

よって $Y \rightarrow Z$ という一段階集計の計算を簡単に示しておこう。片側集計作用素 $U_+ : Y \rightarrow Z$ を以下のように定義する:

$$(U_+f)(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} |f(t+n\theta)|, \quad t \in [0, \theta), \quad f \in Y$$

このとき $\|U_+f\|_Z = \|f\|_Y$ である。 $f \in Y_+$ に対して以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} (U_+K_Yf)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t+n\theta} \Psi(t+n\theta, \tau) f(t+n\theta-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t+n\theta} \Psi(t, t-z+n\theta) f(z) dz \\ &= \int_0^t \Psi(t, t-z) f(z) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{n\theta}^{t+n\theta} + \int_0^{n\theta} \right\} \Psi(t, t-z+n\theta) f(z) dz \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{n\theta}^{t+n\theta} \Psi(t, t-z+n\theta) f(z) dz &= \int_0^t \Psi(t, t-z) f(z+n\theta) dz, \\ \int_0^{n\theta} \Psi(t, t-z+n\theta) f(z) dz &= \sum_{m=1}^n \int_{(m-1)\theta}^{m\theta} \Psi(t, t-z+n\theta) f(z) dz \\ &= \sum_{m=1}^n \int_0^{\theta} \Psi(t, t-z+(n-m+1)\theta) f(z+(m-1)\theta) dz \end{aligned}$$

である。それゆえ、以下を得る:

$$\begin{aligned} (U_+K_Yf)(t) &= \int_0^t \Psi(t, t-z) \sum_{n=0}^{\infty} f(z+n\theta) dz \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \int_0^{\theta} \Psi(t, t-z+(n-m+1)\theta) f(z+(m-1)\theta) dz \end{aligned}$$

和の順序を交換すれば、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \int_0^{\theta} \Psi(t, t-z+(n-m+1)\theta) f(z+(m-1)\theta) dz \\ &= \int_0^{\theta} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi(t, t-z+m\theta) \sum_{n=0}^{\infty} f(z+n\theta) dz \end{aligned}$$

従って以下の結論を得る:

$$\begin{aligned} (U_+K_Yf)(t) &= \int_0^t \Psi(t, t-z) (U_+f)(z) dz + \int_0^{\theta} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi(t, t-z+m\theta) (U_+f)(z) dz \\ &= \int_0^{\theta} \Pi(t, z) (U_+f)(z) dz = (K_ZU_+f)(t) \end{aligned}$$

これより

$$U_+K_Yf = K_ZU_+f, \quad f \in Y_+$$

となる。すなわち発展過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ は Z 空間における反復過程 $U_+ i_m = K_Z U_+ i_{m-1}$ へ還元される。したがって

$$r(K_Z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|U_+ i_m\|_Z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y}$$

であることがわかる。この場合、 K_Z が集計された世代分布の空間 Z における次世代作用素であり、 $R_0 = r(K_Z)$ である。

4 一般変動環境における基本再生産数の定義

上述の議論から Y 空間における発展過程; $i_m = K_Y i_{m-1}$ が基本再生産数を決定するために本質的な役割を果たしていることがわかる。そこで、あらためて一般的な変動環境における世代発展作用素 (GEO) を定義しておこう:

定義 4.1 $\Psi(t, \tau)$ を純再生産作用素とする。 $\Psi(t, \tau)$ はバナッハ空間 $E = L_+^1(\Omega_b)$ 上の正線形作用素であり、正值錐 $E_+ = L_+^1(\Omega_b)$ を不変にする。このとき世代発展作用素 (generation evolution operator: GEO) は拡張された状態空間 $Y_+ = L_+^1(\mathbf{R}_+; E_+) = L_+^1(\mathbf{R} \times \Omega_b)$ 上の正線形作用素として以下のように定義される:

$$(K_Y f)(t) = \int_0^t \Psi(t, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad f \in Y_+ \quad (4.1)$$

世代発展作用素は、 Y 空間における各世代 (子孫) の状態分布の系列

$$\{i_0, i_1, i_2, \dots\} \subset Y_+$$

を反復過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ によって作り出す。このとき、 $\|i_m\|_Y$ は m 世代目の新生児の総数を与える。その漸近的な世代サイズの成長率は、その極限が存在する限り、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y}$ で与えられるであろう。

任意の $t > 0$ に対して、時刻 t における新生児の状態分布は形式的な世代展開で与えられる:

$$i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (K_Y^m i_0)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} i_m(t) \quad (4.2)$$

ここで、 $i_0 \in Y_+$ は初期人口からうまれる子供の分布である。上記の解は以下の再生方程式を満たしている:

$$i(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(t, \tau) i(t - \tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

実際は個体の再生産期間は有限であるために、各時点で共存する世代数は有限であり、世代展開は有限和である。

再生方程式 (4.3) を Y 空間における線形方程式 $i = g_0 + K_Y i$ と見なせば、 $r(K_Y) < 1$ であれば $i = (I - K_Y)^{-1} g \in Y_+$ という正の解をもつ。このことは条件 $r(K_Y) < 1$ が人口の絶滅のための十分条件になっていることを示唆している。

はじめに $K_Y(Y_+) \subset Y_+$ である条件を示しておこう。出生時刻 τ のコーホート純再生産作用素 (cohort net reproduction operator) を E 上の正作用素として以下のように定義する:

$$K_\tau \phi := \int_0^\infty \Psi(s + \tau, s) \phi ds, \quad \phi \in E$$

このとき以下を得る：

$$\begin{aligned}\|K_\tau\phi\|_E &= \int_{\Omega_b} d\zeta \left| \int_0^\infty (\Psi(s+\tau, s)\phi)(\zeta) ds \right| \\ &\leq \int_0^\infty \|\Psi(s+\tau, s)\phi\|_E ds \\ &\leq \int_0^\infty \|\Psi(s+\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E)} ds \|\phi\|_E\end{aligned}$$

それゆえ、 K_τ は E 上の正の有界線形作用素であり、以下が成り立つ：

$$\|K_\tau\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \int_0^\infty \|\Psi(s+\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E)} ds$$

$K_\tau\phi$ は時刻 τ 生まれの個体のベクトル ϕ を、それが生涯に生む状態別の新生児分布を時間に関して集計したベクトルへ写す作用素であり、個体あたりの生涯の平均出生児数が有限であることは、条件 $\sup_{\tau \geq 0} \|K_\tau\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty$ によって表される。それゆえ生物学手に妥当な条件として、以下を仮定する：

$$K^c := \sup_{\tau \geq 0} \int_0^\infty \|\Psi(s+\tau, s)\|_{\mathcal{L}(E)} ds < \infty \quad (4.4)$$

