってきた ([1]–[6], [12], [13], [33], [34])。いくつかの同値な閾値条件を導く定義がありうるが、なかでも Bacaër と Guernaoui ([1]) による定義は最も重要である。というのも Bacaër and Ait Dads ([5], [6]) が示したように、彼らの定義による $R_0$ は、継続する世代の人口サイズの漸近的な比になっており、生物学的に意義のある解釈を与え、定常環境下における Diekmann 等による定義の直接的な拡張になっているからである。

本研究では、周期系を超えてより一般の変動環境において人口成長の閾値を与える基本再生産数の新たな定義を提案する。この新たな基本再生産数は、時間パラメータに依存する世代分布を次世代の分布に変換するある種の正積分作用素（世代推進作用素：generation evolution operator: GEO) によって生成される世代分布の列の収束半径として定義される。この作用素 GEO は、時間も状態変数とみなした拡張された状態空間における人口の世代分布に作用するために、生物学的意味が明快であり、かつ定常環境ないし周期的環境における次世代作用素は時間に関して集計された世代分布に作用する作用素として、この世代推進作用素から自然に導かれる。

---

*1 $R_0$ や内的成長率は進化生物学においては、しばしば侵入生物ないし突然変異体の適応度と解釈され、感染症疫学では感染症の侵入条件を定量化するものと見なされる.

以下ではまずこれまでの定常環境、周期環境における基本再生産数の定義において、$R_0$ が継続する世代の人口サイズの漸近的な比を与える、という世代解釈が成り立つことを GEO を用いて証明する。そこでは時間をも状態変数に取り入れた拡張された状態空間上で作用する世代推進作用素による世代の生成過程が、集計作用素によって次世代作用素の反復過程に還元されるという事実がキーとなる。このような還元によって、定常環境と周期環境における次世代作用素による $R_0$ の世代解釈が成り立つことが明らかとなる。その後、GEO を用いて、一般の変動環境における $R_0$ の新たな定義を提案する。このとき定常環境と周期的環境においては、新定義による $R_0$ は GEO のスペクトル半径に一致し、かつそれは従来の定義における次世代作用素のスペクトル半径に一致することが示される。したがって、GEO による $R_0$ の定義は Diekmann– Heesterbeek–Metz による定常環境系における $R_0$, Bacaër–Guernaoui による周期環境系における $R_0$ の拡張と見なせる。しかしながら、この新定義による一般変動環境における $R_0$ が常に GEO のスペクトル半径として与えられるかどうかはまだわかっていない。また一般変動環境においては $R_0 < 1$ という劣臨界条件は人口が滅亡する十分条件であるが、一方において過臨界条件 $R_0 > 1$ は必ずしも人口増加を意味しないという問題がある。すなわち、変動環境においては、$R_0$ だけでは成長閾値としては不十分であり、何らかの意味における人口の長期的成長率の存在が問題となる。実際、成長率は平均世代間隔にも依存しているから、それが変動している場合、$R_0 > 1$ であっても人口成長がおきない場合もある。$R_0$ によって成長閾値が与えられるような（周期系を含む）変動環境下の人口の広いクラスを抽出することは今後の課題である。

## 2 定常環境における基本再生産数の定義

はじめに定常環境下における基本再生産数の定義の再検討から始めよう。各個体は変数 $\zeta \in \Omega$ によって記述されるとする。これを個体状態変数 (*h-state variable*) とよぶ。集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を個体状態空間とよぶ。$A(\tau, \zeta, \eta)$ は状態 $\eta$ に生まれた個体が年齢 $\tau$ において状態 state $\zeta$ の個体を生む出生率とする。

$i(t, \zeta)$, $\zeta \in \Omega_b$ は時刻 $t$ における新生児の状態別密度関数とする。ここで $\Omega_b \subset \Omega$ は「出生状態」からなる部分状態空間である。「出生状態」はその状態に新生児が生まれる可能性がある状態である。このとき、状態別の新生児密度関数の時間発展は以下のような再生方程式で表される：

$$i(t, \zeta) = g(t, \zeta) + \int_0^t \int_{\Omega_b} A(\tau, \zeta, \eta) i(t - \tau, \eta) d\eta d\tau, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

