

証明：(4.22) を満たす $v^*(t, a)$ は $U^*(s, t)$ と共立であることをしめそう。上記の考察から (4.22) をみたく $v^*(s)$ と、 $U(t, s)$ と共立な $p(t)$ に対して $\langle v^*(t), p(t) \rangle$ が時間によらないことを示せばよい。定義域を拡張して $a > \omega$ では $v^* = p = 0$ としておけば、

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^\infty v^*(t, a)p(t, a) \\ &= \int_0^\infty \int_a^\infty v^*(t+y-a, 0)M(t+y-a, y)L(y-a; t, a)dyL(a; t-a, 0)p(t-a, 0)da \\ &= \int_{-\infty}^t dz \int_{t-z}^\infty v^*(y+z, 0)M(y+z, y)L(y; z, 0)dyp(z, 0) \end{aligned}$$

そこで、

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \int_0^\infty v^*(y+t, 0)M(y+t, y)L(y; t, 0)dyp(t, 0) - \int_{-\infty}^t v^*(t, 0)M(t, t-z)p(z, 0)dz \\ &= v^*(t, 0) \left[p(t, 0) - \int_0^\infty M(t, a)p(t-a, 0)da \right] = 0 \end{aligned}$$

したがって (4.22) は十分条件である。逆に $v^*(s, a)$ が U^* と共立ならば後退方程式を満たすが、それを特性線に沿って解けば表現 (4.22) を得る。(証明終)

(4.22) において、境界値を $\phi^*(t) := v^*(t, 0)$ とおけば、

$$\phi^*(s) = \int_0^\infty \phi^*(s+y)\Psi(s+y, y)dy \quad (4.23)$$

を得る。ただし $a > \omega$ では $\Psi(t, a) = 0$ と拡張しておく。(4.23) から境界値が定まれば、それを (4.22) に投入して $v^*(t, a)$ が決定される。したがって、 $U^*(s, t)$ と共立な関数 $v^*(t, a)$ が存在するためには、ある $\phi^* \in L^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ が存在して (4.23) を満たせばよい。(4.23) はロトカの (同次) 積分方程式の共役方程式である。

上記の結果から、共役システムの指数関数解 $e^{-\lambda s}w^*(s, a)$ が存在するためには

$$\phi^*(s) = \int_0^\omega e^{-\lambda y}\phi^*(s+y)\Psi(s+y, y)dy \quad (4.24)$$

となる有界可測な $\phi^*(s)$ 存在すればよい。実際、そのような $\phi^*(s)$ を用いて、

$$w^*(s, a) = \int_a^\omega e^{-\lambda(y-a)}\phi^*(s+y-a)M(s+y-a, y)L(y-a; s, a)dy \quad (4.25)$$

と定義すれば、 $w^*(s, 0) = \phi^*(s)$ であり、 $e^{-\lambda s}w^*(s, a)$ は (4.22) を満たしている。

方程式 (4.24) は作用素

$$(K^*(\lambda)\phi^*)(s) := \int_0^\omega e^{-\lambda y}\phi^*(s+y)\Psi(s+y, y)dy$$

がちょうど 1 を固有値として持つことを意味している。従って K^* がコンパクトな正作用素であれば、前進システムの指数関数解と同様に、 $r(K^*(\lambda)) = 1$ となるような実数 λ_0 と、 $r(K^*(\lambda_0)) = 1$ に対応する正の固有関数 ϕ_0^* の存在が示される。周期系は明らかにそのような議論が成立する系であり、(4.23) を満たす周期関数が存在して、(4.25) から定まる周期的な X^* 値関数 $w_0^*(a, a)$ によって、 $e^{-\lambda_0 s}w_0^*(s, a)$ が指数関数解 (主要汎関数) になる。

またパラメータが時間に独立であれば、

$$(K^*(\lambda)\phi^*)(s) = \int_0^\omega e^{-\lambda y} \phi^*(s+y) \Psi(y) dy$$

であるから、正行列 $\int_0^\omega e^{-\lambda y} \Psi(y) dy$ が固有値 1 をもつような実数 λ_0 がただひとつ存在して、対応する左正固有ベクトルを ϕ_0^* 、

$$w^*(a) = \phi_0^* \int_a^\omega e^{-\lambda_0(y-a)} M(y) L(y-a; a) dy$$

とすれば、 $e^{-\lambda_0 s} w^*(a)$ が後退システムの指数関数解（主要汎関数）である。このとき $w^*(a)$ は多状態安定人口モデルにおける繁殖値 (reproductive value) に他ならない ([13])。

