厚生労働科学研究費補助金（政策科学推進研究事業）

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「近年における国際人口移動の動向分析と将来人口推計への示唆」

研究分担者　佐々井 司　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨

本研究は、前回の将来人口推計時点以降の国際人口移動の動向について、傾向の変化とその要因について分析を行い、今後の変化の可能性について考察を行うものである。具体的には、日本人、外国人それぞれの出入国数、ならびに在留登録者数の変化の傾向と特徴を分析し、特に 2008 年以降生じた大幅な出国超過の原因について考察することにより、わが国の国際人口移動の今後を展望する。

総務省統計局『人口推計』、法務省『出入国管理統計』、『在留外国人統計』を用いて、近年の日本人及び外国人別に入国超過数の推移を考察し、続いて外国人の出入国の状況について詳細な分析を行った。具体的には、地域ブロックならびに国籍別に入国超過数の動向を観測し、さらには特定の出身国に関して在留資格別人口の特徴を明らかにしている。さらには、ブラジル出身者の月別出入国者数の推移、都道府県分布、年齢別入国超過数の変化などを用いて、リーマンショックが人口移動に与えた影響について考察を行った。

2006 年以降において国際人口移動統計に観測された劇的な変化について、周縁的・一時的現象の影響と、構造変化に即した継続性の高い動向とを分離して観測することが可能である。とりわけ、南アメリカ諸国出身の外国人の動向はリーマンショックに即時的に反応しており、統計上でも明確な減少がみられる。一方、アジア諸国を出身とする外国人は比較的堅調にこれまでの傾向を踏襲していることが分かった。また国籍別外国人の在留状況は、在留資格にみられる特徴を考察することにより、短期的な変動理由ならびに在留期間の長期化を示唆する傾向を明らかにすることができた。これらの成果により、将来人口推計における国際人口移動の仮定値設定に際して、今後安定的に推移する可能性の高い要因の特定が期待される。

2008 年以降の国際人口移動にみられる大幅な出国超過は、主として外国人の転出超過に拠るところが大きい。日本人の転出超過の傾向はリーマンショックを経ても基本的に変わりはなく、とりわけ女性の海外長期滞在者が堅調に増加を続けている。その一方で、2008 年後半以降に生じた外国人の大規模な出国超過とそれに伴う登録人口の減少は、総人口の減少を顕在化させている。この間に生じた外国人人口の減少は主としてブラジル等の南アメリカ国籍の外国人が牽引しており、アジアをはじめとする他地域の外国人は依然として入国超過が続いている。なかでも中国人人口は毎年数万人単位での入国超過数を保っている。今後再び同様の現象が起こるか否かは、これからの世界経済情勢やわが国の産業構造の変化、ならびに受け入れ姿勢の行方にかかっているとも考えられる。また、これらの激しい動きは全国一律ではなく、特定の地域に偏在して観測されることから、地域ごとの動向を詳細に分析したうえで、全国的な影響を評価する必要がある。

A．研究目的

近年の国際人口移動全体の動向について時系列変化をみると，不規則な増減が繰り返されており，そこから一定の傾向を導き出すのは難しい。しかし，国際人口移動を日本人と外国人に分けて観察すると，それぞれ特徴な傾向がみられる。すなわち，日本人においては出国と帰国の差である入国超過数が不規則な上下動を繰り返しながらも概ねマイナスで推移しており、出国超過の傾向がみられる。それに対し、外国人は概ね大幅な入国超過が続いていた。そのため、前回（2006 年）の将来人口推計の国際人口移動の仮定設定は、日本人、外国人別にみた 2005 年までの出入国傾向の観測結果を基に、それ以降の国際人口移動が日本人の出国超過、外国人の入国超過で推移すると仮定した。しかしながら、2008 年のリーマンショックを機にわが国の国際人口移動の傾向が急変した。

本稿では、前回の将来人口推計時点以降の国際人口移動の動向について、傾向の変化とその要因について分析を行い、今後の変化の可能性について考察を行うものである。具体的には、日本人、外国人それぞれの出入国数、ならびに在留登録者数の変化の傾向と特徴を分析し、特に 2008 年以降生じた大幅な出国超過の原因について考察することにより、わが国の国際人口移動の今後を展望する。

B．研究方法

わが国を取り巻く国際人口移動を把握するためには、総務省統計局『人口推計』、法務省『出入国管理統計』、『在留外国人統計』がある。これらの統計を用いて、近年の日本人及び外国人別に入国超過数の推移を考察し、続いて外国人の出入国の状況について詳細な分析を行った。具体的には、地域ブロックならびに国籍別に入国超過数の動向を観測し、さらには特定の出身国に関して在留資格別人口の特徴を明らかにしている。さらには、ブラジル出身者の月別出入国者数の推移、都道府県分布、年齢別入国超過数の変化などを用いて、リーマンショックが人口移動に与えた影響について考察を行った。

C．研究成果

2006 年以降において国際人口移動統計に観測された劇的な変化について、周縁的・一時的現象の影響と、構造変化に即した継続性の高い動向とを分離して観測することが可能である。とりわけ、南アメリカ諸国出身の外国人の動向はリーマンショックに即時的に反応しており、統計上でも明確な減少がみられる。一方、アジア諸国を出身とする外国人は比較的堅調にこれまでの傾向を踏襲していることが分かった。また国籍別外国人の在留状況は、在留資格にみられる特徴を考察することにより、短期的な変動理由ならびに在留期間の長期化を示唆する傾向を明らかにすることができた。これらの成果により、将来人口推計における国際人口移動の仮定値設定に際して、今後安定的に推移する可能性の高い要因の特定が期待される。

D．結果の考察

2005 年国勢調査を基準人口とする前回の将来人口推計以降、国際人口移動は総じて出国超過の傾向を強めている。

2006 年以降にみられる外国人人口全体の劇的な変化は、主にブラジルからなる南アメリカ諸国籍人口の直近の変動を反映しており、逆に南アメリカ以外の人口は概ね安定した傾向を示している。

外国人長期滞在者の主な在留資格は国籍によって異なっており、出身国それぞれに特徴がみられる。これらは入国の経緯や在

留目的が出身国によって異なることを表している。

また、リーマンショックが人口移動に及ぼす影響は国籍別によってその表出の仕方が異なっており、ブラジル出身者においてより早い段階で大規模な反応がみられる。

E．結論（政策含意含む）

2008 年以降の国際人口移動にみられる大幅な出国超過は、主として外国人の転出超過に拠るところが大きい。日本人の転出超過の傾向はリーマンショックを経ても基本的に変わりはなく、とりわけ女性の海外長期滞在者が堅調に増加を続けている。その一方で、2008 年後半以降に生じた外国人の大規模な出国超過とそれに伴う登録人口の減少は、総人口の減少を顕在化させている。この間に生じた外国人人口の減少は主としてブラジル等の南アメリカ国籍の外国人が牽引しており、アジアをはじめとする他地域の外国人は依然として入国超過が続いている。なかでも中国人人口は毎年数万人単位での入国超過数を保っている。今後再び同様の現象が起こるか否かは、これからの世界経済情勢やわが国の産業構造の変化、ならびに受け入れ姿勢の行方にかかっているとも考えられる。また、これらの激しい動きは全国一律ではなく、特定の地域に偏在して観測されることから、地域ごとの動向を詳細に分析したうえで、全国的な影響を評価する必要がある。