ここで $g(t, \zeta)$ は初期人口から生まれる新生児の時刻 $t$ における密度分布関数である。

$E_+ := L^1_+(\Omega_b)$ を新生児の密度関数の属する関数空間としよう[*2]. $E_+$ 上の正線形積分作用素 $\Psi(\tau)$ を以下のように定義しよう：

$$(\Psi(\tau) f)(\zeta) := \int_{\Omega_b} A(\tau, \zeta, \eta) f(\eta) d\eta, \quad f \in E_+$$

このとき純再生産作用素 $\Psi(\tau)$ は、新生児の状態別分布を、それらが $\tau$ 時間後に生み出す新生児の状態別分布へ写す作用を表している。

時刻 $t$ における新生児分布を $E_+$ 値関数 $i(t) := i(t, \cdot)$ とすれば、(2.1) は抽象的な再生方程式として書かれる：

$$i(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(\tau) i(t - \tau) d\tau, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

[*2] もし状態変数が離散的であれば $E_+ = \mathbf{R}^n_+$ であり、そのノルムを $\|x\| := \sum_{k=1}^n |x_k|$, $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbf{R}^n$ とする.

$\hat{\Psi}(\lambda)$ を作用素 $\Psi$ のラプラス変換としよう:

$$\hat{\Psi}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\Psi(\tau)d\tau$$

正作用素の議論 ([15], [17]) から、適当な条件のもとで実数 $\lambda_0$ が存在して、$r(\hat{\Psi}(\lambda_0)) = 1$*3であり、初期データ $g$ に依存する正数 $\alpha(g)$ が存在して、

$$i(t) \sim \alpha(g)e^{\lambda_0 t}\psi_0, \quad t \to \infty \tag{2.3}$$

がなりたつ。ここで $\psi_0$ は $\hat{\Psi}(\lambda_0)$ の固有値 1 に属する正固有ベクトルである。さらに以下の関係が成り立つ：

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(\hat{\Psi}(0)) - 1) \tag{2.4}$$

Diekmann–Heesterbeek–Metz の定義においては、次世代作用素 (next generation operator: NGO) が以下のように定義される：

$$K_E := \hat{\Psi}(0) = \int_0^\infty \Psi(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

このとき基本再生産数 (basic reproduction number $R_0$) はそのスペクトル半径で与えられる：

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|K_E^m\|_{\mathcal{L}(E)}} = r(K_E) = R_0 \tag{2.6}$$

ここで $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ は $E$ 上の有界作用素の作用素ノルムである。このとき (2.4) は $\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(R_0 - 1)$ を示すから, 定義 (2.6) は人口成長の閾値を与えるという基本再生産数の特性をよく表している。

一方、世代ごとに人口成長を見た場合の基本再生産数の意義を確認しておこう。初期条件 $\phi$ に対して、世代ごとに見た幾何学的成長率は $\sqrt[m]{\|K_E^m\phi\|_E}$ で与えられるが、一般には

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|K_E^m\phi\|_E} \le r(K_E)$$

である。正作用素に関するペロン・フロベニウス理論から、上記の不等号は適当な $K_E$ に関する条件のもとで実は等号として成立することがわかる。ただし、$\|K_E^m\phi\|_E$ が $m$ 番目の世代サイズを表すという場合、分布 $\phi$ は時間パラメータに依存した実時間における新生児の状態別分布*4とは異なるものであることに注意しておかなければならない。

次世代作用素が作用する関数空間の意味を明らかにするために、再生方程式 (2.1) へ戻ろう。継続する各世代の状態別分布は以下のように計算される：

$$i_0(t) = g(t), \quad i_m(t) = \int_0^t \Psi(\tau)i_{m-1}(t-\tau)d\tau, \quad m = 1, 2, .., \tag{2.7}$$

このとき再生方程式 (2.1) の解は以下で与えられる：

$$i(t) = \sum_{m=0}^\infty i_m(t)$$

*3 $r(A)$ は作用素 $A$ のスペクトル半径を表す.