共役固有値問題 (4.19) が正の解をもつならば、その固有値 λ は固有値問題 (4.12) の正の固有関数に対応する固有値に等しい。それゆえ、共役システムの指数関数解がもたまるのであれば、そのパラメータ λ は必然的に前進システムの内的成長率に他ならない。

後退システムが弱エルゴード的であれば、時間区間 (s, ∞) において $U^*(s, t)$ と共立関数は定数倍を除いてただひとつ主要汎関数のみであった。それゆえ、もし指数関数解が存在すれば、それが主要汎関数であり、他の任意の解はその定数倍である。そこで、 $w^*(s, a)$ を変動環境下における繁殖値と定義できるであろう。

$p(t, a)$ を前進システムの解、 $e^{-\lambda t} w^*(t, a)$ を後進システムの指数関数解とすれば、補題 4.4 から

$$\langle e^{-\lambda t} w^*(t, \cdot), p(t, \cdot) \rangle = e^{-\lambda t} \langle w^*(t, \cdot), p(t, \cdot) \rangle = \langle w^*(0, \cdot), p(0, \cdot) \rangle$$

であるから、

$$V(t) := \langle w^*(t, \cdot), p(t, \cdot) \rangle = e^{\lambda t} V(0) \quad (4.26)$$

となる。これは安定人口モデルの総繁殖値に関する Fisher の定理の拡張に他ならない。このことは、指数関数解が存在すれば、一般の変動環境においても繁殖値理論を安定人口モデルの場合と同様に展開できるということを示している。

4.4 人口学的ポテンシャルと繁殖値

繁殖値概念は進化生物学において適応度を測る一つの尺度と考えられ、その変動環境のケースへの一般化は古くから生物学者の関心を引く問題であった ([18], [16])。

一方、人口学においては、ウィーン人口研究所の Ediev は一連の研究において、人口学的ポテンシャル (demographic potential) という概念を提唱し、それを繁殖値概念の一般化として考察している。 τ 年生まれの a 歳の人口学的ポテンシャル $c(a; \tau)$ は、次元の場合以下をみたす関数とされる ([9])^{*11} :

$$c(a; \tau) = \int_a^\infty c(0; \tau + y) m(\tau + y, y) \ell(y - a; a + \tau, a) dy$$

ただし、 $m(t, a)$, $\ell(x; t, a)$ は次元の出生率、生残率関数である。これは $c(a; \tau) = v^*(\tau + a, a)$ を意味している。それゆえ、Ediev の人口学的ポテンシャルは後退システムの解に他ならない。Ediev はまた時刻 t の全人口学的ポテンシャルを $\int_0^\infty c(a; t - a) p(t, a) da$ と定義して、これが時間的に一定であることを示しているが、

^{*11} Ediev の記号では (a, t) は生まれ時刻 t 、年齢 a 歳をあらわし、 $(a; t)$ は時刻 t での年齢 a を表しているが、ここで使用している記法とはちょうど逆であることに注意。

これは我々の補題 4.4 に他ならないが、発展システムとその共役に関して古くから知られていたことである ([3], [4], [12], [13])。

Bacaër and X. Abdurahman ([2]) は、周期系の共役システムの正の指数関数解の周期部分 $w^*(s, a)$ (共役固有値問題の正の固有関数) を周期的な人口システムの繁殖値と定義することを提唱したが、Ediev は以下のような別の定義を与えている^{*12} :

$$v_E(t, a) := \frac{v^*(t, a)}{v^*(t, 0)}$$

ここで v_E は Ediev の意味での繁殖値であるが、後退システムが弱エルゴード的で、指数関数解 $e^{-\lambda t} w^*(t, a)$ が存在するならば、すべての共立汎関数はそれに比例しているから、

$$v_E(t, a) = \frac{w^*(t, a)}{w^*(t, 0)}$$

であり、特に自律系 (安定人口モデル) では

$$v_E(t, a) = \frac{w^*(a)}{w^*(0)} = \int_a^\infty e^{-\lambda_0(y-a)} m(y) \frac{\ell(y)}{\ell(a)} dy$$

