

- International Population Conference, September 27 - October 2, 2009, Marrakech, Morocco.
- 鎌田健司・岩澤美帆.2009.「日本における近年の家族形成パターン: 地理・地域の視点からみた関連性」日本人口学会第61回大会、関西大学(6.12-14).
 - Iwasawa, M iho, Kenji K amata, Kimiko Tanaka and R yuichi Kaneko. 2009. “Regional patterns and correlates in recent family formation in Japan: Spatial Analysis of Upturn in Prefecture-level Fertility after 2005” Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 29 - May 1, 2009, Detroit, MI, US.
 - Iwasawa, M iho.2009. “The end of lowest-low fertility in Japan?: explanations for regional fertility reversal after 2005.” Demographic Seminar, Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2009, Madison, WI, US.
- 平成 22 年度
- Ryuichi Kaneko. 2010. “Applying fertility projection system to period effect analysis: An examination on recent upturn in Japan.” Paper presented at Joint Eurostat-UNECE Work Session on Demographic Projections, 28 -30 April 2010, Lisbon, Portugal.
 - Ryuichi Kaneko. 2010. “Multistage models of first marriage and birth: An extension of the Coale-McNeil nuptiality model.” Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 15-17, 2010, Dallas, TX.
 - 金子隆一、「近年の日本人の結婚・出生行動の変化(シンポジウム 日本の少子化とジェンダー・システム: 一性別役割分業の超克は可能か?—)」日本人口学会第62回年次大会(2010/6/12-13)、お茶の水女子大学、東京.
 - H. Inaba (2010), On the definition of the basic reproduction number for infectious diseases in heterogeneous environments, The 3rd China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, October 18-21, 2010, Beijing, China.
 - 稲葉寿 (2010), 変動環境下における基本再生産数の定義について, 第7回生物数学の理論とその応用, 2010年11月16日~19日, 京都大学数理解析研究所.
 - Futoshi Ishii, “Application of Age-Transformation Approaches to Mortality Projection for Japan”, Annual meeting of Population Association of America, Dallas, TX (2010.4.15)
 - Futoshi Ishii, “Application of Age-Transformation Approaches to Mortality Projection for Japan”, Joint Eurostat-UNECE Work Session on Demographic Projections, Lisbon, Portugal (2010.4.29)
 - 石井 太「死亡率推計モデルにおける年齢変換アプローチの応用」, 日本人口学会第62回大会, お茶の水女子大学 (2010.6.12)
 - Futoshi Ishii, “Provisional plan for the Japanese Mortality Database and its cause of death data”, Third HMD Symposium, INED, Paris, France (2010.6.17)
 - 石川晃「将来人口推計における国際人口移動仮定方法の検討」第62回日本人口学会 於: お茶の水大学 (2010年6月)
 - 佐々井司・石川晃「近年における国際人口移動の動向と人口構造に及ぼす影響」第63回日本人口学会 於: 京都大学 (2011年6月予定)
 - Iwasawa, M iho, Kenji K amata, Kimiko Tanaka and R yuichi Kaneko. 2009. “Recent family formation patterns in Japan: Evidence from geographical patterns and regional correlates.” Paper presented at the XVI IUSSP International Population Conference, September 27 - October 2, 2009, Marrakech, Morocco.
 - 鎌田健司・岩澤美帆.2009.「日本における近年の家族形成パターン: 地理・地域の視点からみた関連性」日本人口学

会第 61 回大会、関西大学(6.12-14).

- Iwasawa, Miho, Kenji Kamata, Kimiko Tanaka and Ryuichi Kaneko. 2009. “Regional patterns and correlates in recent family formation in Japan: Spatial Analysis of Upturn in Prefecture-level Fertility after 2005” Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 29 – May 1, 2009, Detroit, MI, US.
- Iwasawa, Miho. 2009. “The end of lowest-low fertility in Japan?: explanations for regional fertility reversal after 2005.” Demographic Seminar, Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2009, Madison, WI, US.
- Iwasawa, Miho, Kenji Kamata and Ryuichi Kaneko. 2010. “Explanations for the Fertility Reversal after 2005 in Japan” Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 15-17, 2010, Dallas, TX.
- Iwasawa, Miho and Ryuichi Kaneko. 2010. Explanations for Regional Fertility Reversal after 2005 in Japan: Demographic, Socio-economic and Cultural factors. Paper presented at Joint Eurostat-UNECE Workshop on Demographic Projections, 28 -30 April 2010, Lisbon, Portugal.
- 岩澤美帆. 2010. 「2005 年以降の合計出生率反転の要因—都道府県別データを用いた空間分析の応用—」日本社会学会大会、名古屋大学(2010.11.7)
- 守泉理恵「出生意欲データを用いた出生率推計の試み」日本人口学会第 62 回大会 お茶の水女子大学 (2010.6.13)
- 別府志海、「有配偶女性の就業形態の変化と出生力の人口学的分析」日本人口学会第 62 回年次大会(2010/6/12-13)、お茶の水女子大学、東京.

G. 知的所有件の取得状況

なし

Ⅱ. 個別研究報告

(人口動態事象および構造変化の数理モデルに
関する研究)

人口再生産の数理モデル

1 多状態安定人口モデルにおける状態別再生産数とその応用

稲葉 寿

1 はじめに

1970年代に人口学者のロジャース (Andrei Rogers) とルブラ (Herve Le Bras) はそれぞれ独立に、地理的に分割された人口集団とその地域間人口移動を考慮に入れるように安定人口モデルを拡張する試みを行った。これは数学的に言えば、古典的な安定人口モデル (スカラーモデル) をベクトルモデルへ拡張することであるが、多状態モデルを考察することは、一般に個体が同一年齢においてもその人口学的挙動に関して同質的ではないというリアリティをモデルに反映させるための重要な一歩である。社会科学、生物学、疫学等における定量的問題においては、個体群の様々な状態間における配置とその動的推移の問題として定式化されるものが数多く存在するから、多状態人口学の考え方の潜在的な応用範囲は非常に大きい。

ロジャースとその協力者は理論的モデルの提示にとどまらず、現実の入手可能なデータからパラメータを推定して、実用性のある多地域人口推計モデルを構築する方法論を示したため、その方法論は地域人口のみならず、労働力状態や配偶状態などの一般の多状態人口モデル (multistate demographic models) に適用されて大きな成功を収めた。特に今日では、計算能力はさらに飛躍的に発展しているから、利用しやすいプログラムパッケージなどの開発が進めば、多状態人口モデルの応用範囲は非常に広がるであろう。

一方、多状態人口モデルの理論に関してみると、多状態の純再生産行列が分解不能であれば、人口学の基本定理 (安定人口モデルの強エルゴード定理) が成立することがわかっているが、まだ多くの未解明の課題が残されている。たとえば多状態安定人口の純再生産率 (基本再生産数 R_0) は純再生産行列のスペクトル半径として与えられ、その性格はいささか抽象的である。とくに出生力の変動が特定の状態においてのみ発生するときに、 R_0 にどのような影響をおよぼすか、という問題は興味深い。たとえば日本や西欧のような $R_0 < 1$ である少子化国において、ある地域ないしライフステージにおける出生力を上昇させることで全人口の R_0 を1以上にすることは可能であるか?、可能な場合はどの程度の上昇が必要か、という問いは、少子化国の人口政策を考えていく上で基本的な重要性をもっている。逆に、発展途上諸国においては、農村部などの高止まりしている出生力をどのていど引き下げれば、人口が定常化されるかに関心もたれている。