このとき証明を略するが、以下が成り立つ：

定理 4.2 条件 (4.4) のもとで、 K_Y は Y 上の正の有界線形作用素である。さらにほとんどすべての $\tau \geq 0$ に対して $K_\tau(E_+ \setminus \{0\}) \subset E_+ \setminus \{0\}$ であれば、 $K_Y(Y_+ \setminus \{0\}) \subset Y_+ \setminus \{0\}$ である。

i_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) は非負の可測関数であるから、(4.2) から以下を得る：

$$\|i\|_Y = \sum_{m=0}^{\infty} \|i_m\|_Y \quad (4.5)$$

このとき正数列に関するよく知られた収束条件から、

$$\|i\|_Y = \sum_{m=0}^{\infty} \|i_m\|_Y < \infty \iff \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} < 1 \quad (4.6)$$

$$\|i\|_Y = \sum_{m=0}^{\infty} \|i_m\|_Y = \infty \iff \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \geq 1 \quad (4.7)$$

となることがわかる。

上記の観察から、一般の変動環境における R_0 の定義として以下を導入しよう：

定義 4.3 世代推進作用素 K_Y によって生成される世代の系列の基本再生産数を以下のように定義する：

$$R_0 = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|K_Y^m i_0\|_Y} \quad (4.8)$$

以下では上記の定義による R_0 が人口増加の閾値になるかどうかを検討しよう。もし $R_0 < 1$ であれば、正数 $r > 0$ と番号 m_0 が存在して $m_0 < m$ となる番号に対して $\sqrt[m]{\|i_m\|_Y} < r < 1$ となる。したがって各世代のサイズは幾何級数的に減衰するから、人口は消滅に向かう：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|i_m\|_Y \leq \lim_{m \rightarrow \infty} r^m = 0$$

このとき、各時刻における人口が有限個の世代分布の和であることから、各時刻の人口数も時間とともにゼロへ収束する。

一方、 $R_0 > 1$ であれば、正数 $r > 0$ と番号 $m(k), k = 1, 2, \dots$ が存在して $m(1) < m(2) < \dots \rightarrow +\infty$, $m^{(k)}\sqrt[m^{(k)}]{\|i_{m(k)}\|_Y} > r > 1$ となる。そこで、任意の $m(k)$ に関して、

$$\|i\|_Y \geq \|i_{m(k)}\|_Y \geq r^{m(k)}$$

であり、これは

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|i_{m(k)}\|_Y = +\infty$$

を意味している。従ってサイズが発散する世代系列が存在して、 $\|i\|_Y = +\infty$ である。このとき、将来まで発生する新生児の総数が無限大になるが、必ずしも長期的な正の増加率をもつとは限らない。例えば、世代のサイズが増加していても平均世代間隔が増加していれば、人口は減少していく可能性がある。

もう一つ重要な点は、上記の定義における R_0 が初期データ i_0 に独立であるかどうかである。はじめに定義 (4.8) は、比較可能な初期データに関してはユニークな値を与えることに注意しよう。 $K_Y(Y_+ \setminus \{0\}) \subset Y_+ \setminus \{0\}$ と仮定する。もし $i_1, i_2 \in Y_+ \setminus \{0\}$ であり、正数 $0 < \alpha < \beta$ が存在して $\alpha i_1 \leq i_2 \leq \beta i_1$ が成り立てば（すなわち比較可能であれば）、

$$\alpha(K_Y)^m i_1 \leq (K_Y)^m i_2 \leq \beta(K_Y)^m i_1$$

である。それゆえ、

$$\alpha\|(K_Y)^m i_1\|_Y \leq \|(K_Y)^m i_2\|_Y \leq \beta\|(K_Y)^m i_1\|_Y$$

を得るが、これは

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_1\|_Y^{1/m} &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/m} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_2\|_Y^{1/m} \\ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_2\|_Y^{1/m} &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \beta^{1/m} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_1\|_Y^{1/m} \end{aligned}$$

を意味している。したがって、

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_1\|_Y^{1/m} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \|(K_Y)^m i_2\|_Y^{1/m}$$

ということがわかる。一般の場合、(4.3) からわかるように、初期データ $i_0 = g$ は時刻ゼロで与えられた初期人口分布から発生する新生児密度である。人口が一様に原始的 (uniformly primitive) な時間発展過程で推進されていけば、二つの初期データから出発した人口分布は、時間が十分経過した後にはお互いに比較可能になっている ([16], [20])。分布が比較可能になった時点にあらためて時間原点をとりなおせば、上述の議論が適用できる。それゆえ、実は比較可能な初期条件のもとで得られた結論は一般の初期データに関しても成り立つことになる。すなわち、(4.8) で与えられる R_0 は初期データに無関係に決まる。

つぎに新たな定義による R_0 と世代推進作用素のスペクトル半径の関係をみよう。

$$\|i_m\|_Y \leq \|K_Y^m\|_{\mathcal{L}(Y)} \|i_0\|_Y$$

から、以下を得る：

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|K_Y^m\|_{\mathcal{L}(Y)}} \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_0\|_Y} = r(K_Y)$$

それゆえ、

$$R_0 = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \leq r(K_Y) \quad (4.9)$$

である。

上記の不等号において、等号が成り立つための一般的条件は未だ不明であり、それゆえ「世代推進作用素のスペクトル半径が R_0 を与える」とは主張できない。また一般に (4.8) において“lim sup”が“lim”によって置き換えられるかどうか不明であるから、世代解釈が完全とはいえない。

しかしながら、少なくとも定常環境と周期的環境においては、我々の定義はこれまでの定義の拡張になっていて、世代推進作用素のスペクトル半径 $r(K_Y)$ は従来の次世代作用素のスペクトル半径として与えられる R_0 に等しいことがわかる。それゆえ、世代解釈も完全に成り立つ：

定理 4.4 純再生産作用素 Ψ が時間に依存しないのであれば、以下が成り立つ：

$$r(K_Y) = r(K_E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \quad (4.10)$$