F．研究発表（予定含む）

1．論文発表

○ 石川晃・佐々井司「行政記録に基づく人口統計の検証」『人口問題研究』第 66 巻第 4 号，2010 年 12 月

2．学会発表

○ 石川晃「将来人口推計における国際人口移動仮定方法の検討」第 62 回日本人口学会 於：お茶の水大学（2010 年 6 月）

○ 佐々井司・石川晃「近年における国際人口移動の動向と人口構造に及ぼす影響」第 63 回日本人口学会 於：京都大学（2011 年 6 月）

G．知的所有権の取得状況

なし

厚生労働科学研究費補助金（政策科学推進研究事業）
分担研究報告書

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「2005 年以降の合計出生率反転の要因：都道府県別データを用いた空間分析の応用」

研究分担者　岩澤美帆　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨

日本を含め、1990 年代以降、合計特殊出生率が 1.3 という低い水準を記録した超低出生率地域で、2000 年代に入り、合計特殊出生率の反転上昇が観察されている。欧州における反転地域を分析した先行研究によれば、出産先送りの終焉(テンポ効果の縮減) や移民の増加、経済の回復、家族政策の充実などが上昇の一翼を担っていることが指摘されている。日本の 2005 年以降の出生率上昇が、こうした要因で説明できるかどうか、説明できるとしてそれぞれどの程度の寄与があるかを定量的に示すために、都道府県別のデータを用いた重回帰モデルによる検証を試みた。ただし、各都道府県は、人口が大きく異なるなど、通常の最小二乗法では分散不均一性の問題が生じるほか、都道府県のような地域データは、隣接する地域で変数の相関が高いことが多く、誤差項に相関があることによって、推定値の標準誤差にバイアスが生じることが知られている。したがって、ここではこうした問題を解消するために、重みつき空間誤差モデルでの推定を試みた。その結果、テンポ効果の縮減は第一の上昇でわずかに有意な関係を示し、外国人の母親の増加は、全出生順位で有意な関係を示し、経済の回復は第二子で有意な関係を示した。母親の就業率の変化（両立支援策効果の代理変数）はいずれの出生順位でも有意な関係を示さなかった。ほかに、3 世代家族割合で表した、家族主義の強さは、第 1 子、第 2 子ではマイナスの関係、すなわち、出生率の上昇は家族主義の弱いところで起きたことを示し、第 3 子以降の高順位では、逆に家族主義の強いところで回復が起きた結果を示していた。欧州の説明要因がある程度日本の出生率上昇にも寄与している可能性が示された一方で、モデルにおける切片、すなわち各都道府県に共通する効果が上昇分の 7 割を説明しており、ここで検証した以外の要素、あるいは全国に共通する要因が大きい可能性も示された。確認された空間相関の観点からは、九州地方で、説明変数によらない共通する上昇要因が存在している可能性が示唆された。この地方特有の文化や施策などの検証が有効であろう。マクロ変数では影響のメカニズムの特定に限界があるので、今後は、反転上昇期間をカバーしたミクロデータによる検証などが必要であると思われる。

A．研究目的

1990年代以降、南欧や東欧、日本を含めた東アジアで、合計特殊出生率が1.3を下回る現象が観察されていたが、2000年代に入り、その多くの国で出生率の反転上昇傾向が確認されている。日本も2005年以降、合計特殊出生率が上昇している。こうした出生率の上昇が、出生行動の本質的な変化を意味するのか、一時的な要因によるものなのかを見極めることは、出生率の長期的な見通しや近年さかんに取り組まれている政策効果を議論するうえで、重要な情報を与えることになる。そこで、2005年以降上昇傾向にある日本の合計出生率が、どのような要因で上昇したかを理解することを目的とし、都道府県別の出生率変化を説明する回帰モデルを用いた検証を行った。

1.3を下回る合計特殊出生率は、しばしば超低出生率と言われ、そうした出生率を経験する地域の共通点としては、出産の先送り傾向 (テンポ効果)、高出生力人口の不在、経済の低成長、子育ての機会費用が高まる中で、仕事と子育ての両立が困難である社会システム、家族の結びつきが強く、ケア活動を家族が担うことが期待される家族主義といった文化的特徴が指摘されている(Kohler, Billari, and Ortega 2002 ,Frejka and Westoff 2008, Perelli-Harris 2005, Zuanna and Micheli 2004, Reher 2007, McDonald 2006)。こうした特徴をもつ地域では、家族政策の充実もあまり効果がなく、出生率の低迷は長期的に続くと予想されていた。しかしながら、イタリア、スペインといった南欧諸国を皮切りに、合計特殊出生率の上昇が確認され、こうした状況の要因として、近年の研究によれば、出産先送りの終焉(テンポ効果の縮減) や移民の増加、経済の回復、家族政策の充実といったことが欧州の出生率反転の一部を説明することが指摘されている(Castiglioni and Dalla Zuanna 2008, Billari 2008, Goldstein, Sobotka and Jasilioniene 2009)。

本研究では、こうした欧州における出生率反転の要因とされている事情が、日本の出生率上昇の説明要因となりうるのか、なるとして、それぞれの寄与はどの程度なのかを定量的に把握することを目指した。

B．研究方法

合計特殊出生率上昇の要因特定としては、3つのアプローチが考えられる。一つ目は、出生率の動向と要因になりそうな現象との時間的相関関係を確認する方法である。この方法は、データが比較的早く取得でき、即時に検証することが可能である。しかし他方で、変数間の因果関係を特定することは困難であり、仮説の検証としては不十分にならざるを得ない。二つ目のアプローチとしては、全国の動向は、地域の動向の集積と考え、出生率に影響をあたえる各現象は、地域のばらつきとしてとらえられるという考え方に基づく方法である。例えば、都道府県別の出生率の変動は、都道府県別の説明変数のばらつきである程度説明できると考えられる。都道府県別の指標も比較的早くに得ることができるが、マクロ指標の関係をみている点では最初のアプローチと同じであり、因果特定には不十分な点もある。3つ目の方法としては、行動変化のメカニズムをより詳細にモデル化できる、ミクロデータを用いた分析を挙げることができよう。しかしながら、こうしたデータを収集するには時間がかかり、現時点で、出生率の反転時期をカバーした適切なデータが存在しない。