本稿では、上記の問題意識のもとで、多状態安定人口モデルにおいて各状態別の再生産数 (state-reproduction number) を定義して、それによる閾値条件、制御条件の定式化をおこなう。

2 多状態安定人口モデルと基本定理

2.1 基礎理論

はじめに多状態安定人口モデルの基本的な性質をみておこう。いま単性の人口が有限個の相互に排他的な状態 (state) に分割されているとして、 $i = 1, 2, \dots, n$ を各状態を示す番号であるとする。ここで人口の状態とは個体の動態に影響を与えるような特性であって、具体的には居住地域、労働力状態、結婚状態、パリティ (出産歴) 等が考えられる。 $p_i(t, a)$ は i - 地域の人口密度関数であるとして、人口ベクトルを

$$p(t, a) = (p_1(t, a), \dots, p_n(t, a))^T,$$

と定義しておく。ここで τ は行列の転置作用を示す。 $q_{ij}(a)$, $i \neq j$ を状態 j から状態 i への瞬間的な推移強度、 $\mu_j(a)$ を状態 j における死亡力関数であるとする。さらに

$$q_{jj}(a) = -\mu_j(a) - \sum_{i \neq j} q_{ij}(a), \quad i \leq j \leq n,$$

と定義して、 $q_{ij}(a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列を $Q(a)$ とする。また $m_{ij}(a)$ は状態 j にある個体が i 状態に属する新生児を産む年齢別出生率関数であるとする。 $M(a)$ を $m_{ij}(a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列とする。

このときベクトル型あるいは多状態の安定人口モデルは以下のようなベクトル型のマッケンドリックシステムとして表される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial p(t, a)}{\partial a} &= Q(a)p(t, a), \quad t > 0, \quad a > 0, \\ p(t, 0) &= \int_0^\infty M(a)p(t, a)da, \quad t > 0, \\ p(0, a) &= p_0(a). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで $p_0(a)$ は初期人口ベクトルである。

上記のシステムに対応する再生方程式を導くために以下のような行列微分方程式を考えよう：

$$\frac{dL(a)}{da} = Q(a)L(a), \quad L(0) = I \tag{2.2}$$

ここで I は $n \times n$ の単位行列である。 $Q(a)$ を連続関数と仮定しておけば、常微分方程式論でよく知られているように、 $L(a)$ は常微分方程式システム

$$\frac{dp(a)}{da} = Q(a)p(a)$$

の基本解行列に他ならない。 $p(a)$ は n 次元ベクトルであり、これを多状態の出生コーホートを表す人口ベクトルとみれば、 $p(a)$ はゼロ歳時における状態間の新生児分布が $p(0)$ である場合の a 歳時点で生存している人口の状態間分布に他ならない。 $Q(a)$ は対角要素だけが負であるため、(2.2) は本質的に正なシステムであって、基本解行列 $L(a)$ は非負の正則行列である。 $L(a)$ の (i, j) 要素を $l_{ij}(a)$ とすれば、 $l_{ij}(a)$ は j 状態に出生した個体が a 歳で i 状態に生存している確率を表している。さらに推移行列 $L(b, a)$, $b \geq a$ を $L(b, a) = L(b)L^{-1}(a)$ と定義すれば、これも非負行列であり、その要素 $l_{ij}(b, a)$ は a 歳で j 状態に生存していた個体が b 歳で i 状態に生存している確率を表すことがわかる。

推移行列を用いればマッケンドリック方程式 (2.1) は特性線に沿って積分されて、以下の表現を得る：

$$p(t, a) = \begin{cases} L(a)B(t-a), & t-a > 0 \\ L(a, a-t)p_0(a-t), & a-t > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ただしここで $B(t) := p(t, 0)$ である。従ってスカラーの安定人口モデルの場合と同様に、表現 (2.3) を (2.1) の境界条件の式に代入すれば以下を得る：

$$B(t) = G(t) + \int_0^t \Psi(a)B(t-a)da. \quad (2.4)$$

ただしここで $G(t)$, $\Psi(a)$ は以下のように与えられる既知の関数である：

$$G(t) := \int_t^\infty M(a)L(a, a-t)p_0(a-t)da, \quad \Psi(a) := M(a)L(a).$$

ここで適宜 $M(a)$, $L(a)$ は $a > \omega$ ではゼロとなるように定義域は拡大されているとする。

人口問題で考えている状況においては $G(t)$, $\Psi(a)$ は有界可積分と仮定してよいから、そうした仮定のもとではベクトル型再生積分方程式 (2.4) は $t \in [0, \infty)$ において一意的な局所可積分解 $B(t)$ を持つことが容易にわかる。(2.4) から $B(t)$ の挙動が決定されれば、 $p(t, a)$ の挙動は (2.3) によってすべてきまる。

再生産核行列 Ψ のラプラス変換を

$$\hat{\Psi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda a} \Psi(a) da$$

と書いておく。再生過程 (2.4) に関する純再生産行列 (net reproduction matrix) を

$$K = \hat{\Psi}(0) = \int_0^\infty \Psi(a) da \quad (2.5)$$

と定義する。 $\hat{\Psi}(0)$ が分解不能であれば、ベクトル値再生積分方程式 (2.4) の漸近挙動に関しては、内的成長率 λ_0 および初期条件に依存する正の定数 Q_0 が存在して、以下が成り立つことが知られている：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0 t} B(t) = Q_0 u_0 \quad (2.6)$$

ここで内的成長率 λ_0 は、 $\hat{\Psi}(\lambda)$ が固有値 1 をもつような実数 (あるいはそのスペクトル半径 $r(\hat{\Psi}(\lambda))$ が 1 となるような実数) として与えられ、 u_0 はそのときの固有値 1 に属する正右固有ベクトルである。

非負行列 K のスペクトル半径 (K のフロベニウス根) を $r(K)$ とするとき、 $\hat{\Psi}(\lambda_0) = 1$ で、 $\hat{\Psi}(\lambda)$ は実数 λ に関して単調減少であるから、 $r(K) > 1$ であれば、 $\lambda_0 > 0$ となり、 $r(K) = 1$ であれば、 $\lambda_0 = 0$ 、 $r(K) < 1$ であれば、 $\lambda_0 < 0$ となることがわかる。そこで、 $r(K)$ を純再生産率 (net reproduction rate) とよぶ。

さらに v_0 を対応する左固有ベクトルとすれば、 Q_0 は以下のように計算される：

$$Q_0 = \frac{v_0^T \hat{G}(\lambda_0)}{v_0^T \Psi_1 u_0} \quad (2.7)$$

ここで、

$$\Psi_1 = \int_0^\infty a e^{-\lambda_0 a} \Psi(a) da$$

である。したがって、年齢分布関数ベクトル $p(t, a)$ に関しては、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0 t} p(t, a) = Q_0 e^{-\lambda_0 a} L(a) u_0 \quad (2.8)$$