*4 以下で定義する $i_m$.

ここで $i_m(t) \in E_+$ は時刻 $t$ に生まれた $m$ 世代目の新生児の状態別分布（世代分布： generation distribution)*5である。すなわち、 $i_0(t)$ は初期人口から生まれた新生児の分布であり、 $i_1(t)$ は初期人口の孫世代の状態別分布である。生物学的意味から、世代分布関数の属する関数空間は

$$i_m \in Y_+ := L^1_+(\mathbf{R}_+; E) = L^1_+(\mathbf{R}_+ \times \Omega_b)$$

と仮定する。ここで、 $Y_+$ はバナッハ束 $Y$ の正値錐であり、そのノルムは

$$\|i_m\|_Y := \int_0^\infty \|i_m(t)\|_E dt = \int_0^\infty \int_{\Omega_b} |i_m(t,\zeta)| d\zeta dt \tag{2.8}$$

で与えられる。

時間変数 $t$ を状態変数とみなせば、$\mathbf{R}_+ \times \Omega_b$ が拡張された状態変数のなす空間であり、$Y_+$ が拡張された状態分布の関数空間となる。上記の定義において、各世代の分布の $Y$ 空間ノルム $\|i_m\|_Y$ は $m$ 世代目として生まれた新生児の総数を与えるから、その漸近的な世代ごとの幾何学的成長率は $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y}$ で与えられる。

ここで $Y$ 空間の正値錐 $Y_+ = L^1_+(\mathbf{R}_+; E_+)$ を不変にする正積分作用素 $K_Y : Y \to Y$ を以下のように定義しよう：

$$(K_Y f)(t) := \int_0^t \Psi(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in Y_+ \tag{2.9}$$

このとき世代分布の発展過程 (2.7) は $Y_+$ における以下のような逐次的な過程と考えられる：

$$i_0 = g, \quad i_m = K_Y i_{m-1} \tag{2.10}$$

そこで $K_Y$ を世代発展作用素 (generation evolution operator: GEO) とよぼう。証明は略するが、以下が直ちに示される：

**補題 2.1** 以下を仮定する：

$$\int_0^\infty \|\Psi(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)} d\tau < \infty \tag{2.11}$$

このとき $K_Y$ は $Y$ の有界線形作用素であり以下が成り立つ：

$$\|K_Y\|_{\mathcal{L}(Y)} \le \int_0^\infty \|\Psi(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)} d\tau \tag{2.12}$$

$f = f(t,\zeta) \in Y$, $(t,\zeta) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega_b$ にたいして、時間パラメータに関する集計作用素 $T : Y \to E_+$ を以下で定義する：

$$(Tf)(\zeta) := \int_0^\infty |f(t,\zeta)| dt \tag{2.13}$$

このとき $T$ は有界作用素である。

**補題 2.2** 以下が成り立つ：

$$\|f\|_Y = \|Tf\|_E \tag{2.14}$$

したがって $T$ の作用素ノルムは 1 である。さらに $f \in Y_+$ に対して以下がなりたつ：

$$TK_Y f = K_E T f \tag{2.15}$$

*5 世代分布はロトカによってすでに検討されている ([22], [23]).