となって、ゼロ歳児の値が 1 になるように規格化された Fisher の繁殖値が得られる。しかしながら、 v_E による総繁殖値 $\langle v_E(t, \cdot), p(t, \cdot) \rangle$ は、非自律系においてはもはや指数関数的に変化はしない。しかし Ediev ([9]) が仮定したように (4.23) が定数解をもてば、すなわち次元のコーホートの特性関係

$$1 = \int_0^\omega e^{-\lambda y} m(s+y, y) \ell(y; s, 0) dy \quad (4.27)$$

がある λ に対してつねに成り立てば、 $w^*(t, 0) = \phi^* = \text{const.}$ であり、

$$V_E(t) := \langle v_E(t), p(t) \rangle = \frac{1}{w^*(t, 0)} \langle w^*(t), p(t) \rangle = \frac{1}{\phi^*} \langle w^*(0), p(0) \rangle e^{\lambda t} = V_E(0) e^{\lambda t}$$

という総繁殖値のマルサス法則を再び得る。

しかし Bacaër and Abdurahman が批判するように、コーホートの特性関係 (4.27) が成立するような、各コーホートに共通の不変なマルサスパラメータ λ が存在するという仮定は、変動環境下では現実には成り立つ可能性がきわめて低く、その意義は明らかではない。また出生時点での繁殖値が 1 になるように規格化することは、多状態の場合には意味がないし、そもそも Galindo ([7], [11]) が指摘したように、次元のケースでも必ずしも適切な規格化とはいえず、Fisher の本意でもなかった。実際、出生時点での繁殖値を 1 に規格化した場合は、同じコーホートの各年齢における繁殖値の相对比较をたやすくする意味はあるが、別種の人口の繁殖値を比較するためには不適切である。Ediev の定義は人口学的ポテンシャルと繁殖値を本質的に区別しないことから出てきているように思われる。実際、Ediev の過去の論文ではしばしば両者は混同されている。しかしながら、繁殖値は、人口の再生産力を成長率で割り引いて、いわばその現在価値を導くためのものであり、内的成長率の存在と総繁殖値のマルサス法則は繁殖値概念の拡張にとって無視できない前提であろう。ただし、純生物学的な観点からは、必ずしもマルサスの成長法則を前提としない繁殖値概念も提唱されている ([16])。

^{*12} ただし記号はすべて本論文のものを利用している。また Ediev はスカラーシステムしか考察していないので、ここではすべて次元である。

5 おわりに

本稿では、パラメータの時間的変動を考慮した一般線形年齢構造化人口モデルによって、少なくとも周期系に関しては古典的な安定人口モデルの基本概念が、その本質的な意味を失わない形で拡張できることを示した。

周期性を超えて全く一般の動態率をもつ人口システムに関しては、Thieme による発展半群とレゾルベント正作用素の理論によって、周期系と同様にある種の積分作用素のスペクトル半径が発展半群の成長上限の正負を決定することが示されているが、その基礎となる関数空間の生物学的人口学的意義は明らかではない。今後の課題としては、時間変動するパラメータをもつ周期系以外の系で、純再生産率と内的成長率の概念の拡張を許すような人口学的に意義のある系を見いだすことが考えられる。漸近的に自律的となるような一般化安定人口モデルはそのような系の候補であるかもしれない。

本研究は人口学の基本的理論的課題に答えようとするものであるが、先進諸国の人口問題との関わりからすれば、周期性条件等はなお制約的である。イースタリンサイクルや景気変動による周期性も理論的には考えられるが、実証的根拠はいまだに乏しい、一方、安定人口モデルは感染症に罹患した集団の初期成長を記述するモデルとして近年その重要性が再認識されてきている。その基本再生産数は感染症の流行を根絶計画の要であるが、この場合はパラメータの季節変動性はきわめて現実的な問題であり、実証的データも豊富であるから人口学的モデルの応用としては今後の発展が期待される。