がなりたち、状態別の年齢プロファイルは多状態安定人口分布に収束する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t, a)}{\int_0^\infty |p(t, a)| da} = \frac{e^{-\lambda_0 a} L(a) u_0}{\int_0^\infty e^{-\lambda_0 a} |L(a) u_0| da} \quad (2.9)$$

ただしここで n ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ のノルムとしては $|p| = \sum_{i=1}^n |p_i|$ を採用する。

とくに K が分解不能で固有値 1 をもてば、その対応する固有ベクトルを u_0 とするとき多状態の人口モメンタムが

$$M = \frac{\int_0^\infty |L(a) u_0| da}{\int_0^\infty |p_0(a)| da} \frac{v_0^T \hat{G}(0)}{v_0^T \Psi_1 u_0} \quad (2.10)$$

として計算される。ただし、

$$\Psi_1 = \int_0^\infty a \Psi(a) da$$

であり、 v_0 は K の固有値 1 に属する左固有ベクトルである。多状態モデルにおいては、 K が固有値 1 をもつようにパラメータを変更する方法は、スカラーモデルの場合以上に多様であることは明らかであろう。純再生産行列のパラメータ変更は、その固有ベクトルも変えてしまうので、たとえ初期データが安定人口分布であっても、スカラーモデルにおける Keyfitz のモメンタム公式のような単純な形は得られない。

2.2 出生状態と非出生状態

人口を分類する状態に関して、ある状態に新生児が出生する可能性がある場合には、その状態を**出生状態** (birth state) とよぶ。例えば、状態が居住地域である場合はすべてが出生状態であるが、労働力状態別人口では、非労働力が出生状態であり、結婚状態別人口では未婚状態が出生状態、年齢依存パリティ拡大モデルではパリティゼロ状態だけが出生状態である。年齢依存モデルにおいては、非出生状態の境界条件はゼロとなるが、持続時間依存モデルでは必ずしもそうではないことに注意しなければならない。また非出生状態からの生残率は形式的に計算可能であるが、實際上意味がない。

多地域人口モデルのように、全状態（地域）が出生状態である場合は、純再生産行列 $K = \hat{\Psi}(0)$ を、数理疫学の用語にならって、**次世代行列** (next generation matrix) にとよぶことができる。次世代行列のスペクトル半径は**基本再生産数** (basic reproduction number) とよばれ、 R_0 と書かれる。すなわち、全状態が出生状態である場合は、純再生産行列と次世代行列が一致して、純再生産率と基本再生産数は等しい。しかし、一般には上記で述べた労働力状態別人口や結婚状態別人口などのように、状態は非出生状態を含んでいて、再生方程式 (2.4) は $0 = 0$ という自明な関係式を含んでいる。そうした場合は純再生産行列 $\hat{\Psi}(0)$ は次世代行列とは異なる。

いま一般性を失うことなく、状態番号を付け替えて出生状態は 1 から k ($\leq n$) であると仮定できる。このとき年齢依存モデルを考えると、 $B_{k+1} = \dots = B_n = 0$ であって、(2.3) は実際には k 次元ベクトル $B^*(t) = (B_1(t), \dots, B_k(t))$, $G^*(t) = (G_1(t), \dots, G_k(t))$ と $\Psi(a)$ の k 次首座行列 $\Psi^*(a) = (\psi_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ による方程式となる：

$$B^*(t) = G^*(t) + \int_0^t \Psi^*(a) B^*(t-a) da. \quad (2.11)$$

このときの次世代行列 $K^* = \int_0^\infty \Psi^*(a) da$ は $K = \hat{\Psi}(0)$ の k 次首座行列であるが、 K のそれ以外の要素はすべてゼロだから、次世代行列のスペクトル半径として与えられる基本再生産数 R_0 は、非出生状態を含む純再生産行列 K のスペクトル半径（純再生産率）に等しい。

いま (2.11) において、初期人口からみて n 世代目の出生数ベクトルを $B_n^*(t)$ とすれば、

$$B_1^*(t) = G^*(t), \quad B_{n+1}^*(t) = \int_0^t \Psi^*(a) B_n^*(t-a) da$$

であり、 $B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^*(t)$ となる。このとき累積出生児数ベクトル $X_n = \int_0^{\infty} B^*(t) dt$ は以下をみたす：

$$X_{n+1} = K^* X_n,$$

ここで $K^* = \int_0^{\infty} \Psi^*(a) da$ は次世代行列である。したがって、 $X_n = (K^*)^{n-1} X_1$ であり、 K^* の固有値 R_0 に対応する正固有ベクトルを u_0 とすれば、初期条件に依存する正定数 C が存在して、 $X_n \sim C R_0^{n-1} u_0$ となるから、 $R_0 = r(K^*)$ は漸近的な、継続する世代のサイズ比に等しい。

例題 2.1 女性人口をシングルと有配偶の 2 状態にわけ、それぞれの出生率を $\beta_1(a), \beta_2(a)$ 、生残率を $\ell_{ij}(a)$ とすれば、

$$\Psi(a) = \begin{pmatrix} \beta_1(a) & \beta_2(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11}(a) & \ell_{12}(a) \\ \ell_{21}(a) & \ell_{22}(a) \end{pmatrix}$$

となる。したがってこの場合、次世代行列は一次元であって、それ自身が純再生産率（基本再生産数）になっている：

$$R_0 = K^* = \int_0^{\infty} [\beta_1(a)\ell_{11}(a) + \beta_2(a)\ell_{21}(a)] da.$$

状態間移動の強度を

$$Q(a) = \begin{pmatrix} -q_{21}(a) - \mu_1(a) & q_{12}(a) \\ q_{21}(a) & -q_{12}(a) - \mu_2(a) \end{pmatrix}$$

としよう。このとき $\mu_j(a)$ は状態 j での自然死亡率であり、 $q_{21}(a)$ は結婚強度、 $q_{12}(a)$ は離婚ないし配偶者が死亡する強度である。この場合、新生児はすべて単身状態に生まれるから、生残率として意味のあるのは $\ell_{11}(a), \ell_{21}(a)$ だけであり、初期値問題

$$\frac{d}{da} \begin{pmatrix} \ell_{11}(a) \\ \ell_{21}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{21}(a) - \mu_1(a) & q_{12}(a) \\ q_{21}(a) & -q_{12}(a) - \mu_2(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11}(a) \\ \ell_{21}(a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ell_{11}(0) \\ \ell_{21}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解として与えられる。

上記のように、基本モデルが年齢依存モデルであって、「出生」が文字通り年齢ゼロの新生児の再生産を意味する場合には、状態として非出生状態が含まれていても $r(K) = r(K^*)$ なので、システムの純再生産率 $r(K)$ と基本再生産数 $R_0 = r(K^*)$ と区別する必要はない。ところが、Feeney のパリティ拡大モデルのように、年齢のかわりに持続時間が使用される場合には、基本モデル (2.1) の純再生産率 $r(K)$ は、基本再生産数 $R_0 = r(K^*)$ とは異なり、しかも新生児は、非出生状態を経由して再生産されるので、(2.10) のような出生状態のみからなる再生産モデルを簡単に書き下すことはできない。