(証明) (2.18) と (4.9) から、 $r(K_E) \leq r(K_Y)$ がわかる。従って $r(K_E) \geq r(K_Y)$ を示せばよい。 $f \in Y_+$ に対して、以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|K_Y f\|_Y &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\infty dt \int_0^t \Psi(s) f(t-s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\infty ds \int_s^\infty \Psi(s) f(t-s) dt = \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\infty \Psi(s) ds \int_0^\infty f(t) dt \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta K_E T f = \|K_E T f\|_E \end{aligned}$$

さらに、もし $f \in Y_+$ に関して $\|K_Y^n f\|_Y = \|K_E^n T f\|_E$ であれば、

$$\|K_Y^{n+1} f\|_Y = \|K_Y^n (K_Y f)\|_Y = \|K_E^n T K_Y f\|_E = \|K_E^n K_E T f\|_E = \|K_E^{n+1} T f\|_E$$

となる。ここで (2.15) を用いている。したがって数学的帰納法から、

$$\|K_Y^n f\|_Y = \|K_E^n T f\|_E, \quad n = 1, 2, \dots$$

であることがわかる。それゆえ、任意の $f \in Y$ に対して、

$$\|K_Y^n f\|_Y \leq \|K_Y^n f_+\|_Y + \|K_Y^n f_-\|_Y = \|K_E^n T f_+\|_E + \|K_E^n T f_-\|_E \quad (4.11)$$

を得る。ここで、

$$\|K_E^n T f\|_E = \|K_E^n T f_+\|_E + \|K_E^n T f_-\|_E \quad (4.12)$$

である。というのも $f, g \in E_+$ であれば、 $Tf = T f_+ + T f_-$ でありかつ $\|K_E^n (f+g)\|_E = \|K_E^n f\|_E + \|K_E^n g\|_E$ であるからである。(4.11) と (4.12) から、

$$\|K_Y^n f\|_Y \leq \|K_E^n T f\|_E$$

(2.14) を用いれば、 $f \neq 0$ に対して、

$$\frac{\|K_Y^n f\|_Y}{\|f\|_Y} \leq \frac{\|K_E^n T f\|_E}{\|T f\|_E}$$

を得る。 $Tf \neq 0$ if $f \neq 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \|K_Y^n\|_{\mathcal{L}(Y)} &= \sup_{f \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|K_Y^n f\|_Y}{\|f\|_Y} \leq \sup_{f \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|K_E^n T f\|_E}{\|T f\|_E} \\ &\leq \sup_{\phi \in E \setminus \{0\}} \frac{\|K_E^n \phi\|_E}{\|\phi\|_E} = \|K_E^n\|_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

これは以下が成り立つことを示している：

$$r(K_Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K_Y^n\|_{\mathcal{L}(Y)}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K_E^n\|_{\mathcal{L}(E)}} = r(K_E)$$

(証明終)

定理 4.5 純再生産作用素 Ψ が時間に関して θ -周期的であれば、以下が成り立つ：

$$r(K_Y) = r(K_\theta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \quad (4.13)$$

(証明) (3.18) と (4.9) から、 $r(K_\theta) \leq r(K_Y)$ であるから、 $r(K_\theta) \geq r(K_Y)$ を示せば十分である。 $f \in Y_+$ に対して、

$$\begin{aligned} \|K_Y f\|_Y &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\infty dt \int_0^t \Psi(t, s) f(t-s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\infty dt \int_0^\infty \Psi(t, s) f^*(t-s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \sum_{n=-\infty}^\infty \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} dt \int_0^\infty \Psi(t, s) f^*(t-s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\theta dx \int_0^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty \Psi(n\theta + x, s) f^*(n\theta + x - s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\theta dx \int_0^\infty \Psi(x, s) \sum_{n=-\infty}^\infty f^*(n\theta + x - s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\theta dx \int_0^\infty \Psi(x, s) (Uf)(x-s) ds \\ &= \int_{\Omega_b} d\zeta \int_0^\theta dx K_\theta Uf = \|K_\theta Uf\|_{Y_\theta} \end{aligned}$$

$f \in Y_+$ に対して $\|K_Y^n f\|_Y = \|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta}$ となれば、

$$\|K_Y^{n+1} f\|_Y = \|K_Y^n (K_Y f)\|_Y = \|K_\theta^n U K_Y f\|_{Y_\theta} = \|K_\theta^{n+1} Uf\|_{Y_\theta}$$

である。ここで (3.9) を用いた。数学的帰納法によって、 $f \in Y_+$ に対して以下が成り立つことがわかる：

$$\|K_Y^n f\|_Y = \|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

それゆえ、任意の $f \in Y$ に対して、以下を得る：

$$\|K_Y^n f\|_Y \leq \|K_Y^n f_+\|_Y + \|K_Y^n f_-\|_Y = \|K_\theta^n Uf_+\|_{Y_\theta} + \|K_\theta^n Uf_-\|_{Y_\theta} \quad (4.14)$$

一方、

$$\|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta} = \|K_\theta^n Uf_+\|_{Y_\theta} + \|K_\theta^n Uf_-\|_{Y_\theta} \quad (4.15)$$

である。というのも $f, g \in E_+$ に対して $Uf = Uf_+ + Uf_-$ であり、 $\|K_\theta^n(f+g)\|_{Y_\theta} = \|K_\theta^n f\|_{Y_\theta} + \|K_\theta^n g\|_{Y_\theta}$ であるからである。(4.14) と (4.15) から、

$$\|K_Y^n f\|_Y \leq \|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta}$$

を得る。(3.8) を用いれば、 $f \neq 0$ に対して、

$$\frac{\|K_Y^n f\|_Y}{\|f\|_Y} \leq \frac{\|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta}}{\|Uf\|_{Y_\theta}}$$

を得る。 $f \neq 0$ であれば $Uf \neq 0$ であることに注意しよう。それゆえ、

$$\begin{aligned} \|K_Y^n\|_{\mathcal{L}(Y)} &= \sup_{f \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|K_Y^n f\|_Y}{\|f\|_Y} \leq \sup_{f \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|K_\theta^n Uf\|_{Y_\theta}}{\|Uf\|_{Y_\theta}} \\ &\leq \sup_{\phi \in Y_\theta \setminus \{0\}} \frac{\|K_\theta^n \phi\|_{Y_\theta}}{\|\phi\|_{Y_\theta}} = \|K_\theta^n\|_{\mathcal{L}(Y_\theta)} \end{aligned}$$