参考文献

- [1] N. Bacaër and S. Guernaoui (2006), The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53: 421-436.
- [2] N. Bacaër and X. Abdurahman (2008), Resonance of the epidemic threshold in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 57: 649-673.
- [3] G. Birkhoff (1962), Uniformly semi-primitive multiplicative process, *Trans. Am. Math. Soc.* 104: 37-51.
- [4] G. Birkhoff (1965), Uniformly semi-primitive multiplicative process II, *J. Math. Mech.* 14(3): 507-512.
- [5] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. J. A. M. Heijmans and H. R. Thieme (1988), Perturbation theory for dual semigroups II. Time-dependent perturbations in sun-reflexive case, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 109A: 145-172.
- [6] A. J. Coale (1972), *The Growth and Structure of Human Populations*, Princeton UP, Princeton.
- [7] J. F. Crow (2002), Perspective: Here's to Fisher, additive genetic variance, and the fundamental theorem of natural selection, *Evolution*: 56(7): 1313-1316.
- [8] K. Deimling (1985), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] D. M. Ediev (2007), On an extension of R. A. Fisher's result on the dynamics of the reproductive value, *Theor. Popul. Biol.* 72: 480-484.
- [10] D. M. Ediev (2009), On the definition of the reproductive value: response to the discussion by Bacaer and Abdurahman, *J. Math. Biol.* 59: 651-657.

- [11] C. Galindo (2007), On Fisher's reproductive value and Lotka's stable population, Paper presented at annual meeting of PAA.
- [12] H. Inaba (1989), Weak ergodicity of population evolution processes, *Math. Biosci.* 96: 195-219.
- [13] 稲葉 寿 (2002), 「数理人口学」, 東京大学出版会, 東京.
- [14] H. Inaba (2010), The net reproduction rate and the type-reproduction number in multiregional demography, to appear in *Vienna Yearbook of Population Research 2009*.
- [15] P. Michel, S. Mischler and B. Perthame (2005), General relative entropy inequality: an illustration on growth models, *J. Math. Pures Appl.* 84: 1235-1260.
- [16] 太田 邦昌 (1973), 世代の重なる生物集団の成長諸特性 (2), *生物科学* 第25巻第3号: 163-168.
- [17] H. R. Thieme (2009), Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.* 70(1): 188-211.
- [18] J. H. Vandermeer (1968), Reproductive value in a population of arbitrary age distribution, *The American Naturalist* Vol. 102, No. 928: 586-589.
- [19] W. Wang and X. Q. Zhao (2008), Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments, *J. Dyn. Diff. Equat.* 20: 699-717.
- [20] F. Zhang and X. Q. Zhao (2007), A periodic epidemic model in a patchy environment, *J. Math. Anal. Appl.* 325: 496-516.

2 死亡率推計モデルにおける年齢変換アプローチの応用

石井 太

はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成 18 年 12 月推計）」（国立社会保障・人口問題研究所 2007）の将来生命表作成にあたっては、現在国際的に標準的な方法とされ、平成 14 年 1 月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えた「年齢シフトモデル」により死亡率の投影を行った（石井 2008）。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線をあてはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

この年齢シフトモデルは、死亡率のモデリングに際し、単なる年齢軸のシフト（平行移動）のみならず、年齢スケールの変換をも同時に組み合わせていることから、理論的にはより一般的な「年齢変換」という概念を用いることで統一的に扱うことができることを昨年度の研究で示した。しかしながら、実際のモデリングにあたっては、いかに有効な年齢変換を定義できるかということが問題であり、そのためには、対象となるデータの特性に立ち返って考えることが必要となる。昨年度の研究において、年齢変換の概念から年齢シフトモデルを理論的に整理した際、基礎となっていたデータ特性とは、わが国の高齢死亡率をロジスティック曲線にあてはめた場合のパラメータから観察されたものであった。すなわち、わが国では 1950 年以降、年齢シフト量（横方向への動き）を表すパラメータ S_t が大きく増加しているという特性が観察されたことから、ロジスティック曲線のパラメータを用いることで有効な年齢変換の定義を導いたのである。

本研究は、これまでとは異なる角度から、わが国の死亡率モデルに対する有効な年齢変換を定義するための基礎的な検討を行うことを目的とする。議論は以下のように進められる。まず、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証することを通じ、わが国の死亡データ特性に関する再検討を行う。この目的のため、成年死亡率のモデリングに焦点を絞り、既存のモデルに新たに提案するモデルを加えた 5 つの死亡モデルを比較・検証する。この議論の中では、死亡モデルの微分型表示が本質的な役割を果たすこととなるが、この表示を利用すると、対数死亡率曲面上の接ベクトル場として年齢変換が定義されることを述べる。また、年齢シフトモデルのロジスティック曲線パラメータによる年齢変換と、新たなモデルによ