（証明）以下がなりたつことはすぐにわかる：

$$\|f\|_Y = \int_0^\infty dt \int_{\Omega_b} d\zeta |f(t,\zeta)| = \int_{\Omega_b} d\zeta (Tf)(\zeta) = \|Tf\|_E$$

さらに $f \in Y_+$ に対して

$$TK_Y f = \int_0^\infty dt \int_0^t \Psi(s) f(t-s) ds = \int_0^\infty \Psi(s) ds \int_0^\infty f(t) dt = K_E T f$$

となる。それゆえ結論を得る。（証明終）

新生児は時間 $t$ と状態 $\zeta$ によって特徴付けられるが、定常的な環境では違う時刻に同じ状態に生まれた個体は同じライフサイクルを経験する。それゆえ、時間パラメータに関して集計された世代状態分布を以下のように定義しよう：

$$Ti_m = \int_0^\infty i_m(t) dt \in E_+$$

(2.15) から $Y$ 空間の世代発展過程 (2.10) は $E$ 空間の反復プロセス

$$Ti_m = TK_Y i_{m-1} = K_E T i_{m-1} \tag{2.16}$$

を誘導することがわかる。すなわち次世代作用素 $K_E$ は集計された世代分布の世代的発展を記述する作用素であることがわかる*6.

正作用素の理論*7から、$K_E$ に関するコンパクト性と原始性 (primitivity) を仮定すれば, $r(K_E)$ は正の固有ベクトル $f_E \in E_+$ に対応する支配的な固有値になり、正の汎関数 $F_E \in E_+^*$ が存在して

$$Ti_m = K_E^m T i_0 \sim \langle F_E, Ti_0 \rangle r(K_E)^m f_E, \quad m \to \infty \tag{2.17}$$

となる。ここで $E^*$ は共役空間であり、$\langle F_E, \phi \rangle$ は汎関数 $F_E$ の $\phi \in E$ における値を示す。

(2.14) から、 $\|Ti_m\|_E = \|i_m\|_Y$ を得る。 また (2.17) から、

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|Ti_m\|_E} = r(K_E) = R_0 \tag{2.18}$$

となる。従って以下が示される：

**定理 2.3** Diekmann-Heesterbeek–Metz による基本再生産数 $R_0$ の定義は、以下のような意味で世代的解釈を許す：

$$R_0 = r(K_E) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \tag{2.19}$$

すなわち、世代分布 $i_m$ の $Y$ ノルム、あるいは集計された世代分布 $Ti_m$ の $E$ ノルムは各世代の出生児総数をあたえ、それは漸近的に成長率 $r(K_E) = R_0$ で幾何学的に成長する。

上記の世代的解釈 (2.19) と閾値性 $\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(R_0 - 1)$ は基本再生産数のもっとも基本的な特性であり、変動環境におけるその拡張においても維持されるべき性質である。

---

*6 (2.16) はすでに [18] において、次世代作用素の解釈として使用されている。

*7 正作用素の理論に関しては [25], [30], [26], [17], [31] 等を参照.

## 3　周期的環境下における基本再生産数の定義

次に周期的環境下における Bacaër と Guernaoui による $R_0$ の定義を検討しよう。ここでは $\theta > 0$ を環境と人口動態の周期であるとする。したがって、人口の再生産プロセスは以下のような再生方程式で記述される：

$$i(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(t,\tau) i(t-\tau) d\tau, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

ここで $\Psi(t,\tau)$ は $E_+$ 上の線形正作用用素である：

$$(\Psi(t,\tau)f)(\zeta) := \int_{\Omega_b} A(t,\tau,\zeta,\eta) f(\eta) d\eta$$

パラメータの周期性から、

$$\Psi(t+\theta,\tau) = \Psi(t,\tau), \quad t \in \mathbf{R} \quad \tau > 0$$

と仮定される。

Bacaër とその共同研究者 ([1]–[6]) は周期系における基本再生産数は、以下の関係を満たすような $\theta$ 周期をもつ正の連続 $E$ 値関数が存在するような正数 $R_0$ として定義される：

$$R_0 f(t) = \int_0^\infty \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{3.2}$$

このとき、$R_0$ は以下のように定義される正の積分作用素のスペクトル半径に他ならない：

$$f \longrightarrow \int_0^\infty \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in C_\theta(\mathbf{R}; E) \tag{3.3}$$