そこで本研究では、第二のアプローチ、すなわち都道府県別の出生率の変化を説明することによって、関連要因の特定を試みた。

都道府県別出生率の2005年～2008年の

変化分を、テンポ効果の縮減(Bongaarts-Feeney(1998,2005)の period didtortion index の変化を使用)、外国人母による出生割合の変化、経済の回復（就業率の変化)、両立支援策の充実を示す母親の就業率の変化、家族主義を示す三世代家族割合の各効果で説明する回帰モデルを推定した。その際、都道府県による人口規模の違いを考慮し、再生産年齢女性の人口を重みにした重み付け最小二乗回帰モデルを用いるとともに、近隣県間で誤差項に相関がある場合は、重み付き空間誤差モデルを用いることを検討した。

C．研究成果

いずれのモデルでも、誤差項に空間相関が認められたので、通常の最小二乗法ではなく空間誤差モデルによる推定が望ましいことが分かった。テンポ効果指標の変化、就業率の変化、外国人母による出生割合の変化が出生率の変化と正の関係を示し、晩産化の停止、景気の回復、外国人の増加が近年の出生率上昇の一翼を担っていることがわかった。家族主義を示す三世代家族世帯割合は、第1子や第2子など、低い出生順位で、南欧における結果と同様、負の関係を示していた。また分散全体の15%程度を説明していた。子どもをもつ母親の就業率の変化は明確な正の関係を示さなかった。ただし、説明変数全体で説明できる部分は3割程度であり、残りは全国に共通する要因が存在したと解釈できる。

両立支援策の効果を代替すると考えた、子どものいる母親の就業率の変化は、出生率と明確な関係を示さなかった。出生率が上昇した都市部では保育園の待機児童が増加するなど、両立のニーズはありながらも体制が追いついていない可能性がある。

D．考察

国際結婚の増加や失業率の改善がわずかながら出生率上昇に関連していた。その意味では 2006 年以降国際結婚が減少し、2008 年以降は失業率も再上昇していることから、今後上昇効果が一時的に薄れる可能性も考えられる．しかしその効果は合計特殊出生率で 0.02 程度と限定的であろう。空間相関の高さは、その地域で、説明変数では説明できない出生率上昇の要因が存在していたことを意味する。誤差項の空間相関の高い地域を地図上で示すと九州地方で顕著であった。こうした地域における取り組みや独自の政策などにどのような特徴があるかなどを質的に特定していくことが必要あろう。

（政策的含意）

都道府県別のデータは、比較的データ量が豊富でかつ速報性が高いので、現象の初期把握に有効である。ただし従来の方法では、地域間相関の問題が解決されず、結果の解釈に留保が必要であった。空間的な特性を正確にモデル化することによってより精度の高い分析が可能となる。

本研究によって、景気や国際結婚などが出生率にある程度影響することが指摘されたので、政策効果などを評価する際には、こうした効果を統制した上で議論することが重要であると言える。また九州地方における回復の大きさが、2000年代以降本格化した、自治体が主体となった次世代育成の取組の効果である可能性もあるので、こうした地域の具体的な取り組みや効果について検証することが有効であると思われる。

F．研究発表

1．論文発表

○ 鎌田健司・岩澤美帆.2009.「出生力の地域格差の要因分析：非定常性を考慮した地

理的加重回帰法による検証」『人口学研究』第 45 号, pp.1-20.

○Iwasawa, Miho, Ryuichi Kaneko, Kenji Kamata, James M. Raymo, and Kimiko Tanaka. 2010. Explanations for the fertility reversal after 2005 in Japan. Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison Working Paper No. 2010-11.

２．学会発表

○ Iwasawa, Miho, Kenji Kamata, Kimiko Tanaka and Ryuichi Kaneko. 2009. "Recent family formation patterns in Japan: Evidence from geographical patterns and regional correlates." Paper presented at the XXVI IUSSP International Population Conference, September 27 - October 2, 2009, Marrakech, Morocco.

○ 鎌田健司・岩澤美帆.2009.「日本における近年の家族形成パターン: 地理・地域の視点からみた関連性」日本人口学会第 61 回大会、関西大学(6.12-14).

○ Iwasawa, Miho, Kenji Kamata, Kimiko Tanaka and Ryuichi Kaneko. 2009. "Regional patterns and correlates in recent family formation in Japan: Spatial Analysis of Upturn in Prefecture-level Fertility after 2005" Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 29 – May 1, 2009, Detroit, MI, US.

○ Iwasawa, Miho.2009. "The end of lowest-low fertility in Japan?: explanations for regional fertility reversal after 2005." Demographic Seminar, Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2009, Madison.WI, US.

○Iwasawa, Miho, Kenji Kamata and Ryuichi Kaneko. 2010. "Explanations for the Fertility Reversal after 2005 in Japan" Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 15-17, 2010, Dallas, TX.

○Iwasawa, Miho and Ryuichi Kaneko. 2010. Explanations for Regional Fertility Reversal after 2005 in Japan: Demographic, Socio-economic and Cultural factors. Paper presented at Joint Eurostat-UNECE Work Session on Demographic Projections, 28-30 April 2010, Lisbon, Portugal.

○ 岩澤美帆.2010.「2005 年以降の合計出生率反転の要因―都道府県別データを用いた空間分析の応用―」日本社会学会大会、名古屋大学(2010.11.7)

Ｇ．知的所有権の取得状況

なし

厚生労働科学研究費補助金（政策科学総合研究事業（政策科学推進研究事業））
分担研究報告書

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「出生意欲データを用いたPAF法による出生率推計：日本における応用」

研究分担者　守泉理恵　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨

本研究では、調査で得られる「出生意欲」のデータに注目して新しい出生率推計法を探るとともに、そのモデルを用いて社会経済要因の変化の影響を定量的に測ることができる方法がないか考察した。プロジェクト最終年度の本年度は、出生動向基本調査（夫婦・独身者調査）第10回（1992年）～第13回（2005年）の4回分の調査データを用いて出生率推計とその比較を行うとともに、社会経済要因の影響の分析では、昨年度のモデルを用いてさらに3つの新しいシナリオのもとでシミュレーションを行った。そのうえでこれまでの研究成果のまとめと、そこから見えてきた課題について整理した。

PAF法により1992・97年、1997・2002年、2002・2005年の3つのペアで出生率推計を行った結果、おおむねの傾向として、1950年代生まれでは、調査で対象者が回答した予定子ども数の平均値とPAF法で推計したコーホート平均完結出生子ども数がほぼ一致していた。しかし、1960年代生まれ以降で調査回答値と推計値が乖離し始め、若い世代になるほどその差は広がっている。一方、各回調査の年齢別平均追加予定子ども数は、新しい調査年ほど少しずつ低下している傾向がみられるが、大きく変化はしていない。つまり、子どもを持つ意欲はそれほど下がっていないのに、実際の出生行動はそれ以上に縮小しており、意欲が実現しにくくなっていることが示された。