る接ベクトル場としての年齢変換の関係について述べる。

1 対数死亡率曲面の2つの表示方法

本節では、対数死亡率曲面の2つの表示方法、及び対数死亡率とその逆関数についてまとめ、次節以降の死亡モデルで用いられる微分型表示に関する準備を行う。

$X = [0, +\infty)$ を年齢、 $T = (-\infty, +\infty)$ を時間を表す変数とする。以下の死亡モデリングの議論においては、年齢 $x \in X$ 、時刻 $t \in T$ における死力関数 $\mu_{x,t}$ を用いる。また、本稿においては、

$$y = \lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t}$$

で死力の対数を表すこととする。ここで、 $y \in Y = (-\infty, +\infty)$ は対数死力関数の値を表す。このとき、 S を、

$$S = \{(x, t, y) | y = \lambda_{x,t}\}$$

とすると、これにより、 \mathbb{R}^3 における曲面が定義される。これを、対数死亡率曲面 (the log mortality surface) と呼ぶことにする。これは、対数死亡率曲面の一般的な表示方法である。この表示方法において、 $y = \lambda_{x,t}$ は、 \mathbb{R}^3 の中で、 X - T 平面からの高さで捉えることができる。

ここで、一定の仮定の下で、対数死亡率曲面の別の表示方法について考えよう。

以下、 $\lambda_{x,t}$ は、 $X_0 \times T_0 = [0, \omega] \times [t_0, t_1] \subset X \times T$ 上で定義された、 x と t に関する滑らかで連続な関数であると仮定する。ただし、 $\omega < +\infty$ は死亡率モデルを考える上でのある有限な年齢の最大値とする。

成人死亡率のモデリングにあたっては、さらに、 $\lambda_{x,t}$ は各 t について、 $x > x_0(t)$ の範囲で x について狭義単調増加であると仮定してよい。ここで、 $x_0(t)$ は各 t について、 $\lambda_{x,t}$ が狭義単調増加関数となる x の下限値を示す。このとき、各 t に対して、関数 $\lambda_t(x)$

$$\lambda_t : \tilde{X}_t \rightarrow Y, \quad \lambda_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{x,t}$$

は x について単射である。ただし、 $\tilde{X}_t = [x_0(t), \omega]$ である。 $\tilde{Y}_t = \lambda_t(\tilde{X}_t)$ とすると、関数 $\lambda_t(x) : \tilde{X}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$ は各 t について、 \tilde{Y}_t 上で定義される逆関数 $\nu_t(y) : \tilde{Y}_t \rightarrow \tilde{X}_t$ を持つ。

そこで、 Y_0 を以下のように定義する*1。

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} [y_0, y_1] \quad \text{ただし} \quad y_0 = \sup_{t \in T_0} \min \tilde{Y}_t, \quad y_1 = \inf_{t \in T_0} \max \tilde{Y}_t,$$

このとき、 $\nu_{y,t} : Y_0 \times T_0 \rightarrow X_0$ を

$$\nu_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_t(y)$$

*1 $x_0(t)$ は必ずしも連続とは限らないため、 $\{\min \tilde{Y}_t | t \in T_0\}$ には最大値がない可能性もある。

により定義する。 $v_{y,t}$ は、時刻 t における対数死力関数の値が y となるような年齢 x を示している。

さらに、これらの関数の時間微分から、以下の2つの関数を定義する。すなわち、(1) $\rho_{x,t}$: 死力改善率と (2) $\tau_{y,t}$: 年齢増加率である。これらは後述する死亡モデルの微分型表示において用いられる。

$$\rho_{x,t} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \lambda_{x,t}}{\partial t} = -\frac{\partial \log \mu_{x,t}}{\partial t}$$

$$\tau_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_{y,t}}{\partial t}$$