ここで、$C_\theta$ は $\theta$-周期的な連続関数のなす関数空間である。

$\lambda$ を複素パラメータとして $K_\theta(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C})$ を以下のように定義される $C_\theta$ 上の積分作用素とする：

$$(K_\theta(\lambda)f)(t) := \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in C_\theta(\mathbf{R}; E) \tag{3.4}$$

そこで、(3.3) で定義される $K_\theta(0)$ である。

周期的再生方程式に関する定理 ([32]) より、(3.1) の解は漸近的に周期関数と指数関数の積で表現される：$i(t) \sim e^{\lambda_0 t}\psi_0(t), (t \to \infty)$。ここで、$\psi_0 \in C_\theta$ は $K_\theta(\lambda_0)$ の固有値 1 に属する正固有ベクトルであり、漸近的成長率 $\lambda_0$ は特性関係式 $r(K_\theta(\lambda_0)) = 1$ をみたす唯一の実数である。さらにこのとき実軸上での $r(K_\theta(\lambda))$ の単調性から、以下が成り立つ：

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(K_\theta(0)) - 1), \tag{3.5}$$

上記の関係は Bacaër–Guernaoui の定義 $R_0 = r(K_\theta(0))$ が、実時間における成長率という観点から妥当であることを示している。(3.5) の数学的証明は [27], [33] , [20] 等においても与えられている。

しかしながら、定常的環境の場合と異なり、作用素 $K_\theta(0)$ が作用する関数空間は周期関数のなす空間であるから、時間に関して単純に集計された世代分布がなす関数空間ではない。 実際、各世代の分布を計算すれば、

$$i_0(t) = g(t), \quad i_m(t) = \int_0^t \Psi(t,\tau) i_{m-1}(t-\tau) d\tau, \quad m = 1,2,.., \tag{3.6}$$

となるから、時間に関して単純に集計すれば以下を得る：

$$\int_0^\infty i_m(t)dt = \int_0^\infty \int_0^t \Psi(t,\tau) i_{m-1}(t-\tau)d\tau dt$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(s+\tau,s)ds i_{m-1}(\tau)d\tau$$

それゆえ時間に依存するパラメータをもつ人口システムにおいては、次世代作用素を、単純に時間的に集計された世代分布の間の作用素としては定義できない。そこで別の集計方法を考えよう。

新生児は出生時刻とその状態で特徴付けられるが、周期的な環境においては周期 $\theta$ の整数倍の差をもつ時間パラメータは状態変数としては同じものと見なせる。というのも、そのような $\theta$ を法として合同な出生時刻をもつ個体は、環境の周期性によって全く同じライフサイクルを経験するからである。それゆえ、次世代作用素は周期関数の空間上の作用素として定義されると考えられる。この場合、時間パラメータは実時間を示すのではなく、出産時点における周期的な環境（シーズン）を指示するパラメータと考えられる。

そこで、$\theta$ 周期を持つ局所可積分な $E$-値関数のなす関数空間を $Y_\theta$ としよう。そのノルムを

$$\|f\|_{Y_\theta} := \int_0^\theta \|f(t)\|_E dt = \int_0^\theta dt \int_{\Omega_b} |f(t,\zeta)|d\zeta$$

とする。そこで次世代作用素 $K_\theta$ を以下のように定義しよう：

$$(K_\theta f)(t) := \int_0^\infty \Psi(t,\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad f \in Y_\theta$$

一方、周期系に対する世代推進作用素 (GEO) は以下のように定義される：

$$(K_Y f)(t) := \int_0^t \Psi(t,\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad f \in Y_+ \tag{3.7}$$

従って、(3.6) は再び $Y_+$ における反復過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ と見なされる。ここでは $K_Y$ は $Y_+$ を不変にする $Y$ 上の有界線形作用素である。

世代分布を集計するために、以下のような周期化作用素 $U : Y \to (Y_\theta)_+$ を導入しよう：

$$(Uf)(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f^*(t+n\theta)|, \quad t \in \mathbf{R},$$