また、昨年度に推定した重回帰モデルによる追加予定子ども数決定式を用い、社会経済要因が変化したときの若い世代の完結出生子ども数推計に及ぼす影響についても分析した。本年度は就業率の変化に注目し、正規就業者割合、非正規就業者割合について3つの異なる水準で変化したときの推計完結出生子ども数を比較した。就業率の変化については、平成19年度就業構造基本調査から得た潜在有業率、および政府の「仕事と生活の調和推進のための行動指針」にある25～44歳女性の就業率目標値を用いて設定した。本研究で推定した重回帰モデルでは非正規就業者割合の追加予定子ども数引き下げ効果が強いことから、非正規就業者割合の上昇が大きいほど、完結出生子ども数の推計値が低くなる。そのため、非正規就業者割合の上昇が大きいシナリオ順に推計完結出生子ども数が低い結果となった。ここから、一口に女性の就業率を高めるといっても、その中身は正規就業者が大きく増えるのか、非正規就業者が大きく増えるのかでかなり出生への効果が異なり、日本では女性（とくに有配偶女性）で非正規の仕事への就業希望が強いため、現状の構造のまま就業率が高くなると、かえって追加予定子ども数を低め、少子化を進めることになる可能性が読み取れた。

今後の課題としては、独身者の追加予定子ども数をどのように推定するかという問題、

調査における出生意欲の設問における不詳の処理の問題、社会経済要因の効果を見る際のモデルやシナリオ設定の洗練が挙げられる。

A．研究目的

本研究は、de Beer（1991）*が提示した Partial Adjustment Forecasting（PAF）法による出生意欲を用いた出生率推計モデルを日本の調査データに適用して、出生過程にある若い世代の完結出生子ども数の推計を行う。また、このモデルを基礎に、社会経済要因を取り入れた際の将来の出生率への影響測定について検討する。本年度は３年計画の３年目であり、これまで行った研究をふまえつつ、４回分の調査データを用いて出生率推計とその結果の比較を行うとともに、社会経済要因の影響の分析では、昨年度のモデルを用いてさらに３つの新しいシナリオのもとでシミュレーションを行う。そのうえでこれまでの研究成果のまとめと、そこから見えてきた課題について整理した。

* de Beer, Joop（1991）"From Birth Expectations to Birth Forecasts: A Partial-Adjustment Approach", Mathematical Population Studies, 3(2), pp.127-144.

B．研究方法

PAF 法は、年長コーホートが実際に経験した年齢別の累積出生率の実現率（μ 値）、および追加予定子ども数の変化率（A 値）を２時点の調査データから算出し、これを仮定値として若いコーホートの完結出生子ども数を算出するというものである。第 10 回（1992 年）～第 13 回（2005 年）出生動向基本調査で得られる年齢別追加予定子ども数のデータ、および『人口動態統計』（厚生労働省）から得られる年齢別累積出生率をこのモデルに投入し、1949～1986 年出生コーホートの完結出生子ども数の推計値を得た。

社会経済変数の影響測定については、昨年度推定した重回帰モデル（第 10 回～第 13 回出生動向基本調査（夫婦・独身者調査）の女性のデータを用い、年齢各歳別の平均追加予定子ども数を従属変数とし、短大・高専卒以上の学歴をもつ者の割合、独身者割合、正規就業者割合、非正規就業者割合、DID 居住者割合の５つの社会経済要因を説明変数として推定）により行った。本年度は就業要因を変化させたシナリオを設定した。女性の就業に関しては、少子化対策や労働政策の上でも重視される項目の一つである。具体的には、正規就業者割合、非正規就業者割合について、平成 19 年度就業構造基本調査から得た潜在有業率、および政府の「仕事と生活の調和推進のための行動指針」にある 25～44 歳女性の就業率目標値を正規就業増加型または非正規就業増加型で達成した場合の３つを想定し、そのときの推計完結出生子ども数の変化を比較検討した。就業要因以外の説明変数である短大卒以上者割合、独身者割合、DID 居住者割合は調査集計値のままとした。

C．研究成果

PAF 法により 1992・97 年、1997・2002 年、2002・2005 年の３つのペアで出生率推計を行った結果、おおむねの傾向として、1950 年代生まれでは、調査で対象者が回答した予定子ども数の平均値と、PAF 法で推計したコーホート平均完結出生子ども数がほぼ一致していた。しかし、1960 年代生ま

れ以降で調査回答値と推計値が乖離し始め、若い世代になるほどその差は広がっている。

社会経済要因に関する分析結果では、就業率を変化させた場合の完結出生子ども数の推計値は、もっとも低いのが潜在有業率達成シナリオであり、次に WLB 行動指針目標値を非正規就業者割合が大きく増加して達成するシナリオ、そして正規就業者割合が大きく上昇して達成するシナリオとなった。

D．結果の考察

各回調査の年齢別平均追加予定子ども数は、新しい調査年ほど少しずつ低下している傾向がみられるが、大きく変化はしていない。つまり、子どもを持つ意欲はそれほど下がっていないのに、実際の出生行動はそれ以上に縮小しており、意欲が実現しにくくなっていることが推察された。

また、女性の就業率を変化させたシミュレーション結果からは、一口に女性の就業率を高めるといっても、その中身は正規就業者が大きく増えるのか、非正規就業者が大きく増えるのかでは、かなり効果が異なることがわかった。日本では女性（とくに有配偶女性）で非正規の仕事への就業希望が強いため、現状の構造のまま就業率が高くなると、かえって追加予定子ども数を低め、少子化を進めることになる可能性が読み取れる。

E．結論

PAF 法は、2 時点の追加予定子ども数の調査データを用いて、その年齢別の実現率と変化率を計算し、コーホートごとの最終的な完結出生子ども数を推計する方法である。PAF 法は年齢別の現存子ども数と追加予定子ども数のみを用いる簡潔な出生率推計方法であり、2 時点間の調査データを用いて μ 値・A 値の計算を行うため、出生過程にある女性たちの実際の見通しの変化をいち早く仮定値に反映させることができる。また、PAF 法でキーとなる年齢別の平均追加予定子ども数は、社会経済要因によってかなりの程度変動を説明できることから、この決定モデルについて考察を深め、洗練することで、より精度の高い社会経済要因を考慮した出生率推計モデルを得ることができる可能性が示された。

今後の課題としては、PAF 法推計に用いるデータにかかわるものとして、独身者の追加予定子ども数をどのように推定するかという問題、調査における出生意欲の設問における不詳の処理の問題がある。また、社会経済要因の効果を見る分析については、推定モデルやシナリオ設定のさらなる洗練が必要である。社会経済要因はそれぞれ独立ではなく、ある程度相互に関連して動いている。その点についてさらに考察を深めて説得力のあるシナリオを提示するとともに、政策効果の推定という面でも研究を深める価値があるだろう。

F．研究発表

1．論文発表

なし

2．学会発表

「出生意欲データを用いた出生率推計の試み」 日本人口学会第 62 回大会 お茶の水女子大学 (2010.6.13)