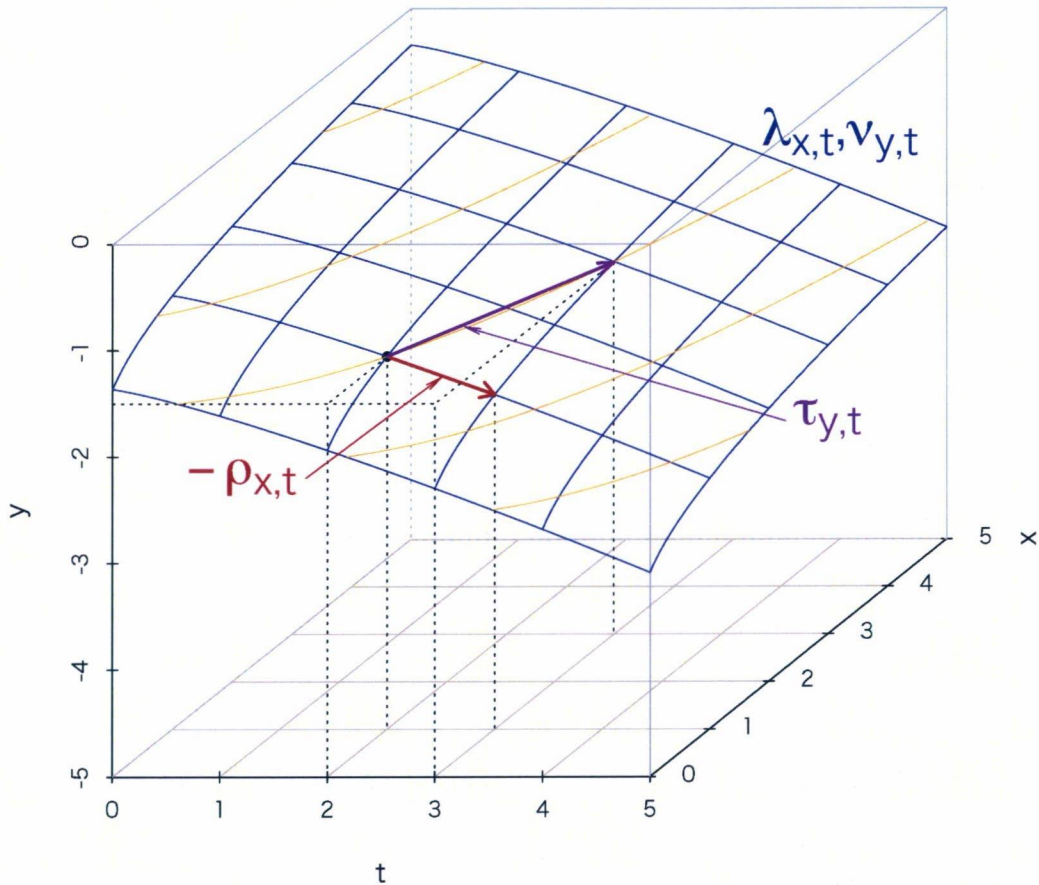


図1 Log Mortality Surface and Two Differential Functions

図1は、対数死亡率曲面と上記の二関数を模式的に示した例である。青い線は通常の表

示法による対数死亡率曲面を示したものの、すなわち、X-T 平面から $\lambda_{x,t}$ によって定まる曲面の高さによる表示である。黒い点は対数死亡率曲面上の点 $(x, t, y) = (1, 2, -1.5)$ を示しており、これは、 $(x, t) = (1, 2)$ の時の X-T 平面からの高さが -1.5 であると理解される。ここで、 x を固定したままこの曲面を移動すると、茶色の矢印に示される通り、 $t = 3$ のときの X-T 平面からの高さは -1.86 に減少する。この 2 つの高さの差が $-\rho_{x,t}$ に対応する。

一方、対数死亡率曲面は $\nu_{y,t}$ によって定まる Y-T 平面からの高さとしても表される。この観点からは、黒い点は $(y, t) = (-1.5, 2)$ の時の高さが 1 というふうに理解される。オレンジの線は y を固定した時の曲面上の等高線を表したものであり、 y を固定したときは、この線に沿って曲面上を移動することになる。再度、黒い点から今度は y を固定して移動すると、図の紫色の矢印で示されているように、 $t = 3$ の時は Y-T 平面からの高さは 3 となる。この 2 つの高さの差が $\tau_{y,t}$ に対応する。

2 4つの死亡モデルの定義とその微分型表示

本節においては、わが国の高齢死亡率改善を、死亡率の「低下」として捉えるべきなのか、「シフト」として捉えるべきなのか、改めて検証する観点から、「低下」型で死亡率改善を表すモデルとして、プロポーショナルハザードモデル、リー・カーター・モデルの 2 モデルの定義を述べるとともに、これら 2 つのモデルに対応する「シフト」型モデルである、水平シフトモデルと水平リー・カーター・モデルの 2 モデルを導入し、全部で 4 つの死亡モデルを定義する。また同時に、これらの死亡モデルを、時間微分した関数により表示する微分型表示を導入し、後の議論の準備を行う。