となる。これは以下が成り立つことを示している：

$$r(K_Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K_Y^n\|_{\mathcal{L}(Y)}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K_\theta^n\|_{\mathcal{L}(Y_\theta)}} = r(K_\theta)$$

(証明終)

最後に、我々の定義による R_0 はその普遍性の代償として、世代推進作用素の固有値としては計算できないことに注意しよう：

補題 4.6 世代推進作用素 K_Y はゼロでない固有値をもたない。

(証明) K_Y の固有値 λ に対応する固有関数を $f \in Y$ としよう。このとき以下が成り立つ：

$$\lambda f(t) = \int_0^t \Psi(t, \tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t \Psi(t, t - s) f(s) ds$$

任意の固定した時間 $t_0 > 0$ に対して、作用素 $\Phi(t, s)$ を、 $t > s$ であれば $\Phi(t, s) = \Psi(t, t - s)$ 、 $t < s$ であれば $\Phi(t, s) = 0$ と定義しよう。ただし、 $(t, s) \in \Delta := [0, t_0] \times [0, t_0]$ である。このとき、 $t \in [0, t_0]$ に対して、

$$\lambda f(t) = \int_0^t \Phi(t, s) f(s) ds, \quad f \in L^1([0, t_0]; E)$$

であり、これは λ が $L^1(\Delta)$ 上のボルテラ型の積分作用素の固有値であることを示している。ところが、ボルテラ型積分作用素は $L^1(\Delta)$ 上で準べき零であり、零以外の固有値をもたない ([21], pp.153-154)。したがって、 $\lambda = 0$ である。(証明終)

5 要約と課題

本研究において、我々は定常環境ないしは周期的な環境における在来の R_0 の定義のキーとなる次世代作用素が、時間に関して集計された新生児状態分布関数に作用することを示し、時間をも状態変数に取り入れた拡張された状態空間上で作用する世代推進作用素による世代の生成過程が、集計作用素によって次世代作用素の

反復過程に還元されることを示した。このような還元によって、定常環境と周期環境における次世代作用素による R_0 の世代解釈が成り立つことが明らかとなった。

さらに世代推進作用素にもとづいて、一般的な変動環境における R_0 の定義を導入した。新たな定義における R_0 は、無限級数（世代サイズの和）の収束半径として計算されるが、世代推進作用素のスペクトル半径として得られるかどうかは一般にはわかっていない。しかしながら、定常環境と周期的環境においては、新たな定義による R_0 は世代推進作用素のスペクトル半径として得られ、このとき世代解釈が完全に成り立つ。すなわち、

$$R_0 = r(K_Y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \quad (5.1)$$

である。またこのとき、世代推進作用素のスペクトル半径 $r(K_Y)$ は次世代作用素のスペクトル半径に一致する。この意味で、我々の新たな定義は、これまでの次世代作用素による定常環境と周期的環境における R_0 の定義の拡張になっている。

(5.1) が成り立つようなより一般的な変動環境のクラスを見いだすことは今後の課題である。また上で述べたように、一般の変動環境においては $R_0 > 1$ は必ずしも人口増加を意味しない。定常環境と周期的環境においては、人口の長期的平均的成長率（内的成長率）が存在したが、そのような人口増加の閾値を与える内的成長率が存在するような、一般的な環境変動の条件を決定することも重要な課題である。

参考文献

- [1] N. Bacaër and S. Guernaoui, The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421-436 (2006).
- [2] N. Bacaër and R. Ouifki, Growth rate and basic reproduction number for population models with a simple periodic factor, *Math. Biosci.* 210, 647-658 (2007a).
- [3] N. Bacaër, Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067-1091 (2007b).
- [4] N. Bacaër and X. Abdurahman, Resonance of the epidemic threshold in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 57, 649-673 (2008).
- [5] N. Bacaër and E. H. Ait Dads, Genealogy with seasonality, the basic reproduction number, and the influenza pandemic, *J. Math. Biol.*, Online First, 6 July (2010a).
- [6] N. Bacaër and E. H. Ait Dads, On the biological interpretation of a definition for the parameter R_0 in periodic population models, submitted (2010b).
- [7] C. Chicone and Y. Latushkin (1999), *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 70, American Mathematical Society, Providence.
- [8] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek and J. A. J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* 28, 365-382 (1990).
- [9] O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, John Wiley and Sons, Chichester (2000).
- [10] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts, The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models, *J. Roy. Soc. Interface* 6, vol. 7, no. 47: 873-885 (2010).

- [11] L. I. Dublin and A. J. Lotka, On the true rate of natural increase, *J. Amer. Stat. Ass. New Series*, No. 150 (Vol. 20), 305-339 (1925).
- [12] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts, Threshold quantities for helminth infections, *J. Math. Biol.* 33, 415-434 (1995a).
- [13] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts, Threshold quantities for infectious diseases in periodic environments, *J. Biol. Sys.* 3(3), 779-787 (1995b).
- [14] J. A. Heesterbeek, A brief history of R_0 and a recipe for its calculation, *Acta Biotheor.* 50, 189-204 (2002).
- [15] H. J. A. M. Heijmans, The dynamical behaviour of the age-size-distribution of a cell population, In *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, J. A. J. Metz and O. Diekmann (eds.), Lect. Notes Biomath. 68, Springer-Verlag, Berlin: 185-202 (1986).
- [16] H. Inaba (1989), Weak ergodicity of population evolution processes, *Math. Biosci.* 96: 195-219.
- [17] H. Inaba (1990), Threshold and stability results for an age-structured epidemic model, *J. Math. Biol.* 28: 411-434.
- [18] H. Inaba and H. Nishiura (2008a), The basic reproduction number of an infectious disease in a stable population: The impact of population growth rate on the eradication threshold, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, Vol. 3, No. 7: 194-228.
- [19] H. Inaba and H. Nishiura (2008b), The state-reproduction number for a multistate class age structured epidemic system and its application to the asymptomatic transmission model, *Math. Biosci.* 216: 77-89
- [20] H. Inaba (2010), The basic reproduction number for infectious diseases in periodic environments, submitted.
- [21] T. Kato (1984), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin.
- [22] A. J. Lotka (1928), The progeny of a population element, *American Journal of Hygiene* 8: 875-901.
- [23] A. J. Lotka (1929), The spread of generations, *Human Biology* 1(3): 305-320.
- [24] A. J. Lotka, *Analytical Theory of Biological Populations*, The Plenum Series on Demographic Methods and Population Analysis, Plenum Press, New York and London (1998). [English translation from the French original edition *Théorie Analytique des Associations Biologiques. Deuxième Partie: Analyse Démographique avec Application Particulière à l'Espèce Humaine*. (Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 780), Hermann et Cie, Paris (1939).]
- [25] I. Marek, Iterations of linear bounded operators in non self-adjoint eigenvalue problems and Kellogg's iteration process, *Czech. Math. J.* 12: 536-554 (1962).
- [26] I. Marek, Frobenius theory of positive operators: Comparison theorems and applications, *SIAM J. Appl. Math.* 19, 607-628 (1970).
- [27] P. Michel, S. Mischler and B. Perthame (2005), General relative entropy inequality: an illustration on growth models, *J. Math. Pures Appl.* 84: 1235-1260.
- [28] H. Nishiura, K. Dietz and M. Eichner, The earliest notes on the reproduction number in relation to herd immunity: Theophil Lotz and smallpox vaccination, *J. Theor. Biol.* 241, 964-967 (2006).
- [29] H. Nishiura and H. Inaba, Discussion: Emergence of the concept of the basic reproduction number from mathematical demography, *J. Theor. Biol.* 244, 357-364 (2007).