G．知的所有権の取得状況

なし

Ⅱ.　個別研究報告

1　変動環境下における人口の基本再生産数の定義について

稲葉 寿

1　はじめに

基本再生産数 (basic reproduction number)（R_0 と表記される）の概念は、すでに 19 世紀において芽生えていたが ([28], [29])、シャープ、ダブリン、ロトカによる安定人口理論によって初めて理論的な基礎を得て以来、人口成長の閾値条件を与える人口学・個体群動態学におけるもっとも基本的で、重要な指標として発展してきた ([11], [24])*1。過去 20 年間においては、人口学よりも感染症疫学において、基本再生産数に関わる理論が著しく発展してきており ([14])、個体の異質性や環境の変動などを考慮の入れた基本再生産数の概念が提案されてきている。特に、Diekmann, Heesterbeek, Metz ([8]) による年齢構造や生存状態等の個体の異質性を考慮した個体群ダイナミクスにおける基本再生産数の定義は、感染症疫学や個体群動態学に非常に大きな影響を与えた。その定義においては、基本再生産数はある種の正積分作用素ないしは正行列のスペクトル半径として与えられる。この作用素ないし行列を次世代作用素 (next generation operator: NGO) ないし次世代行列 (next generation matrix: NGM) とよぶ ([9], [10])。

Diekmann 等による R_0 の定義は、理論的にも実践的にも非常に有効であることが証明されてきたが、それは定常的環境における線形人口ダイナミクスにおける閾値条件を定式化するものであって、環境が時間的に変動する場合に、同様な指標が定義できるかどうかが、大きな問題であった。そこで、1990 年代半ばから、まず周期的環境において基本再生産数を定義する試みがなされるようになってきた ([1]–[6], [12], [13], [33], [34])。いくつかの同値な閾値条件を導く定義がありうるが、なかでも Bacaër と Guernaoui ([1]) による定義は最も重要である。というのも Bacaër and Ait Dads ([5], [6]) が示したように、彼らの定義による R_0 は、継続する世代の人口サイズの漸近的な比になっており、生物学的に意義のある解釈を与え、定常環境下における Diekmann 等による定義の直接的な拡張になっているからである。

本研究では、周期系を超えてより一般の変動環境において人口成長の閾値を与える基本再生産数の新たな定義を提案する。この新たな基本再生産数は、時間パラメータに依存する世代分布を次世代の分布に変換するある種の正積分作用素（世代推進作用素：generation evolution operator: GEO) によって生成される世代分布の列の収束半径として定義される。この作用素 GEO は、時間も状態変数とみなした拡張された状態空間における人口の世代分布に作用するために、生物学的意味が明快であり、かつ定常環境ないし周期的環境における次世代作用素は時間に関して集計された世代分布に作用する作用素として、この世代推進作用素から自然に導かれる。

*1 R_0 や内的成長率は進化生物学においては、しばしば侵入生物ないし突然変異体の適応度と解釈され、感染症疫学では感染症の侵入条件を定量化するものと見なされる.

以下ではまずこれまでの定常環境、周期環境における基本再生産数の定義において、R_0 が継続する世代の人口サイズの漸近的な比を与える、という世代解釈が成り立つことを GEO を用いて証明する。そこでは時間をも状態変数に取り入れた拡張された状態空間上で作用する世代推進作用素による世代の生成過程が、集計作用素によって次世代作用素の反復過程に還元されるという事実がキーとなる。このような還元によって、定常環境と周期環境における次世代作用素による R_0 の世代解釈が成り立つことが明らかとなる。その後、GEO を用いて、一般の変動環境における R_0 の新たな定義を提案する。このとき定常環境と周期的環境においては、新定義による R_0 は GEO のスペクトル半径に一致し、かつそれは従来の定義における次世代作用素のスペクトル半径に一致することが示される。したがって、GEO による R_0 の定義は Diekmann– Heesterbeek–Metz による定常環境系における R_0, Bacaër–Guernaoui による周期環境系における R_0 の拡張と見なせる。しかしながら、この新定義による一般変動環境における R_0 が常に GEO のスペクトル半径として与えられるかどうかはまだわかっていない。また一般変動環境においては $R_0 < 1$ という劣臨界条件は人口が滅亡する十分条件であるが、一方において過臨界条件 $R_0 > 1$ は必ずしも人口増加を意味しないという問題がある。すなわち、変動環境においては、R_0 だけでは成長閾値としては不十分であり、何らかの意味における人口の長期的成長率の存在が問題となる。実際、成長率は平均世代間隔にも依存しているから、それが変動している場合、$R_0 > 1$ であっても人口成長がおきない場合もある。R_0 によって成長閾値が与えられるような（周期系を含む）変動環境下の人口の広いクラスを抽出することは今後の課題である。

2 定常環境における基本再生産数の定義

はじめに定常環境下における基本再生産数の定義の再検討から始めよう。各個体は変数 $\zeta \in \Omega$ によって記述されるとする。これを個体状態変数 (*h-state variable*) とよぶ。集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を個体状態空間とよぶ。$A(\tau,\zeta,\eta)$ は状態 η に生まれた個体が年齢 τ において状態 state ζ の個体を生む出生率とする。

$i(t,\zeta)$, $\zeta \in \Omega_b$ は時刻 t における新生児の状態別密度関数とする。ここで $\Omega_b \subset \Omega$ は「出生状態」からなる部分状態空間である。「出生状態」はその状態に新生児が生まれる可能性がある状態である。このとき、状態別の新生児密度関数の時間発展は以下のような再生方程式で表される：

$$i(t,\zeta) = g(t,\zeta) + \int_0^t \int_{\Omega_b} A(\tau,\zeta,\eta) i(t-\tau,\eta) d\eta d\tau, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

ここで $g(t,\zeta)$ は初期人口から生まれる新生児の時刻 t における密度分布関数である。

$E_+ := L^1_+(\Omega_b)$ を新生児の密度関数の属する関数空間としよう[*2]. E_+ 上の正線形積分作用素 $\Psi(\tau)$ を以下のように定義しよう：

$$(\Psi(\tau)f)(\zeta) := \int_{\Omega_b} A(\tau,\zeta,\eta) f(\eta) d\eta, \quad f \in E_+$$

このとき純再生産作用素 $\Psi(\tau)$ は、新生児の状態別分布を、それらが τ 時間後に生み出す新生児の状態別分布へ写す作用を表している。

時刻 t における新生児分布を E_+ 値関数 $i(t) := i(t,\cdot)$ とすれば、(2.1) は抽象的な再生方程式として書かれる：

$$i(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(\tau) i(t-\tau) d\tau, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

[*2] もし状態変数が離散的であれば $E_+ = \mathbf{R}^n_+$ であり、そのノルムを $\|x\| := \sum_{k=1}^n |x_k|$, $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbf{R}^n$ とする.