例題 2.2 持続時間依存のパリティ拡大モデル（最大パリティ n ）を考えると、 $n-1$ パリティまでの再生産に

関する純再生産行列は以下のような形をしている：

$$K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & \dots & \dots & k_{n-1} \\ k_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & k_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、 k_j はパリティ j におけるパリティ拡大率である。新生児はパリティゼロに生まれるから、状態 1 のみが出生状態であり、そのほかの状態の再生産は出産にともなうパリティ増加を意味している。

K はレスリー行列であるから、その固有値は以下の特性方程式の根で与えられることはよく知られている：

$$F(\lambda) := \frac{k_0}{\lambda} + \frac{k_1 k_0}{\lambda} + \dots + \frac{k_{n-1} k_{n-2} \dots k_0}{\lambda^n} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

$F(\lambda)$ は $\lambda > 0$ に関して単調減少であり、 $r(K)$ は (2.12) の唯一の正根であるから、 $F(1) > 1$ であれば $r(K) > 1$ であり、 $F(1) < 1$ であれば $r(K) < 1$ である。その生物学的な意味から、

$$F(1) = k_0 + k_1 k_0 + \dots + k_{n-1} k_{n-2} \dots k_0,$$

は 1 人の女性が生涯に生む（同性）子供数となるから、これが 1 次元の次世代行列 ($K^* = F(1)$) であり、基本再生産数 R_0 となる。一方、 $r(K)$ は世代的に見た持続時間ゼロのパリティ別人口ベクトルのサイズの漸近的成長率であり、 R_0 とは解釈されない。

3 部分集団の再生産理論

上記のように出生状態と非出生状態が混合している場合、純再生産行列 K の正固有値は考えている人口の基本再生産数 R_0 を与えない。基本再生産数は出生状態のみからなる状態ベクトルの再生方程式から導かれるはずである。一方、すべてが出生状態からなる人口システムにおいても、そのうちの特定集団の再生産数を考えることは、応用上非常に重要である。例えば、特定の状態にある人口のみが人口政策的介入の対象になる場合、介入行為の結果として全人口システムの再生産がどのような影響を受けるか、という問は非常に興味深い。そこで以下では、全状態を二つの集団（ターゲットとノンターゲット）にわけて、ターゲット人口集団の再生産を記述する再生方程式を導くことを考えよう。

一般性を失うことなく状態番号を付け替えて、最初の 1 から k までの状態がターゲットとなる部分人口集団の状態であるとする。すなわち N 個の状態をターゲットとなる集団とそれ以外の集団に分割する： $\{1, 2, \dots, N\} = \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k+1, \dots, N\} =: \Omega_+ \cup \Omega_-$ 。 Ω_+ はターゲットとなる状態の集合である。

$B(t) = (B_1(t), \dots, B_N(t))^T$ を出生率ベクトルとする。このとき再生方程式 (2.3) における出生率 $B(t)$ と初期データ $G(t)$ を以下のように分解しよう：

$$\begin{aligned} B_+(t) &= (B_1(t), \dots, B_k(t), 0, \dots, 0)^T, & B_-(t) &= B(t) - B_+(t), \\ G_+(t) &:= (G_1(t), \dots, G_k(t), 0, \dots, 0)^T, & G_-(t) &= G(t) - G_+(t). \end{aligned}$$

ターゲットの状態への $N \times N$ 射影行列を以下のように定義する：

$$P := \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

ここで I_{11} は $k \times k$ の単位行列であり、 O_{jk} はゼロ行列である。たとえば O_{22} は $(N - k) \times (N - k)$ のゼロ行列となる。 $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ とすれば、 $i \in \Omega_+$ であれば $p_{ii} = 1$ 、それ以外の場合は $p_{ij} = 0$ となる。そこで $B_+(t) = PB(t)$, $B(t)_- = (I - P)B(t)$ 等と表現できる。

上記の分割に対応して、再生方程式 (2.4) は二つの方程式へ分解される：

$$\begin{aligned} B_+(t) &= G_+(t) + \int_0^t P\Psi(\tau)B_+(t - \tau)d\tau + \int_0^t P\Psi(\tau)B_-(t - \tau)d\tau, \\ &= G_+(t) + (\Psi_+ * B_+)(t) + (\Psi_+ * B_-)(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} B_-(t) &= G_-(t) + \int_0^t (I - P)\Psi(\tau)B_+(t - \tau)d\tau + \int_0^t (I - P)\Psi(\tau)B_-(t - \tau)d\tau, \\ &= G_-(t) + (\Psi_- * B_+)(t) + (\Psi_- * B_-)(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで $\Psi_+ := P\Psi$, $\Psi_- := (I - P)\Psi$ であり、 $*$ は関数の合成積を表す。

積分核 $\Psi_{\pm}(\tau)$ に対応するレゾルベント核を $\Phi_{\pm}(\tau)$ としよう。レゾルベント核は以下の (行列) 積分方程式の解として得られる：

$$\Phi_{\pm} = \Psi_{\pm} + \Phi_{\pm} * \Psi_{\pm} \quad (3.3)$$

明らかにレゾルベント核 Φ_{\pm} は逐次代入によって以下のように具体的に得られる：

$$\Phi_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\pm}^{(n)} \quad (3.4)$$

ここで、 $\Psi_{\pm}^{(n)}$ は逐次的に以下のように計算される：

$$\Psi_{\pm}^{(1)} = \Psi_{\pm}, \quad \Psi_{\pm}^{(n+1)} = \Psi_{\pm}^{(n)} * \Psi_{\pm-}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

方程式 (3.2) において $g_- + \Psi_- * v_+$ を初期データとみなせば、レゾルベント核を用いて方程式 (3.2) は形式的に v_- に関して解くことができる：

$$\begin{aligned} v_- &= g_- + \Psi_- * v_+ + \Phi_- * (g_- + \Psi_- * v_+) \\ &= g_- + \Phi_- * g_- + (\Psi_- + \Phi_- * \Psi_-) * v_+. \end{aligned} \quad (3.5)$$

方程式 (3.5) から方程式 (3.1) へ v_- の表現を投入すれば、 v_+ に関する再生方程式を得る：

$$v_+ = g_+ + \Psi_+ * g_- + (\Psi_+ * \Phi_-) * g_- + [\Psi_+ + \Psi_+ * (\Psi_- + \Phi_- * \Psi_-)] * v_+. \quad (3.6)$$

それゆえ、積分核

$$\begin{aligned} A_+(\tau) &:= \Psi_+(\tau) + (\Psi_+ * \Psi_-)(\tau) + \Psi_+ * (\Phi_- * \Psi_-)(\tau) \\ &= \Psi_+(\tau) + (\Psi_+ * \Phi_-)(\tau) \end{aligned} \quad (3.7)$$