- [30] I. Sawashima, On spectral properties of some positive operators, *Nat. Sci. Report Ochanomizu Univ.* 15, 53-64 (1964).
- [31] H. H. Schaefer and M. P. Wolff, *Topological Vector Spaces* 2nd Edition, Springer, New York (1999).
- [32] H. R. Thieme (1984), Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations, *J. Inte. Equ.* 7: 253-277.
- [33] H. R. Thieme, Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.* 70(1), 188-211 (2009).
- [34] W. Wang and X. Q. Zhao, Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments, *J. Dyn. Diff. Equat.* 20, 699-717 (2008).

2 対数死亡率曲面上の接ベクトル場を利用した死亡率モデルの検討

石井 太

はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成 18 年 12 月推計）」（国立社会保障・人口問題研究所 2007）の将来生命表作成にあたっては、現在国際的に標準的な方法とされ、平成 14 年 1 月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えた「年齢シフトモデル」により死亡率の投影を行った（石井 2008）。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線をあてはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

昨年度までの研究において、この年齢シフトモデルの理論的再検討を端緒とする死亡率モデルの検討を行ってきた。近年のわが国における死亡率改善は高齢死亡率によるところが大きいが、昨年度の研究では、これを死亡率の「低下」と捉えるよりも死亡の「シフト」と捉えることにより、よりの確なモデリングが可能となることを示した。具体的には、「低下」型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーションナルハザードモデル (PH)、リー・カーター・モデル (LC) の 2 モデルを、これら 2 つのモデルに対応する「シフト」型モデルである、水平シフトモデル (HS) と水平リー・カーター・モデル (HL) の 2 モデルを導入し、全部で 4 つの死亡モデルを検討するとともに、これらの死亡モデルを、時間微分した関数により表示する微分型表示を導入した。

また、さらに、このような「シフト」という形で死亡率改善を表現する「LD モデル」を提案し、現在、標準的な死亡率推計モデルとして用いられているリー・カーター・モデルとの比較を通じてこのモデルの有効性を示した。具体的には、「低下」型モデルと「シフト」型モデルのパフォーマンスを統計学的観点から比較するため、LC モデルと LD モデルについて、モデルを真とした場合の信頼区間から実績値がどの程度外れるのかという点について評価を行い、わが国の近年の高齢死亡率改善について、「低下」よりは「シフト」と捉える見方の方がより強く支持されることを示唆しているとの結果を得た。

このように有効性が明らかとなった LD モデルであるが、これは成人死亡率のみを表現するモデルであり、そのまま全年齢の死亡率モデルとして利用することはできない。また、昨年度の研究の中で、LD モデルは年齢シフトモデルのシフト量・勾配パラメータ等を求める際の理論的基礎となっているロジスティックモデルとの整合性の観点で課題があ

ることについて触れた。

本年度の研究では、LD モデルについて、ロジスティックモデルとより整合性を高める観点からの改良を行うとともに、死亡率のモデル化にあたって、対数死亡率曲面上の接ベクトル場を利用することの有効性を示し、高齢部分に LD モデルの構造を持つ全年齢死亡率モデル構築の方法論に関して検討を行うことを目的とする。

1 対数死亡率曲面、対数死亡率とその逆関数について

本節では、昨年度の研究で導入した、対数死亡率曲面の 2 つの表示方法、対数死亡率とその逆関数に関し、本年度の研究で用いる部分についてまとめる。

$X = [0, +\infty)$ を年齢、 $T = (-\infty, +\infty)$ を時間を表す変数とする。以下の死亡モデリングの議論においては、年齢 $x \in X$ 、時刻 $t \in T$ における死力関数 $\mu_{x,t}$ を用いる。また、

$$y = \ln \mu_{x,t}$$

で死力の対数を表す。ここで、 $y \in Y = (-\infty, +\infty)$ は対数死力関数の値を表す。このとき、 S を、

$$S = \{(x, t, y) | y = \ln \mu_{x,t}\}$$

とすると、これにより、 \mathbb{R}^3 における曲面が定義される。これを、対数死亡率曲面 (the log mortality surface) と呼ぶ。これは、対数死亡率曲面の一般的な表示方法である。この表示方法において、 $y = \ln \mu_{x,t}$ は、 \mathbb{R}^3 の中で、 X - T 平面からの高さとして捉えることができる。

以下、 $\ln \mu_{x,t}$ は、 $X_0 = [0, \omega]$ $[t_0, t_1]$ $X \times T$ 上で定義された、 x と t に関する滑らかで連続な関数であると仮定する。ただし、 $\omega < +\infty$ は死亡率モデルを考える上でのある有限な年齢の最大値とする。

成人死亡率のモデリングにあたっては、さらに、 $\ln \mu_{x,t}$ は各 t について、 $x > x_0(t)$ の範囲で x について狭義単調増加であると仮定してよい。ここで、 $x_0(t)$ は各 t について、 $\ln \mu_{x,t}$ が狭義単調増加関数となる x の下限値を示す。このとき、各 t に対して、関数 $\ln \mu_{x,t}(x)$

$$\ln \mu_{x,t} : \tilde{X}_t \rightarrow Y, \quad \ln \mu_{x,t}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \mu_{x,t}$$