$\hat{\Psi}(\lambda)$ を作用素 Ψ のラプラス変換としよう：

$$\hat{\Psi}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\Psi(\tau)d\tau$$

正作用素の議論 ([15], [17]) から、適当な条件のもとで実数 λ_0 が存在して、$r(\hat{\Psi}(\lambda_0)) = 1$[*3]であり、初期データ g に依存する正数 $\alpha(g)$ が存在して、

$$i(t) \sim \alpha(g)e^{\lambda_0 t}\psi_0, \quad t \to \infty \tag{2.3}$$

がなりたつ。ここで ψ_0 は $\hat{\Psi}(\lambda_0)$ の固有値 1 に属する正固有ベクトルである。さらに以下の関係が成り立つ：

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(\hat{\Psi}(0)) - 1) \tag{2.4}$$

Diekmann–Heesterbeek–Metz の定義においては、次世代作用素 (next generation operator: NGO) が以下のように定義される：

$$K_E := \hat{\Psi}(0) = \int_0^\infty \Psi(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

このとき基本再生産数 (basic reproduction number R_0) はそのスペクトル半径で与えられる：

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|K_E^m\|_{\mathcal{L}(E)}} = r(K_E) = R_0 \tag{2.6}$$

ここで $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ は E 上の有界作用素の作用素ノルムである。このとき (2.4) は $\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(R_0 - 1)$ を示すから, 定義 (2.6) は人口成長の閾値を与えるという基本再生産数の特性をよく表している。

一方、世代ごとに人口成長を見た場合の基本再生産数の意義を確認しておこう。初期条件 ϕ に対して、世代ごとに見た幾何学的成長率は $\sqrt[m]{\|K_E^m\phi\|_E}$ で与えられるが、一般には

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|K_E^m\phi\|_E} \le r(K_E)$$

である。正作用素に関するペロン・フロベニウス理論から、上記の不等号は適当な K_E に関する条件のもとで実は等号として成立することがわかる。ただし、$\|K_E^m\phi\|_E$ が m 番目の世代サイズを表すという場合、分布 ϕ は時間パラメータに依存した実時間における新生児の状態別分布[*4]とは異なるものであることに注意しておかなければならない。

次世代作用素が作用する関数空間の意味を明らかにするために、再生方程式 (2.1) へ戻ろう。継続する各世代の状態別分布は以下のように計算される：

$$i_0(t) = g(t), \quad i_m(t) = \int_0^t \Psi(\tau)i_{m-1}(t-\tau)d\tau, \quad m = 1, 2, .., \tag{2.7}$$

このとき再生方程式 (2.1) の解は以下で与えられる：

$$i(t) = \sum_{m=0}^\infty i_m(t)$$

[*3] $r(A)$ は作用素 A のスペクトル半径を表す.

[*4] 以下で定義する i_m.

ここで $i_m(t) \in E_+$ は時刻 t に生まれた m 世代目の新生児の状態別分布（世代分布： generation distribution)[*5]である。すなわち、 $i_0(t)$ は初期人口から生まれた新生児の分布であり、 $i_1(t)$ は初期人口の孫世代の状態別分布である。生物学的意味から、世代分布関数の属する関数空間は

$$i_m \in Y_+ := L^1_+(\mathbf{R}_+; E) = L^1_+(\mathbf{R}_+ \times \Omega_b)$$

と仮定する。ここで、 Y_+ はバナッハ束 Y の正値錐であり、そのノルムは

$$\|i_m\|_Y := \int_0^\infty \|i_m(t)\|_E dt = \int_0^\infty \int_{\Omega_b} |i_m(t,\zeta)| d\zeta dt \tag{2.8}$$

で与えられる。

時間変数 t を状態変数とみなせば、$\mathbf{R}_+ \times \Omega_b$ が拡張された状態変数のなす空間であり、Y_+ が拡張された状態分布の関数空間となる。上記の定義において、各世代の分布の Y 空間ノルム $\|i_m\|_Y$ は m 世代目として生まれた新生児の総数を与えるから、その漸近的な世代ごとの幾何学的成長率は $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y}$ で与えられる。

ここで Y 空間の正値錐 $Y_+ = L^1_+(\mathbf{R}_+; E_+)$ を不変にする正積分作用素 $K_Y : Y \to Y$ を以下のように定義しよう：

$$(K_Y f)(t) := \int_0^t \Psi(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in Y_+ \tag{2.9}$$

このとき世代分布の発展過程 (2.7) は Y_+ における以下のような逐次的な過程と考えられる：

$$i_0 = g, \quad i_m = K_Y i_{m-1} \tag{2.10}$$

そこで K_Y を世代発展作用素 (generation evolution operator: GEO) とよぼう。証明は略するが、以下が直ちに示される：

補題 2.1 以下を仮定する：

$$\int_0^\infty \|\Psi(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)} d\tau < \infty \tag{2.11}$$

このとき K_Y は Y の有界線形作用素であり以下が成り立つ：

$$\|K_Y\|_{\mathcal{L}(Y)} \le \int_0^\infty \|\Psi(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)} d\tau \tag{2.12}$$

$f = f(t,\zeta) \in Y$, $(t,\zeta) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega_b$ にたいして、時間パラメータに関する集計作用素 $T : Y \to E_+$ を以下で定義する：

$$(Tf)(\zeta) := \int_0^\infty |f(t,\zeta)| dt \tag{2.13}$$

このとき T は有界作用素である。

補題 2.2 以下が成り立つ：

$$\|f\|_Y = \|Tf\|_E \tag{2.14}$$

したがって T の作用素ノルムは 1 である。さらに $f \in Y_+$ に対して以下がなりたつ：

$$TK_Y f = K_E T f \tag{2.15}$$

[*5] 世代分布はロトカによってすでに検討されている ([22], [23]).

（証明）以下がなりたつことはすぐにわかる：

$$\|f\|_Y = \int_0^\infty dt \int_{\Omega_b} d\zeta |f(t,\zeta)| = \int_{\Omega_b} d\zeta (Tf)(\zeta) = \|Tf\|_E$$

さらに $f \in Y_+$ に対して

$$TK_Y f = \int_0^\infty dt \int_0^t \Psi(s) f(t-s) ds = \int_0^\infty \Psi(s) ds \int_0^\infty f(t) dt = K_E T f$$

となる。それゆえ結論を得る。（証明終）

新生児は時間 t と状態 ζ によって特徴付けられるが、定常的な環境では違う時刻に同じ状態に生まれた個体は同じライフサイクルを経験する。それゆえ、時間パラメータに関して集計された世代状態分布を以下のように定義しよう：

$$Ti_m = \int_0^\infty i_m(t) dt \in E_+$$

(2.15) から Y 空間の世代発展過程 (2.10) は E 空間の反復プロセス

$$Ti_m = TK_Y i_{m-1} = K_E T i_{m-1} \tag{2.16}$$

を誘導することがわかる。すなわち次世代作用素 K_E は集計された世代分布の世代的発展を記述する作用素であることがわかる[*6].