ここで $f^* \in L^1(\mathbf{R} \times \Omega_b)$ は $f$ の定義域を実数全体へ拡張したものであり、 $t \geq 0$ では $f^*(t) = f(t)$、$t < 0$ では $f^*(t) = 0$ である。このとき周期化作用素 $U$ は世代分布 $f \in Y_+$ とそれを $n\theta$ だけ時間軸上でシフトさせた分布 $f^*(t+n\theta)$ を同一視することによって、世代分布を集計している作用であると考えられる。このとき以下が成り立つ：

**補題 3.1**

$$\|f\|_Y = \|Uf\|_{Y_\theta} \tag{3.8}$$

$$UK_Y f = K_\theta U f, \quad f \in Y_+ \tag{3.9}$$

（証明）$f \in Y_+$ であれば、以下を得る：

$$\|Uf\|_{Y_\theta} = \int_0^\theta dt \int_{\Omega_b} d\zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^*(t+n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} dt \int_{\Omega_b} d\zeta f^*(t)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} dt \int_{\Omega_b} d\zeta f(t) = \int_0^\infty \|f(t)\|_E dt = \|f\|_Y$$

必ずしも正ではない一般の $f \in Y$ に関しては, その正部分 $f_+$ と負の部分 $f_-$ へ分解すれば、 $f = f_+ - f_-$ であり、

$$\|f\|_Y = \|f_+\|_Y + \|f_-\|_Y = \|Uf_+\|_{Y_\theta} + \|Uf_-\|_{Y_\theta}$$

一方、

$$\begin{aligned}(Uf)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f^*(t+n\theta)| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_+^*(t+n\theta) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_-^*(t+n\theta) \\ &= (Uf_+)(t) + (Uf_-)(t)\end{aligned}$$

であるから、

$$\|Uf\|_{Y_\theta} = \|Uf_+\|_{Y_\theta} + \|Uf_-\|_{Y_\theta}$$

を得る。そこで $\|f\|_Y = \|Uf\|_{Y_\theta}$ である。次に (3.9) を示そう。 $f \in Y$ に対して

$$(K_Y f)^*(t) = \int_0^\infty \Psi(t,s) f^*(t-s) ds$$

である。それゆえ、 $f \in Y_+$ であれば以下を得る：

$$\begin{aligned}(UK_Y f)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \Psi(t+n\theta, s) f^*(t+n\theta-s) ds \\ &= \int_0^\infty \Psi(t,s)(Uf)(t-s) ds\end{aligned}$$

これは (3.9) が成り立つことを示している。(証明終)

上記の定理によって、$Y$ 空間上の世代推進過程 (3.6) は $Y_\theta$ 空間上の反復過程に移し替えられることになる。実際、$U$ を実時間における過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ に作用させれば、(3.9) によって以下を得る：

$$Ui_m = UK_Y i_{m-1} = K_\theta U i_{m-1} \tag{3.10}$$

このとき世代のサイズは保存されている（$\|i_m\|_Y = \|Ui_m\|_{Y_\theta}$）ことに注意しよう。(3.10) から、集計された世代分布に作用する $K_\theta$ を次世代作用素とみなすことができる。

正作用素の理論を適用するために、もう一度集計をおこなおう。周期性を利用すれば、$K_\theta$ は $Z := L^1([0,\theta]; E)$*8上の積分作用素に還元される。$Z$ 空間上の正作用素 $K_Z : Z \to Z$ を以下のように定義しよう：

$$(K_Z\phi)(t) := \int_0^\theta \Pi(t,s)\phi(s) ds, \quad t \in [0,\theta), \quad \phi \in Z, \tag{3.11}$$

ここで、

$$\Pi(t,s) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(t, t-s+n\theta), & t > s, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(t, t-s+n\theta), & t < s. \end{cases}$$

である。 $V : Y_\theta \to Z$ は周期関数からその一周期分を切り出す作用素 $(Vf)(t) = f(t), t \in [0,\theta]$ であるとしよう。このとき以下がただちにわかる：

*8 この還元は [3] において示されているので詳しい証明は略する。