は x について単射である。ただし、 $\tilde{X}_t = [x_0(t), \omega]$ である。 $\tilde{Y}_t = \ln \mu_{x,t}(\tilde{X}_t)$ とすると、関数 $\ln \mu_{x,t}(x) : \tilde{X}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$ は各 t について、 \tilde{Y}_t 上で定義される逆関数 $\nu_t(y) : \tilde{Y}_t \rightarrow \tilde{X}_t$ を持つ。

そこで、 Y_0 を以下のように定義する*1。

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} [y_0, y_1] \quad \text{ただし} \quad y_0 = \sup_{t \in T_0} \min \tilde{Y}_t, \quad y_1 = \inf_{t \in T_0} \max \tilde{Y}_t,$$

*1 $x_0(t)$ は必ずしも連続とは限らないため、 $\{\min \tilde{Y}_t | t \in T_0\}$ には最大値がない可能性もある。

このとき、 $\nu_{y,t} : Y_0 \quad T_0 \rightarrow X_0$ を

$$\nu_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_t(y)$$

により定義する。 $\nu_{y,t}$ は、時刻 t における対数死力関数の値が y となるような年齢 x を示している。

さらに、死亡モデルの微分型表示において用いる、(1) $\rho_{x,t}$: 死力改善率と (2) $y_{y,t}$: 年齢増加率を、以下の式によって定義する。

$$\rho_{x,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mu_{x,t}}{\partial t} = \frac{\partial \log \mu_{x,t}}{\partial t}$$

$$y_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \nu_{y,t}}{\partial t}$$

2 低下型モデルとシフト型モデル

昨年度の研究においては、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証することを通じ、わが国の死亡データ特性に関する再検討を行った。この目的のため、まず、低下型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーションナルハザードモデル (PH)、リー・カーター・モデル (LC) の 2 モデルを、これら 2 つのモデルに対応するシフト型モデルである、水平シフトモデル (HS) と水平リー・カーター・モデル (HL) の 2 モデルを導入し、これら 4 種類の死亡モデルを検討した。また、各年の y_{y,t_c} の実績値の観察から、これを y の線形関数として見てモデリングを行うシフト型モデルの線形差分モデル (LD) を提案した。本年度の研究では、これらの成果をさらに発展させる形で、全年齢死亡率モデルの構築を検討するが、そこで用いる LC モデルと LD モデルについて必要な事項をまとめておくこととする。また、LD モデルについては、昨年度において課題とされた点を改良し、 y_{y,t_c} を x の線形関数と見るモデル改良を行ったので、それについても併せて述べることとする。

なお、2 節においては、成人死亡モデルを対象とし、日本女性の死亡率に対してモデルの当てはめを行った。基礎データとしては、Human Mortality Database (Human Mortality Database) の、

$$m_{x,t_c}, \quad x = x_s (= 25), \quad x_e (= 150) \quad \text{and} \quad t_c = t_s (= 1970), \quad t_e (= 2009)$$

を用いた。ここで、 t_c は暦年を表す。また、110 歳以上の死亡率については、HMD の高齢部で用いられているのと同じ 2 パラメータロジスティック曲線を当てはめることによって補外した。

$$\mu_{x,t} = \frac{t \exp(-tx)}{1 + t \exp(-tx)}$$

2.1 低下型モデルとしての LC モデル

リー・カーター・モデル (以下、LC) は死亡率改善を「低下」型として表現するモデルである (Lee and Carter 1992)。LC モデルは以下の式により表される。

$$x,t = \log \mu_{x,t} = a_x + k_t b_x$$

ここで、 a_x は標準的な死亡パターンを表す。 k_t は、死亡指数とも呼ばれ、死亡の一般的水準を表すパラメータであり、 b_x は k_t が変化する時の年齢別死亡率の変化を表すパラメータとなる。

両辺の時間微分を行うことにより、LC モデルの微分型表示を得る。

$$\rho_{x,t} = \frac{dk_t}{dt} b_x = k'_t b_x$$

これは、LC モデルにおいては、各 t について $\rho_{x,t}$ の年齢分布が一定となることを示す。

ここで、さらに k_t が t に関して線形な関数である場合を考えると、 k'_t は定数となり、 $\rho_{x,t}$ は t について定数関数となる。すなわち、死亡の一般的水準の改善スピードが一定という状況の下では、LC モデルは年齢別の死力改善率が一定であるとみなされる時、すなわち、死亡率改善が「低下」型であると考えられる時に、死亡率をよく表現するモデルであるといえる。

図 1 は対数死力関数 (x,t_c) の実績値と LC モデルによる推定値を示したものである。昨年度に示した通り、LC モデルでは、PH モデルに比べて実績値へのあてはまりがかなり改善しており、これは、LC モデルが年齢毎に異なった死力改善率を持つことが可能であることによるものである。

しかしながら、図 2 を見ると、若年層における実績値とモデルによる推計値との差は、データ範囲の最初と最後の年の近辺では高く、中間では低くなるという傾向が、また、高齢層ではこれとは逆の傾向が生じていることがわかる。

このような誤差項の傾向は、これも昨年度の研究において示した通り、年齢別死力改善率の年齢分布が時間の経過に応じて変化していることによるものである。

图 1 Mortality Rates (Actual and Model, LC)