がターゲット集団 ℓ_+ の再生ダイナミクスを決定している。

以下では Φ_- は $[0, \infty)$ 上で可積分であると仮定しよう。そのときは A_+ も可積分となり、その積分は以下のように計算される：

$$M_+ := \int_0^{\infty} A_+(\tau)d\tau = K_+(I + Q_-) \quad (3.8)$$

ここで

$$K_+ := PK = \int_0^\infty \Psi_+(\tau) d\tau, \quad Q_- := \int_0^\infty \Phi_-(\tau) d\tau$$

であり、レゾルベント方程式 (3.3) を積分して得られる関係

$$Q_- = K_- + Q_- K_- \quad (3.9)$$

を用いている。

レゾルベント核 Φ_- が可積分であるための必要十分条件は複素平面上の右半平面にあるすべての λ に対して以下が成り立つことである (Paley–Wiener の定理 [3]) :

$$\det(I - \hat{\Psi}_-(\lambda)) \neq 0. \quad (3.10)$$

$\Psi_{jk}(\tau)$ $1 \leq j, k \leq 2$ を以下のような Ψ の小行列でとしよう :

$$\Psi(\tau) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(\tau) & \Psi_{12}(\tau) \\ \Psi_{21}(\tau) & \Psi_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

ここで Ψ_{11} は $\ell \times \ell$ の首座小行列であり、 Ψ_{22} は $(N - \ell) \times (N - \ell)$ の首座小行列である。したがって、

$$\Psi_-(\tau) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ \Psi_{21}(\tau) & \Psi_{22}(\tau) \end{pmatrix}, \quad I - \hat{\Psi}_-(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ -\hat{\Psi}_{21}(\lambda) & I_{22} - \hat{\Psi}_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

ここで、 I_{11} は $\ell \times \ell$ の単位行列であり、 I_{22} は $(N - \ell) \times (N - \ell)$ の単位行列である。このとき以下が容易にわかる :

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \det(I - \hat{\Psi}_-(\lambda)) = 0\} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \det(I_{22} - \hat{\Psi}_{22}(\lambda)) = 0\}. \quad (3.11)$$

Ψ の分割に対応して、小行列 K_{jk} を以下のように定義できる :

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

ここで

$$K_{jk} = \int_0^\infty \Psi_{jk}(\tau) d\tau = \hat{\Psi}_{jk}(0).$$

したがって、

$$K_- = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

であり、

$$r(K_{22}) = r(K_-) \quad (3.12)$$

を得る。行列 K_{11} , K_{22} はそれぞれターゲット集団、非ターゲット集団が他集団を利用せずに自己再生産する場合の純再生産行列であるから、そのスペクトル半径を**自己再生産数** (self-reproduction number) とよんでおこう。

多状態安定人口モデルにおける Euler–Lotka の特性方程式に関する結果 ([5]) から、 $\hat{\Psi}_{22}(0) = K_{22}$ が分解不能であれば、 $\det(I - \hat{\Psi}_{22}(\lambda)) \neq 0$ が右半平面で成り立つためには、 $r(\hat{\Psi}_{22}(0)) = r(K_{22}) < 1$ となることが必要十分である。この条件は (3.12) によって、 $r(\hat{\Psi}_-(0)) = r(K_-) < 1$ という条件と同値である。したがって条件 (3.10)、すなわち Φ_- の可積分性は、 $r(K_-) < 1$ であるとき、かつそのときのみ成立する。そこで以下の仮定を導入しよう :

仮定 3.1 非ターゲット集団の自己再生産数は 1 未満である：

$$r(K_-) = r(K_{22}) < 1. \quad (3.13)$$

条件 3.1 はターゲット集団が取り除かれれば、残りの状態別人口だけでは純再生産率は臨界以下であって、人口を維持できないことを意味している。一方、もし $r(K_-) > 1$ であれば、ターゲットではない集団 l_- は、ターゲット集団 l_+ が存在しなくても、滅亡することなく自己を維持できる。全体システムが分解不能という条件のもとでは、そのことは必然的に全人口の内的成長率が正であること、あるいは $r(K) > 1$ であることを意味している。このときターゲット集団の新生児は非ターゲット状態を通じて無限に子孫を再生産できるから、その再生産数は ∞ に発散する。

仮定 3.1 のもとでは、行列 $I - K_-$ は非負逆転可能であり、(3.9) の正の解が以下のように得られる：

$$Q_- = K_-(I - K_-)^{-1}. \quad (3.14)$$

上記の解 (3.14) を (3.8) に適用すれば、

$$M_+ = K_+(I - K_-)^{-1}. \quad (3.15)$$

M_+ の最初の ℓ 行 ℓ 列からなる $\ell \times \ell$ 首座行列を M_{+11} は、ターゲット集団 l_+ の純再生産行列を与え、 $r(M_{+11}) = r(M_+)$ となる。実際、 M_+ は最初の l_+ 行のみが非負の要素をもち、他の行はゼロだからである。したがってターゲット集団 l_+ の状態別再生産数を T_+ で表せば、

$$T_+ = r(M_{+11}) = r(M_+). \quad (3.16)$$

定理 3.2 仮定 3.1 のもとで、 M_{+11} が分解不能であれば、 $r(K) > 1$ ならば $T_+ > 1$ であり、 $r(K) = 1$ ならば $T_+ = 1$ 、 $r(K) < 1$ であれば $T_+ < 1$ となる。

(証明) $w > 0$ を固有値 $r(K)$ に対応する K の正固有ベクトルとする。方程式 (3.16) から、以下を得る：

$$M_+(I - K) = (I - M_+)K_+ = (I - M_+)PK. \quad (3.17)$$

(3.18) を w に適用すれば、

$$(1 - r(K))M_+w = r(K)(I - M_+)Pw. \quad (3.18)$$

$M_+w \geq 0$ であり、 $Pw \geq 0$ であるから、もし $1 - r(K) > 0$ であれば $I - M_+$ は非負逆転可能でなければならず、 $T_+ = r(M_+) < 1$ である。次に $r(K) \geq 1$ であるとしよう。 $(Pw)_+$ を ℓ 次元ベクトルで、その j 番目 ($1 \leq j \leq \ell$) の要素が、 Pw の j 番目の要素であるものとする。このとき $r(K) = 1$ であれば、 $(I_{11} - M_{+11})(Pw)_+ = 0$ である。 M_{+11} は分解不能なので、 $(Pw)_+$ はそのフロベニウス固有ベクトルであり、 $r(M_{+11}) = T_+ = 1$ である。 $r(K) > 1$ であれば、 $(Pw)_+ < M_{+11}(Pw)_+$ であるから、 $r(M_{+11}) = T_+ > 1$ となる ([1], p. 28, (1.11) を参照)。

4 出生力の制御による人口定常化

先進諸国のような劣臨界出生力 ($R_0 < 1$) をもつ国々では、出生力を上げて定常状態へ移行するにはどの程度出生力を上昇させるべきかが問題となる。逆に発展途上諸国では出生力は過臨界 ($R_0 > 1$) であり、定常化のためにどの程度出生力を低下させるべきかが問われる。一国の人口を同質的な集団として一括して扱う場合