正作用素の理論[*7]から、K_E に関するコンパクト性と原始性 (primitivity) を仮定すれば, $r(K_E)$ は正の固有ベクトル $f_E \in E_+$ に対応する支配的な固有値になり、正の汎関数 $F_E \in E_+^*$ が存在して

$$Ti_m = K_E^m T i_0 \sim \langle F_E, Ti_0 \rangle r(K_E)^m f_E, \quad m \to \infty \tag{2.17}$$

となる。ここで E^* は共役空間であり、$\langle F_E, \phi \rangle$ は汎関数 F_E の $\phi \in E$ における値を示す。

(2.14) から、 $\|Ti_m\|_E = \|i_m\|_Y$ を得る。 また (2.17) から、

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|Ti_m\|_E} = r(K_E) = R_0 \tag{2.18}$$

となる。従って以下が示される：

定理 2.3 Diekmann-Heesterbeek–Metz による基本再生産数 R_0 の定義は、以下のような意味で世代的解釈を許す：

$$R_0 = r(K_E) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \tag{2.19}$$

すなわち、世代分布 i_m の Y ノルム、あるいは集計された世代分布 Ti_m の E ノルムは各世代の出生児総数をあたえ、それは漸近的に成長率 $r(K_E) = R_0$ で幾何学的に成長する。

上記の世代的解釈 (2.19) と閾値性 $\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(R_0 - 1)$ は基本再生産数のもっとも基本的な特性であり、変動環境におけるその拡張においても維持されるべき性質である。

[*6] (2.16) はすでに [18] において、次世代作用素の解釈として使用されている。
[*7] 正作用素の理論に関しては [25], [30], [26], [17], [31] 等を参照.

3 周期的環境下における基本再生産数の定義

次に周期的環境下における Bacaër と Guernaoui による R_0 の定義を検討しよう。ここでは $\theta > 0$ を環境と人口動態の周期であるとする。したがって、人口の再生産プロセスは以下のような再生方程式で記述される：

$$i(t) = g(t) + \int_0^t \Psi(t,\tau) i(t-\tau) d\tau, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

ここで $\Psi(t,\tau)$ は E_+ 上の線形正作用素である：

$$(\Psi(t,\tau)f)(\zeta) := \int_{\Omega_b} A(t,\tau,\zeta,\eta) f(\eta) d\eta$$

パラメータの周期性から、

$$\Psi(t+\theta,\tau) = \Psi(t,\tau), \quad t \in \mathbf{R} \quad \tau > 0$$

と仮定される。

Bacaër とその共同研究者 ([1]–[6]) は周期系における基本再生産数は、以下の関係を満たすような θ 周期をもつ正の連続 E 値関数が存在するような正数 R_0 として定義される：

$$R_0 f(t) = \int_0^\infty \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{3.2}$$

このとき、R_0 は以下のように定義される正の積分作用素のスペクトル半径に他ならない：

$$f \longrightarrow \int_0^\infty \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in C_\theta(\mathbf{R};E) \tag{3.3}$$

ここで、C_θ は θ-周期的な連続関数のなす関数空間である。

λ を複素パラメータとして $K_\theta(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C})$ を以下のように定義される C_θ 上の積分作用素とする：

$$(K_\theta(\lambda)f)(t) := \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \Psi(t,\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad f \in C_\theta(\mathbf{R};E) \tag{3.4}$$

そこで、(3.3) で定義される $K_\theta(0)$ である。

周期的再生方程式に関する定理 ([32]) より、(3.1) の解は漸近的に周期関数と指数関数の積で表現される：$i(t) \sim e^{\lambda_0 t}\psi_0(t), (t \to \infty)$。ここで、$\psi_0 \in C_\theta$ は $K_\theta(\lambda_0)$ の固有値 1 に属する正固有ベクトルであり、漸近的成長率 λ_0 は特性関係式 $r(K_\theta(\lambda_0)) = 1$ をみたす唯一の実数である。さらにこのとき実軸上での $r(K_\theta(\lambda))$ の単調性から、以下が成り立つ：

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(K_\theta(0)) - 1), \tag{3.5}$$

上記の関係は Bacaër–Guernaoui の定義 $R_0 = r(K_\theta(0))$ が、実時間における成長率という観点から妥当であることを示している。(3.5) の数学的証明は [27], [33] , [20] 等においても与えられている。

しかしながら、定常的環境の場合と異なり、作用素 $K_\theta(0)$ が作用する関数空間は周期関数のなす空間であるから、時間に関して単純に集計された世代分布がなす関数空間ではない。 実際、各世代の分布を計算すれば、

$$i_0(t) = g(t), \quad i_m(t) = \int_0^t \Psi(t,\tau) i_{m-1}(t-\tau) d\tau, \quad m = 1,2,.., \tag{3.6}$$

となるから、時間に関して単純に集計すれば以下を得る：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty i_m(t)dt &= \int_0^\infty \int_0^t \Psi(t,\tau)i_{m-1}(t-\tau)d\tau dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(s+\tau,s)ds i_{m-1}(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

それゆえ時間に依存するパラメータをもつ人口システムにおいては、次世代作用素を、単純に時間的に集計された世代分布の間の作用素としては定義できない。そこで別の集計方法を考えよう。

新生児は出生時刻とその状態で特徴付けられるが、周期的な環境においては周期 θ の整数倍の差をもつ時間パラメータは状態変数としては同じものと見なせる。というのも、そのような θ を法として合同な出生時刻をもつ個体は、環境の周期性によって全く同じライフサイクルを経験するからである。それゆえ、次世代作用素は周期関数の空間上の作用素として定義されると考えられる。この場合、時間パラメータは実時間を示すのではなく、出産時点における周期的な環境（シーズン）を指示するパラメータと考えられる。

そこで、θ 周期を持つ局所可積分な E-値関数のなす関数空間を Y_θ としよう。そのノルムを

$$
\|f\|_{Y_\theta} := \int_0^\theta \|f(t)\|_E dt = \int_0^\theta dt \int_{\Omega_b} |f(t,\zeta)| d\zeta
$$

とする。そこで次世代作用素 K_θ を以下のように定義しよう：

$$
(K_\theta f)(t) := \int_0^\infty \Psi(t,\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad f \in Y_\theta
$$

一方、周期系に対する世代推進作用素 (GEO) は以下のように定義される：

$$
(K_Y f)(t) := \int_0^t \Psi(t,\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad f \in Y_+ \tag{3.7}
$$

従って、(3.6) は再び Y_+ における反復過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ と見なされる。ここでは K_Y は Y_+ を不変にする Y 上の有界線形作用素である。

世代分布を集計するために、以下のような周期化作用素 $U : Y \to (Y_\theta)_+$ を導入しよう：

$$
(Uf)(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f^*(t+n\theta)|, \quad t \in \mathbf{R},
$$