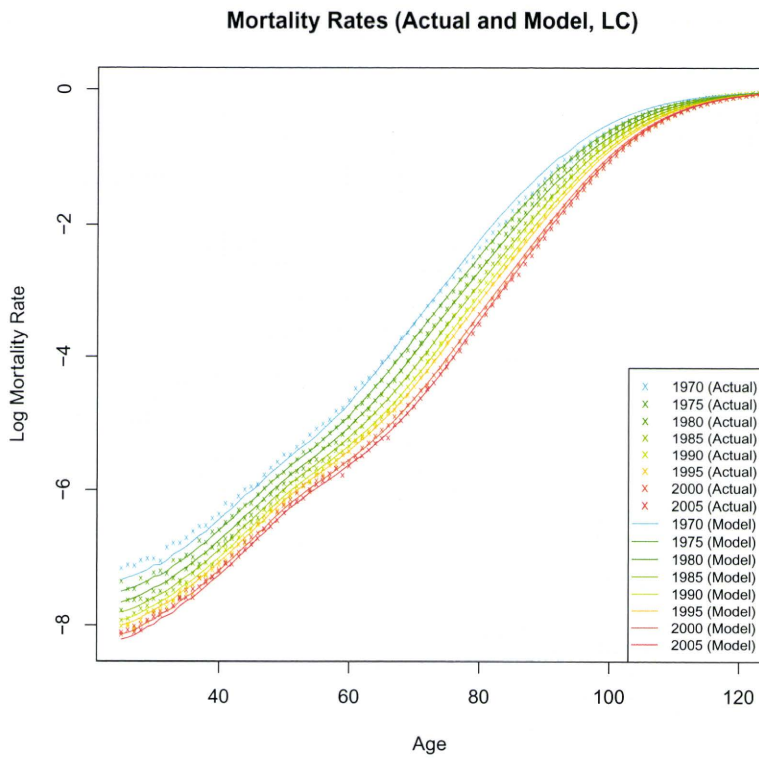
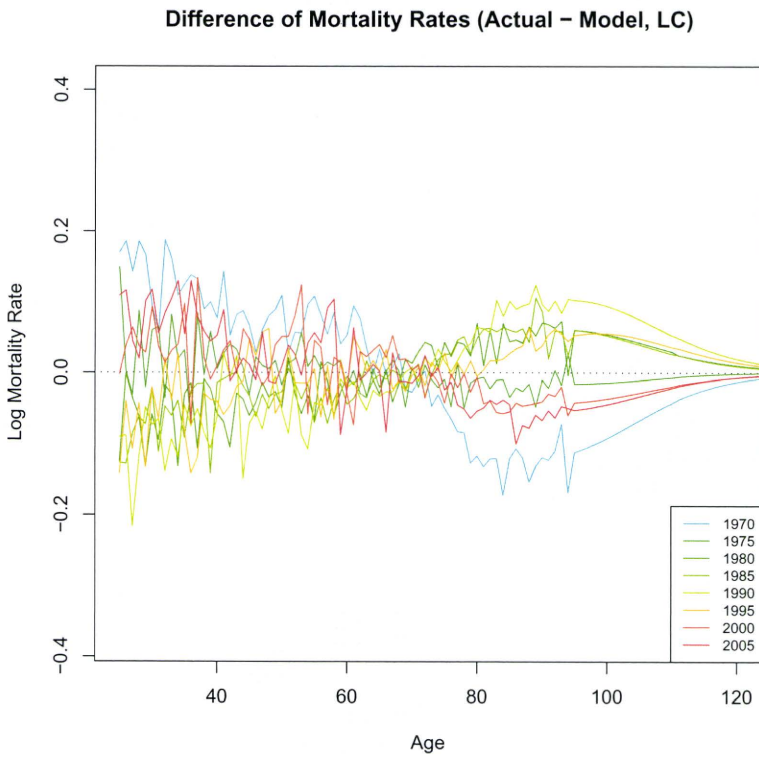


图 2 Difference of Mortality Rates (Actual and Model, LC)



2.2 シフト型モデルとしてのLDモデル

昨年度の研究においても、シフト型モデルとしての線形差分モデル (LD モデル) に関して述べたが、本年度の研究においては、これをさらに改良した LD モデルを以下で導入して用いることとする。

高齢部の死亡率を表すパラメトリックなモデルに関してはこれまで多くのものが提案されている。このようなものの中から、Thatcher et al. (1998) は、13カ国の80~120歳の高齢死亡率データに対し、6種類のパラメトリックモデルを当てはめ、モデル間の比較検討を行っている。ここで比較対象となったモデルは、

1. Gompertz: $\mu_x = ae^{bx}$
2. Weibull: $\mu_x = ax^b$
3. Helligman & Pollard: $q_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$
4. Quadratic: $\ln(\mu_x) = a + bx + cx^2 \quad (c < 0)$
5. Logistic: $\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}} + c$
6. Kannisto: $\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$

であるが、この中で、もっともパフォーマンスが高かったものは、Logistic と Kannisto のロジスティックモデルであり、特に、Kannisto は2つだけのパラメータで高齢死亡率をよく表現できるという利点があるとされている。また、この2パラメータロジスティックモデルは、本研究で基礎データとして用いている HMD において、高齢部のあてはめに用いられているモデルでもある。

本研究では、LC モデルのようなノンパラメトリックなモデルを基本として検討を行ってきたことから、このようなパラメトリックモデルを直接的に利用することは困難である。しかしながら、提案するノンパラメトリックなモデルが、この2パラメータロジスティックモデルと整合的な性質を仮に持つとすれば、それはモデルが高齢死亡率を表現する上で好ましい性質を備えていることの裏付けとなる。

一方、昨年度の研究において、死亡率モデルを、対象となる関数の時間的変化、すなわち、微分型表示を用いて定義することの有効性を述べた。シフト型モデルについては、 $y_{,t}$: 年齢増加率がこれに相当する。ここで、2パラメータロジスティックモデルの $y_{,t}$: 年齢増加率が持つ特性について、以下の命題が成立する。

命題 1. 2パラメータロジスティックモデル

$$y = x_{,t} = \log \frac{t \exp(t x)}{1 + t \exp(t x)} = \log t + t x \log(1 + t \exp(t x))$$

において、 y_t は各 t において x の線形関数である。すなわち、

$$y_t = f'_t + g'_t x$$

が成立する。

Proof.

$$e^y = \frac{{}_t \exp({}_t x)}{1 + {}_t \exp({}_t x)}$$

$$\Leftrightarrow {}_t \exp({}_t x) = \frac{e^y}{1 - e^y}$$

y を固定したまま両辺を t で微分することにより、

$${}_t' \exp({}_t x) + {}_t \exp({}_t x) \cdot {}_t' x + {}_t \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{{}_t'}{{}_t} x - \frac{{}_t'}{{}_t}$$

□

したがって、 y_t が x の線形関数であるとしてモデリングを行うことにより、高齢死亡部において、2パラメータロジスティックモデルが年齢増加率で満たすような性質を持つモデルを構築することが可能となることがわかる。そこで、年齢増加率が実際にこの条件を満たすようにモデリングを行ったものがLDモデルである。すなわち、LDモデルは、以下のように表すことができる。

$$y_t = f'_t + g'_t x$$

これは微分型表示であり、両辺を t で積分することにより、以下の通常型表示を得る。

$$\nu_{y,t} = f_t + g_t x + a_y$$

ここで、 a_y は対数死亡率の逆関数に関する標準的なパターンを表す。

図3と図4は、対数死亡率の逆関数の実績値とLDモデルによる推計値、および、両者の差をグラフで表したものである。この図から、LDモデルは実績値によくあてはまっていることが観察される。