2.1 プロポーショナルハザードモデル (PH)

プロポーショナルハザードモデル (以下、PH) は、死亡率改善を「低下」型として表現する単純なモデルである。PH モデルでは $\lambda_{x,t}$: 時刻 t における死力が、

$$\lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t} = a_x + k_t$$

と表される。ここで、 a_x は基準となる対数死力関数である。この式によれば、PH モデルでは、各時点における対数死力関数が、基準となる死力関数に定数を加えて表現されていることから、死亡率の改善局面においては、全年齢の死力が一律に「低下」という仮定に基づいて死力関数がモデル化されていることになる。

ところで、ここでいう「死亡率の改善」とは死力関数の時間的変化であり、死亡率を「低下」で表現するといった場合、モデル式自体を時間的変化から特徴づけるということは自然な発想である。そこで、対数死力関数を直接表示するのではなく、対数死力関数を時間微分した死力改善率を用いて死亡モデルを表現することを考え、これを微分型表示と呼ぶこととする。

PH モデルにおいては、上式を t で微分することにより、 $\rho_{x,t}$:死力改善率は、

$$\rho_{x,t} = -\frac{dk_t}{dt} = -k'_t$$

と表される。これは、各 t において $\rho_{x,t}$ が x についての定数関数となることを表しており、これが PH モデルの微分型表示による表現となる。

2.2 リー・カーター・モデル (LC)

リー・カーター・モデル (以下、LC) は、PH モデルよりも一般的な形で死亡率改善を「低下」型として表現するモデルである (Lee and Carter 1992)。LC モデルは以下の式により表される。

$$\lambda_{x,t} = \log \mu_{x,t} = a_x + k_t b_x$$

ここで、 a_x は標準的な死亡パターンを表す。 k_t は、死亡指数とも呼ばれ、死亡の一般的水準を表すパラメータであり、 b_x は k_t が変化する時の年齢別死亡率の変化を表すパラメータとなる。

両辺の時間微分を行うことにより、LC モデルの微分型表示を得る。

$$\rho_{x,t} = -\frac{dk_t}{dt} b_x = -k'_t b_x$$

これは、LC モデルにおいては、各 t について $\rho_{x,t}$ の年齢分布が一定となることを示す。

ここで、さらに k_t が t に関して線形な関数である場合を考えると、 k'_t は定数となり、 $\rho_{x,t}$ は t について定数関数となる。すなわち、死亡の一般的水準の改善スピードが一定という状況の下では、LC モデルは年齢別の死力改善率が一定であるとみなされる時、すなわち、死亡率改善が「低下」型であると考えられる時に、死亡率をよく表現するモデルであるといえる。

2.3 水平シフトモデル (HS)

次に、死亡率改善を「シフト」型により表現するモデルの議論に移る。「シフト」型による最も単純なモデルは、対数死力率曲線全体がそのまま高齢方向へと移動するものである。このモデルは対数死力の逆関数 $v_{y,t}$ を用いて表現すれば、 $v_{y,t}$ に関するプロポーショナルハザードモデルであるということが出来る。

本稿においてはこのモデルを水平シフトモデル (以下、HS) と呼ぶこととする。HS モデルは、PH モデルと同様に、以下のような式で表すことができる。

$$v_{y,t} = a_y + k_t$$

これは、微分型表示では、

$$\tau_{y,t} = \frac{dk_t}{dt} = k'_t$$

と書ける。

2.4 水平リー・カーター・モデル (HL)