は、古典的な安定人口モデルによって臨界的な出生力水準が規定されるが、現実的な人口は人口学的パラメータが多様な多状態人口であり、人口学的政策も必ずしも全人口に一律に適用できる場合だけでなく、一般にはある部分集団にのみ適用されるケースが多い。

多状態人口の定常化の方法とその影響に関してはすでに Rogers and Willekens [11] による古典的研究があるが、これまでは全状態で一斉に出生力を変化させるという仮定が用いられてきた。たとえば、すべての状態の出生力を $(1 - \epsilon)$ 倍すれば、 R_0 は $(1 - \epsilon)R_0$ へ変化するから、臨界的な増加ないし減少の割合は

$$\epsilon^* = 1 - \frac{1}{R_0}$$

として与えられる。あるいはすべての状態の出生コーホートの純再生産率 $\sum_{i=1}^n k_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$ を 1 に変化させることで、 R_0 は 1 となり、理論上は定常状態を達成できるが、出生状態別に純再生産率を制御することは現実的には困難である。

しかし上記の部分集団の再生産理論を用いれば、ターゲット状態の出生力だけを変化させることで、全人口の定常化を実現可能であることがわかる。たとえば、全状態を都市部と農村部に分けた場合、都市人口の自己再生産数が 1 未満であり、農村状態の自己再生産数が 1 以上であれば、農村部の出生力を低下させることで人口の定常化が可能であり、必要な農村部出生力の減少の割合が計算できる。

ここでは特殊な、しかし重要なケースとしてターゲットとなる人口がただ一種のタイプからなる場合を考えよう。一般性を失うことなく、 $l_+ = \{1\}$ と仮定できる。このときは M_+ の $(1, 1)$ 要素が状態 1 の状態別再生産数となり、以下のように計算される：

$$T_+ = \langle e, K_+(I - K_-)^{-1}e \rangle = \langle e, K(I - (I - P)K)^{-1}e \rangle, \quad (4.1)$$

ここで、 $e := (1, 0, \dots, 0)^T$ は第 1 要素だけが 1 で他の要素がゼロであるベクトルである ([9])。

これまで述べたように T_+ が有限値になるのは第二状態以下の人口だけでは内的成長率が正にはならない、すなわち $r(K_-) < 1$ となる場合だけである。このことは第 1 状態を除いた人口システムの自己再生産数は 1 未満で、第 1 状態抜きでは人口が維持できないことを意味している。このような状況下で、全体人口の純再生産率が 1 より大きい ($T_+ > 1$) か、あるいは全人口の純再生産率は 1 より小さい ($T_+ < 1$) 場合に、どのように出生率を制御すれば、臨界条件 $T_+ = 1$ を導くことができるか、を考えよう。

はじめに第一状態の出生率を $1 - \epsilon$ 倍したとしよう。ただし $T_+ > 1$ のときは $\epsilon > 0$ であり、 $T_+ < 1$ のときは $\epsilon < 0$ である。このとき $K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の第一行だけが、 $(1 - \epsilon)k_{1j}$ におきかわるから、 T_+ は $(1 - \epsilon)T_+$ へ変化する。したがって臨界条件は $(1 - \epsilon)T_+ = 1$ であり、

$$\epsilon^* = 1 - \frac{1}{T_+} \quad (4.2)$$

とすれば、 $T_+ > 1$ のときはターゲット状態の出生率を ϵ^* の割合で削減すれば、システムを定常状態へ導ける。逆に $T_+ < 1$ の場合は $-\epsilon^*$ の割合だけ出生率を増加させればシステムは臨界条件を達して定常化する。これを行制御とよぶ。

一方、列和 $\sum_{i=1}^n k_{i1}$ はターゲット状態 1 に生まれた人口が生涯に生む子供数を与えている。そこで、ターゲット状態に生まれた人の出生数を $(1 - \epsilon)$ 倍にしたと仮定しよう。このときも T_+ は $(1 - \epsilon)T_+$ へ変換することが容易に示される ([2])。これを列制御とよぼう。

例題 4.1 以上のことを 2 状態モデルで具体的に考えてみよう。例として Rogers の都市・農村モデル ([12], p.

128) を用いる：

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

このとき 1-状態は都市地域、2-状態は農村地域を示し、都市出身者の純再生産率は 1 であるが、農村出身者のそれは 1.5 であり、全体の基本再生産数は

$$R_0 = r(K) = \frac{1}{2} \left[k_{11} + k_{22} + \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}} \right] = \frac{5}{4} > 1$$

である。都市の自己再生産数は 1 未満であるから、農村部の状態別再生産数が計算できる：

$$T_+ = k_{22} + \frac{k_{12}k_{21}}{1 - k_{11}} = \frac{3}{2}$$

したがって、 $\epsilon^* = 1/3$ であり、農村部の出生力あるいは農村出身者の出生力を 33 パーセント削減すれば定常状態へ至る。一方 $R_0 = 5/4$ から明らかなように、全ての人口の出生力を 20 パーセント削減すれば定常化される。

ただし上記の例において、より長期的に考えれば、農村部の出生力の変化は人口サイズを変化させ、都市・農村間人口移動量を変化させる可能性がある。すなわち k_{ij} の一部の要素の変化は他の要素の変化を導く可能性があることに注意しなければならない。そのような間接作用まで考慮すれば、臨界水準は (4.2) のような単純な公式では与えられないであろう。

例題 4.2 女性人口を未婚 (1) と初婚有配偶 (2) にわけ、女性は未婚と初婚状態においてのみ再生産可能であると仮定する。1 女性が生涯において未婚状態で生む平均女兒数を k_{11} 、初婚有配偶で生む平均女兒数を k_{22} 、生涯の初婚確率を p とする。未婚と初婚有配偶の 2-状態モデルにおける純再生産行列は

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

となる。出生状態は未婚状態だけであるから、この行列は次世代行列ではなく、その正固有値は基本再生産数にはならない。この場合の女子の基本再生産数 R_0 は 1-状態の状態別再生産数であって、それを T_{+1} と書けば、

$$R_0 = T_{+1} = k_{11} + pk_{12}$$

であり、これは確かに 1 女性が生涯に生むと期待される平均女兒数になっている。一方、もし $k_{11} < 1$ であれば有配偶状態の状態別再生産数 T_{+2} が以下のように計算される：

$$T_{+2} = \frac{pk_{12}}{1 - k_{11}}$$

新生児のうちで未婚の母から生まれる子供の割合を $\theta = k_{11}/R_0$ とおけば、

$$T_{+2} = \frac{(1 - \theta)R_0}{1 - \theta R_0} \quad (4.3)$$

を得る。日本人女性を想定して $\theta = 0.05$ 、 $R_0 = 0.65$ とすれば、 $T_{+2} = 0.638$ となる。 T_{+2} は初婚有配偶状態の 1 女性が再生産する次世代の初婚有配偶状態の平均女性数である。