图 3 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)

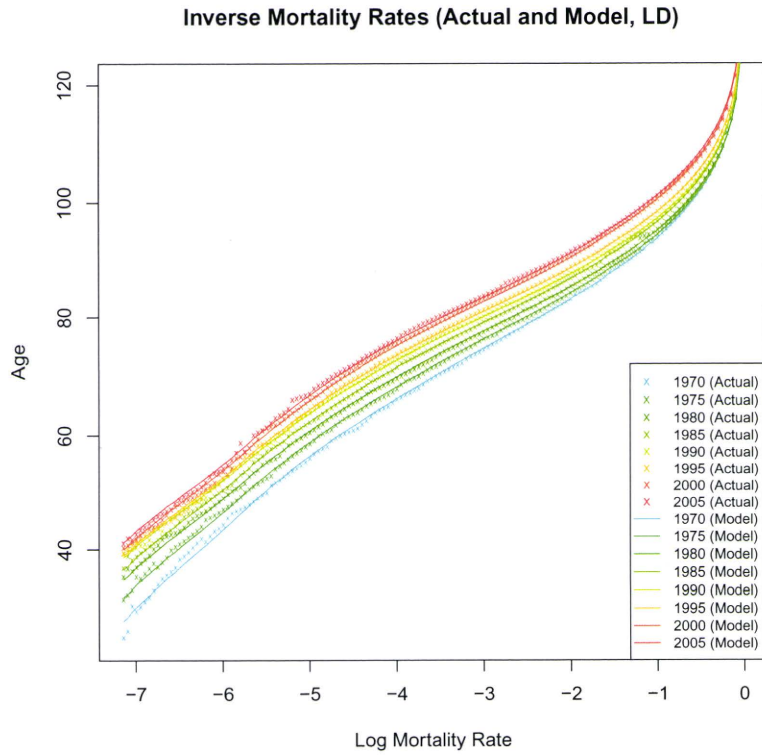
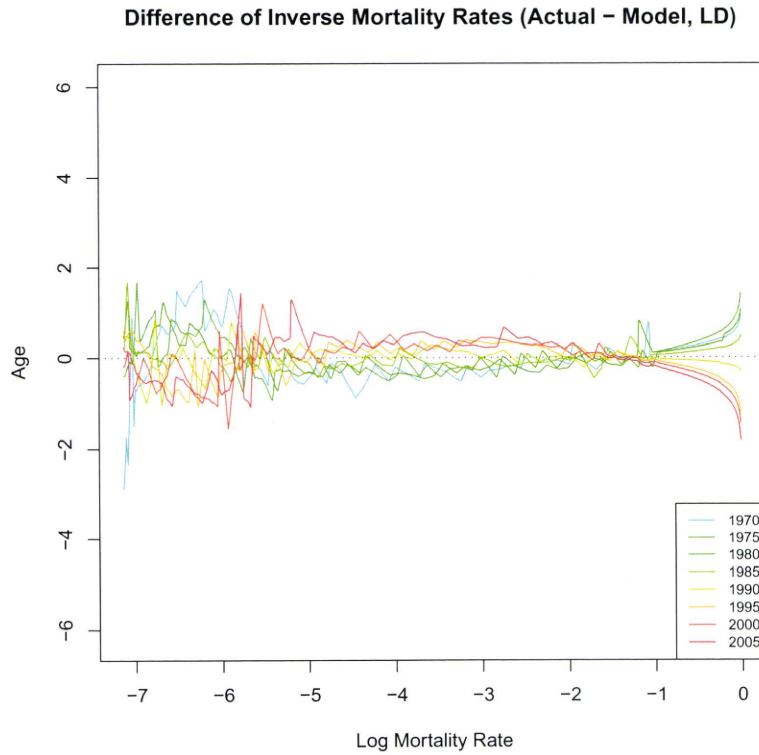


图 4 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, LD)



なお、昨年度の本研究、あるいは Ishii (2010) においては、 $y_{,t}$ を y の線形関数であると仮定して LD モデルを定義していた。今回のモデル改良は、 $y_{,t}$ を x の線形関数であると仮定する方が、年齢シフトモデルのシフト量・勾配パラメータ等を求める際の理論的基礎ともなっているロジスティックモデルと整合的であることに基づいているが、ここで、両者の各年齢に対する $y_{,t}$: 年齢増加率の違いについて比較を行っておくこととする。

図5と図6が、両モデルによる $y_{,t}$: 年齢増加の比較を示したものである。ここで、青い線で示されたのが実績値 (actual)、赤い線で示されたのが昨年度の研究で用いた $y_{,t}$ を y の線形関数であると仮定したモデル (LDy)、緑の線で示されたのが本年度に改良された $y_{,t}$ を x の線形関数であると仮定した LD モデル (LD) である。これを見ると、年齢増加率実績値は概ね年齢の線形関数で近似されることがわかり、LDy、LD とも実績値の傾向を表現できていることがわかる。また、HMD では2パラメータロジスティックモデルを用いて超高齢層の死亡率あてはめを行っていることから、先の命題で見た通り、超高齢層の年齢増加率実績値はほぼ完全な直線に近い形状をしていることも読み取れる。また、LD はその定義から全ての年齢層で線形関数となっているが、LDy では超高齢層でややカーブが屈曲するような傾向が見られる。

実績の年齢増加率の傾きが若年層と超高齢層で異なってくると、年齢増加率は全体として線形関数から遠ざかることから、LDy、LD のあてはめはやや悪くなってくる。ここで、その誤差については LDy の方が小さい場合と LD の方が小さい場合の両者がある。例えば、1975 年のケースでは LDy が超高齢層において傾きが緩やかとなることから実績値との乖離が小さくなるのに対し、1986 年のようなケースでは逆に乖離が大きくなっている。しかしながら、LDy の誤差が小さくなるのは、実績値における若年層と超高齢層の傾きの動きがたまたま LDy の超高齢層での屈曲の方向に一致していたというだけであり、死亡率が全体として2パラメータロジスティック曲線に近いと考えられる場合には LD の方が誤差は小さくなるはずであり、 $y_{,t}$ を x の線形関数と見る方が優れていると考えることができる。

図5 Comparison of the Force of Age Increase by Age(1975-1990, Female, Japan)