ここで $f^* \in L^1(\mathbf{R}\times\Omega_b)$ は f の定義域を実数全体へ拡張したものであり、 $t \geq 0$ では $f^*(t) = f(t)$、$t < 0$ では $f^*(t) = 0$ である。このとき周期化作用素 U は世代分布 $f \in Y_+$ とそれを $n\theta$ だけ時間軸上でシフトさせた分布 $f^*(t+n\theta)$ を同一視することによって、世代分布を集計している作用であると考えられる。このとき以下が成り立つ：

補題 3.1

$$
\|f\|_Y = \|Uf\|_{Y_\theta} \tag{3.8}
$$

$$
UK_Y f = K_\theta U f, \quad f \in Y_+ \tag{3.9}
$$

（証明）$f \in Y_+$ であれば、以下を得る：

$$
\begin{aligned}
\|Uf\|_{Y_\theta} &= \int_0^\theta dt \int_{\Omega_b} d\zeta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^*(t+n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} dt \int_{\Omega_b} d\zeta f^*(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\theta}^{(n+1)\theta} dt \int_{\Omega_b} d\zeta f(t) = \int_0^\infty \|f(t)\|_E dt = \|f\|_Y
\end{aligned}
$$

必ずしも正ではない一般の $f \in Y$ に関しては, その正部分 f_+ と負の部分 f_- へ分解すれば、 $f = f_+ - f_-$ であり、

$$\|f\|_Y = \|f_+\|_Y + \|f_-\|_Y = \|Uf_+\|_{Y_\theta} + \|Uf_-\|_{Y_\theta}$$

一方、

$$\begin{aligned}(Uf)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f^*(t+n\theta)| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_+^*(t+n\theta) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_-^*(t+n\theta) \\ &= (Uf_+)(t) + (Uf_-)(t)\end{aligned}$$

であるから、

$$\|Uf\|_{Y_\theta} = \|Uf_+\|_{Y_\theta} + \|Uf_-\|_{Y_\theta}$$

を得る。そこで $\|f\|_Y = \|Uf\|_{Y_\theta}$ である。次に (3.9) を示そう。 $f \in Y$ に対して

$$(K_Y f)^*(t) = \int_0^\infty \Psi(t,s) f^*(t-s) ds$$

である。それゆえ、 $f \in Y_+$ であれば以下を得る：

$$\begin{aligned}(UK_Y f)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \Psi(t+n\theta, s) f^*(t+n\theta-s) ds \\ &= \int_0^\infty \Psi(t,s)(Uf)(t-s) ds\end{aligned}$$

これは (3.9) が成り立つことを示している。(証明終)

上記の定理によって、Y 空間上の世代推進過程 (3.6) は Y_θ 空間上の反復過程に移し替えられることになる。実際、U を実時間における過程 $i_m = K_Y i_{m-1}$ に作用させれば、(3.9) によって以下を得る：

$$U i_m = U K_Y i_{m-1} = K_\theta U i_{m-1} \tag{3.10}$$

このとき世代のサイズは保存されている ($\|i_m\|_Y = \|Ui_m\|_{Y_\theta}$) ことに注意しよう。(3.10) から、集計された世代分布に作用する K_θ を次世代作用素とみなすことができる。

正作用素の理論を適用するために、もう一度集計をおこなおう。周期性を利用すれば、K_θ は $Z := L^1([0,\theta]; E)$*8 上の積分作用素に還元される。Z 空間上の正作用素 $K_Z : Z \to Z$ を以下のように定義しよう：

$$(K_Z \phi)(t) := \int_0^\theta \Pi(t,s)\phi(s) ds, \quad t \in [0,\theta), \quad \phi \in Z, \tag{3.11}$$

ここで、

$$\Pi(t,s) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(t, t-s+n\theta), & t > s, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(t, t-s+n\theta), & t < s. \end{cases}$$

である。 $V : Y_\theta \to Z$ は周期関数からその一周期分を切り出す作用素 $(Vf)(t) = f(t), t \in [0,\theta]$ であるとしよう。このとき以下がただちにわかる：

*8 この還元は [3] において示されているので詳しい証明は略する。

補題 3.2

$$\|f\|_{Y_\theta} = \|Vf\|_Z \tag{3.12}$$

$$VK_\theta = K_Z V \tag{3.13}$$

$V^{-1} : Z \to Y_\theta$ を $\phi \in Z$ をその周期化に写す作用とすれば、V は Y_θ から Z への全単射になる。それゆえ $K_\theta = V^{-1}K_Z V$ であり、以下が成り立つ：

補題 3.3

$$r(K_Z) = r(K_\theta) \tag{3.14}$$

(3.13) より、反復過程 (3.10) は Z 空間上の反復過程に還元されることがわかる：

$$VUi_m = VK_\theta U i_{m-1} = K_Z VUi_{m-1} \tag{3.15}$$

関数空間 Z においては時間パラメータがもはや経過時間ではなく、出生が起きるシーズン（環境）の異質性を指定するパラメータになっている。

K_Z をコンパクトで原始的な正線形作用素と仮定すれば、ペロン・フロベニウスタイプの理論によって以下が結論される：

$$VUi_m = K_Z^m VUi_0 \sim \langle F_Z, VUi_0\rangle r(K_Z)^m f_Z, \quad m \to \infty \tag{3.16}$$

ここで $f_Z \in Z_+$、$F_Z \in Z_+^*$ は正固有値 $r(K_Z)$ に対応する正固有ベクトル、正共役固有汎関数であり、$\langle F_Z, \phi\rangle$ は F_Z の $\phi \in Z$ における値である。(3.7), (3.14), (3.16) から以下を得る：

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|VUi_m\|_Z} &= r(K_Z) = r(K_\theta) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|Ui_m\|_{Y_\theta}} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y}\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.5) と (3.17) は、$r(K_\theta)$ を基本再生産数として定義すれば、実時間における成長率の閾値条件が定式化されると同時に世代的解釈が成り立つことを示している:

定理 3.4 Bacaër–Guernaoui による基本再生産数 R_0 の定義に関しては以下のような世代的解釈が成り立つ：

$$R_0 = r(K_\theta) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} \tag{3.18}$$

注意 1. 上記の議論とは別の議論によって、Bacaër and Ait Dads ([5]) は以下が成り立つことを示した：

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|i_m\|_Y} = r(K_\theta) \tag{3.19}$$

上記の結果は、世代的解釈としては不完全なものであるが、最近の論文において彼らは状態変数が有限次元である場合には、上記の "lim sup" が "lim"によって置き換えられること、すなわち世代的解釈が成り立つことを示した ([6])。次節で見るように、世代的解釈としては不完全であっても、(3.19) を導いた彼らの議論は、一般的な変動環境における基本再生産数の定義を導くヒントを与える点で、それ自体重要である。

注意 2. 本節では次世代作用素 K_θ を導くために Y 空間から Z 空間への 2 段階の集計化 ($Y \to Y_\theta \to Z$) をおこなったが、$Y \to Z$ という集計を一挙に遂行することもできる*9。ここでは、我々の理論的フレームに

*9 [6] も同様な計算をおこなっている.