有配偶状態での再生産率の上昇によって定常化を果すためには $1/T_{+2} - 1 = 0.566$ であるから、57 パーセント程度の増加が必要である。 T_{+2} の増加は p の増加 (初婚率の上昇) または k_{12} の上昇 (有配偶出生率の上昇) によって直接的には引き起こされるが、未婚者の自己再生産率 k_{11} の上昇によっても間接的に引き起こされることは注意すべきである。

参考文献

- [1] A. Berman and R. J. Plemmons (1979), *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York.
- [2] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts (2007), The type-reproduction number T in models for infectious disease control, *Math. Biosci.* 206: 3-10.
- [3] M. Iannelli (1995), *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*, Giardini Editori e Stampatori in Pisa.
- [4] 稲葉 寿 (1987), 多次元安定人口理論の数学的基礎 I : 古典論, 「人口問題研究」 184: 52-77.
- [5] H. Inaba (1988), A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process, *Math. Popul. Studies* 1(1): 49-77.
- [6] 稲葉 寿 (2002), 「数理人口学」, 東京大学出版会, 東京.
- [7] 稲葉 寿 (編著) (2008), 「感染症の数理モデル」, 培風館, 東京.
- [8] H. Inaba and H. Nishiura (2008), The state-reproduction number for a multistate class age structured epidemic system and its application to the asymptomatic transmission model, *Math. Biosci.* 216: 77-89.
- [9] M. G. Roberts and J. A. P. Heesterbeek (2003), A new method for estimating the effort required to control an infectious disease, *Proc. R. Soc. Lond. B* 270: 1359-1364.
- [10] A. Rogers (1975), *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley: New York.
- [11] A. Rogers and F. Willekens (1978), The spatial reproductive value and the spatial momentum of zero population growth, *Environment and Planning A* 10: 503-518.
- [12] A. Rogers (1995), *Multiregional Demography: Principles, Methods and Extensions*, Wiley, New York.

2 変動環境下における人口再生産力

稲葉 寿

1 はじめに

人口学における標準モデルである安定人口モデルは人口動態率（出生率、死亡率、状態感遷移率など）が時間的に不変であることを仮定しているが、現実の人口ではそのようなことはほとんどなく、動態率は時間的に変動している。その場合、人口動態率は人口自身の変化と変動する環境の影響によって規定されているであろう。一般に人口のサイズや分布の変化も環境変数として動態率を規定していると考えれば、フィードバック構造をもつ非線形人口モデルが得られるが、その解析は数学的にはずっと難しい問題である ([13])。一方、変動環境下におけるパラメータの時間変動が与えられたものとみなすならば、時間依存パラメータをもつ線形人口モデルによる記述が有効である。以下ではそのような一般線形人口モデルに関して、その再生産力をどのようにとらえるべきかを考察する。

2 変動環境下の一般線形人口理論

安定人口モデルを時間依存パラメータを持つモデルへ拡張することから始めよう。いま単性の人口が有限個の相互に排他的な状態 (individual state: i -state) に分割されているとして、 $i = 1, 2, \dots, n$ を各状態を示す番号であるとする。ここで人口の状態とは個体の動態に影響を与えるような特性であって、具体的には居住地、労働力状態、結婚状態、パリティ（出産歴）等が考えられる。 $p_i(t, a)$ は i -状態の人口密度関数であるとして、人口ベクトルを $p(t, a) = (p_1(t, a), \dots, p_n(t, a))^T$ と定義しておく。ここで τ はベクトルの転置作用を示す。 $q_{ij}(t, a)$, $i \neq j$ を時刻 t における状態 j から状態 i への瞬間的な推移強度、 $\mu_j(t, a)$ を時刻 t , 年齢 a , 状態 j における死亡力関数であるとする。さらに

$$q_{jj}(t, a) = -\mu_j(t, a) - \sum_{i \neq j} q_{ij}(t, a), \quad 1 \leq j \leq n,$$

と定義して、 $q_{ij}(t, a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列を $Q(t, a)$ とする。また $m_{ij}(t, a)$ は時刻 t において状態 j にある個体が i 状態に属する新生児を産む年齢別出生率関数であるとする。 $M(t, a)$ を $m_{ij}(a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列とする。

このとき時間依存パラメータをもつ（非自律的）多状態人口モデル*1は以下のようなベクトル型のマッケン

*1 female dominant model であり、女性人口に関するモデルだけを以下で考える。

ドリックシステムとして表される：

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial p(t, a)}{\partial a} &= Q(t, a)p(t, a), \quad t > 0, \quad a > 0, \\ p(t, 0) &= \int_0^\omega M(t, a)p(t, a)da, \quad t > 0, \\ p(0, a) &= p_0(a).\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで $p_0(a)$ は初期人口ベクトル、 ω は年齢の上限である。

上記のシステムの解を与える発展作用素システムを導くために、まず以下のような行列微分方程式を考えよう：

$$\frac{dL(x; t, a)}{dx} = Q(t + x, a + x)L(x; t, a), \quad L(0; t, a) = I\tag{2.2}$$

ここで I は単位行列である。(2.2) の解行列 $L(x; t, a)$, $x \geq 0$ の (i, j) 要素 $l_{ij}(x; t, a)$ は時刻 t 、年齢 a 、状態 j の人口が x 時間後に i 状態に生残している割合を示している。このとき以下の推移規則が成り立つ：

$$L(x_2; t + x_1, a + x_1)L(x_1; t, a) = L(x_1 + x_2; t, a), \quad x_1, x_2 \geq 0\tag{2.3}$$

このときシステム (2.1) の解 $p(t, a)$ の時間発展は以下のような 2-パラメータの作用素のシステムによって表現される：

$$p(t, a) = (U(t, s)p(s, \cdot))(a),\tag{2.4}$$

ここで、 $U(t, s)$, $s \leq t$ は状態空間 $X_+ := L_+^1(0, \omega; \mathbf{R}^n)$ 上の線形作用素で、時刻 s における人口ベクトルを時刻 t の人口ベクトルへ変換する作用をしている。具体的には $U(t, s)$ は以下のように与えられる ([12])：

$$(U(t, s)\phi)(a) = \begin{cases} L(a; t - a, 0)B(t - s - a; \phi, s), & t - s > a, \\ L(t - s; s, a - t + s)\phi(a - t + s), & t - s \leq a, \end{cases}\tag{2.5}$$

ただしここで $B(\xi; \phi, s)$, $\xi > 0$ は以下の再生方程式の解である：

$$B(\xi; \phi, s) = G(\xi; \phi, s) + \int_0^\xi \Psi(s + \xi, a)B(\xi - a; \phi, s)da,\tag{2.6}$$

$$\Psi(t, a) := M(t, a)L(a; t - a, 0),$$

$$G(\xi; \phi, s) := \int_\xi^\infty M(\xi + s, a)L(\xi; s, a - \xi)\phi(a - \xi)da.$$

このとき $U(t, s)$, $s \leq t$ は時間依存の発展作用素システムとなり、以下の発展法則が成り立つ：

$$U(t_3, t_2)U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1), \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad U(s, s) = I_d\tag{2.7}$$

ここで I_d は X_+ の恒等作用素である*2。

*2 $\phi \in X_+$ であるとき、 $U(t, 0)\phi$ は、必ずしも偏微分可能ではないから、(2.1) の古典解ではないが、以下のシステムを満たす弱い解である：

$$\begin{aligned}Dp(t, a) &= Q(t, a)p(t, a), \\ p(t, 0) &= \int_0^\omega M(t, a)p(t, a)da, \quad t \in \mathbf{R}, \quad a \in [0, \omega]\end{aligned}$$

ここで D はコーホートに沿っての微分である：

$$Df(t, a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h, a + h) - f(t, a)}{h}$$

そこで、むしろ (2.5)-(2.6) によって定まる発展システム $U(t, s)$ を時間依存パラメータをもつ人口モデルとみなせる。

このとき (2.5)-(2.6) から初期値問題 (2.1) の解が、 $p(t, \cdot) = U(t, 0)p_0$ で与えられるから、

$$p(t, a) = \begin{cases} L(a; t - a, 0)B(t - a), & t - a > 0 \\ L(t; 0, a - t)p_0(a - t), & a - t > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

と表現される。ただし、ここで $B(t) := p(t, 0)$ は以下の再生方程式を満たしている：

$$B(t) = G(t) + \int_0^t \Psi(t, a)B(t - a)da \quad (2.9)$$

ここで、 $\Psi(t, a) = M(t, a)L(a; t - a, 0)$ は $t - a$ 時刻に生まれた女性が a 歳まで生残して、女兒を出産する率である。 $G(t)$ は初期時刻 $t = 0$ に生存していた女性人口 $p_0(a)$ から単位時間に生まれてくる女兒の密度を表していて、以下のように表現される：

$$G(t) = \int_t^\infty M(t, a)L(t; 0, a - t)p_0(a - t)da$$

自律系の場合と同様に、再生方程式 (2.9) に関して、各世代の出生率関数 $B_n(t), n = 1, 2, \dots$ を以下のように定義できる：

$$B_1(t) = G(t), \quad B_n(t) = \int_0^t \Psi(t, a)B_{n-1}(t - a)da, \quad (n \geq 2) \quad (2.10)$$

この場合、再生方程式の解は

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$$

で与えられる。

このとき各世代の総出生数を計算してみると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty B_n(t)dt &= \int_0^\infty dt \int_0^t \Psi(t, a)B_{n-1}(t - a)da \\ &= \int_0^\infty da \int_a^\infty \Psi(t, a)B_{n-1}(t - a)dt = \int_0^\infty da \int_0^\infty \Psi(a + \tau, a)B_{n-1}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \Psi(a + \tau, a)da \right\} B_{n-1}(\tau)d\tau = \int_0^\infty K(\tau)B_{n-1}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$K(\tau) := \int_0^\infty \Psi(a + \tau, a)da,$$

は時刻 τ に生まれたコーホートの純再生産行列（次世代行列）である。すなわち時間に依存したパラメータをもつ人口システムでは、ある世代の出生数は前世代の出生数とコーホート純再生産行列の積和になっていて、世代サイズの比は時間的に変化する。パラメータの時間依存性がなければ、すなわち安定人口モデルの場合は、 K は定数行列であり、世代のサイズ比は K のスペクトル半径 $r(K)$ に漸近する。したがってその場合は、スペクトル半径 $r(K)$ を純再生産率（基本再生産数）と定義することができるが、上記のように時間依存のケースではそのような定義ができない ([14])。

ただし例えば、コーホートの純再生産行列が一定である場合、すなわち $K(\tau)$ が τ によらなければ、継続する世代サイズの比は時間不変なコーホート純再生産行列のスペクトル半径 $r(K)$ に漸近する。た

たとえば、 $\Psi(t, a)$ が一定の純再生産関数 $\Phi(a)$ のコーホート上でのエイジシフトによって得られる場合、 $\Psi(t, a) = \Phi(a - k(t - a))$ であり、再生産年齢の a に関して $a - k(t - a) > 0$ である限り

$$K(\tau) = \int_0^\infty \Psi(a + \tau, a) da = \int_0^\infty \Phi(a - k\tau) da = \int_0^\infty \Phi(a) da$$

となり、 $K_c(\tau)$ は定数行列（次世代行列） $K = \int_0^\infty \Phi(a) da$ に等しい。このような場合はコーホートの純再生産率 R_0 は $r(K)$ であるが、再生産タイミングは変化しうるので、期間の R_0 は時間に依存して変動している。

一方、期間的な観測から得られる純再生産行列は以下のように定義できる：

$$K_p(t) := \int_0^\infty M(t, a) L_p(t, a) da$$

ここで、 $L_p(t, a)$ は期間的な多状態生命表生残率行列であって、以下の初期値問題の解行列として与えられる：

$$\frac{dL_p(t, a)}{da} = Q(t, a) L_p(t, a), \quad L_p(t, 0) = I_d$$

期間的観測による純再生産率は $r(K_p(t))$ として定義できるが、それは仮想コーホートの純再生産率であって、コーホートの再生産力とは異なる。たとえばコーホートの再生産スケジュールが世代とともに遅れるような場合には、コーホートでみた純再生産率が 1 を超えていても、過渡的には期間的な純再生産率は 1 を下回ることもある。

再生方程式 (2.8) の両辺を 0 から $T > 0$ まで積分して、二重積分の順序交換をおこなうと以下の関係がえられる：

$$\begin{aligned} \int_0^T B(t) dt &= \int_0^T G(t) dt + \int_0^T da \int_0^{T-a} \Psi(a + z, a) B(z) dz \\ &\leq \int_0^\infty G(t) dt + \int_0^T K(z) B(z) dz \end{aligned}$$

そこで生物学的条件から、 $K(\tau)$ は上に有界であると仮定してよいので、すべての $\tau \geq 0$ について、 $K(\tau) \leq K^*$ となるような分解不能な正行列 K^* が存在するとして一般性を失わない。このとき、

$$\int_0^T B(t) dt \leq \int_0^\infty G(t) dt + K^* \int_0^T B(\tau) d\tau,$$

であるから、 $r(K^*) < 1$ であれば $(I - K^*)^{-1} \geq 0$ であって、

$$\int_0^T B(t) dt \leq (I - K^*)^{-1} \int_0^\infty G(t) dt$$

ここで $T \rightarrow \infty$ とすれば左辺は単調増大で上に有界なので、正数に収束する。したがって全出生数は有限であり、以下が成り立つ：

$$\int_0^\infty B(t) dt \leq (I - K^*)^{-1} \int_0^\infty G(t) dt \quad (2.11)$$

このとき $B(t)$ が連続であれば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ である。

一方で、もしすべての $\tau \geq 0$ について、 $K(\tau) \geq K_*$ となるような非負の分解不能行列 K_* が存在して、 $r(K_*) > 1$ であれば、明らかに各世代の出生数はすべての状態において幾何級数的に増加する。したがってそのような意味では、コーホートの純再生産率は弱い意味で閾値性をもっている。期間的な純再生産率に対してもコーホート純再生産率と同様な弱い閾値性が認められる。