年齢毎に異なる死亡率改善度合が設定でき、PH モデルに比べてより一般的なフレームワークを持つモデルとして LC モデルを考えたのと同様に、より一般的なシフティングに関する特徴を持つモデルとして、 $v_{y,t}$ についてのリー・カーター・モデルを考えることができる。これを、水平リー・カーター・モデル (以下、HL) と呼ぶことにしよう。HL モデルは、LC モデルの表示と同様に、以下のように表すことができる。

$$v_{y,t} = a_y + k_t b_y$$

さらに両辺を t で微分することにより、微分型表示

$$\tau_{y,t} = \frac{dk_t}{dt} b_y = -k'_t b_y$$

を得る。

3 モデルの数値評価

本節では、これまでに述べた 4 つのモデルに日本女性の死亡率をあてはめ、パラメータ推定を行って、比較を行うこととする。数値評価にあたっては、連続型ではなく離散型で行う必要があるため、以下の評価においては、死力関数の近似として、Human Mortality Database (Human Mortality Database) における中央死亡率

$$m_{x,t_c}, \quad x = x_s (= 25), \dots, x_e (= 110) \quad \text{and} \quad t_c = t_s (= 1970), \dots, t_e (= 2007)$$

を用いることとする。ここで、連続型の $m_{x,t}$ は、時刻 t においてちょうど x 歳の死亡率を表すのに対し、離散型の m_{x,t_c} は、ある暦年 t_c における、年齢 $[x, x+1)$ 歳の中央死亡率を表している点に注意が必要である。このため、離散型における m_{x,t_c} は、連続型の $\mu_{x+0.5,t_c+0.5}$ の近似となる。

数値評価にあたり、関数 $v_{y,t}$ は

$$\begin{aligned} y &= y_s, y_s + 0.05, \dots, y_e - 0.05, y_e \\ &= -7.1, -7.05, \dots, -0.50, -0.45 \end{aligned}$$

に対応する年齢 x を線形補間によって求めることによって推定した。

また、離散型表示における ρ_{x,t_c} と τ_{y,t_c} の時間微分については、数値の安定性の観点から以下のような近似を用いた。

$$\rho_{x,t_c} \approx -\frac{\lambda_{x,t_c+2} - \lambda_{x,t_c-2}}{4}$$

$$\tau_{y,t_c} \approx \frac{v_{y,t_c+2} - v_{y,t_c-2}}{4}$$

3.1 プロポーショナルハザードモデル (PH)

PH モデルの評価にあたり、 a_x として、対数死力関数の全期間における平均値をとった。すなわち、

$$a_x = \frac{1}{t_e - t_s + 1} \sum_{t_c=t_s}^{t_e} \lambda_{x,t_c}$$

である。

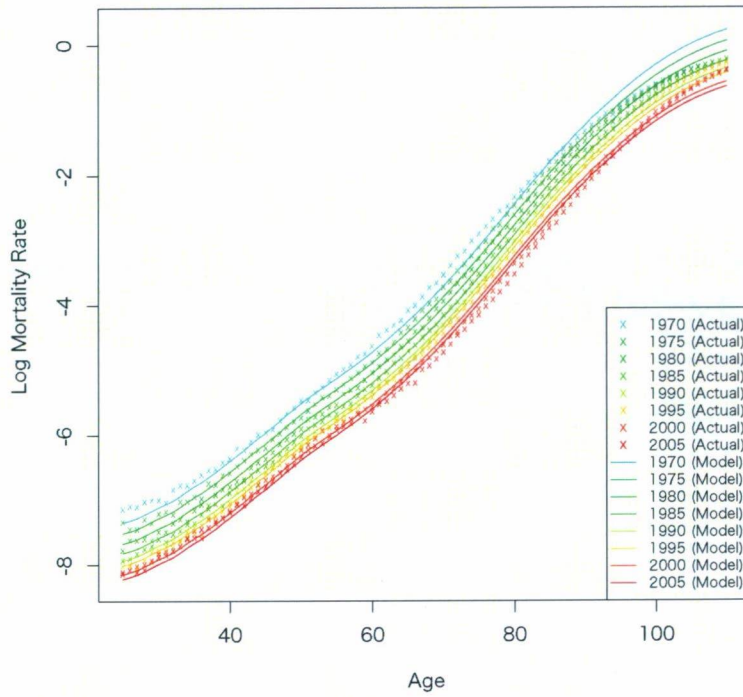
このとき、パラメータ k_{t_c} は、最小二乗法により、以下のように推定される。

$$k_{t_c} = \frac{1}{x_e - x_s + 1} \sum_{x=x_s}^{x_e} (\lambda_{x,t_c} - a_x)$$

図2は、対数死力関数 (λ_{x,t_c}) の実績値と PH モデルによる推定値を示したものである。この図から、モデルによる推定値は高齢部分で実績値へのあてはまりが悪いことが読み取れる。

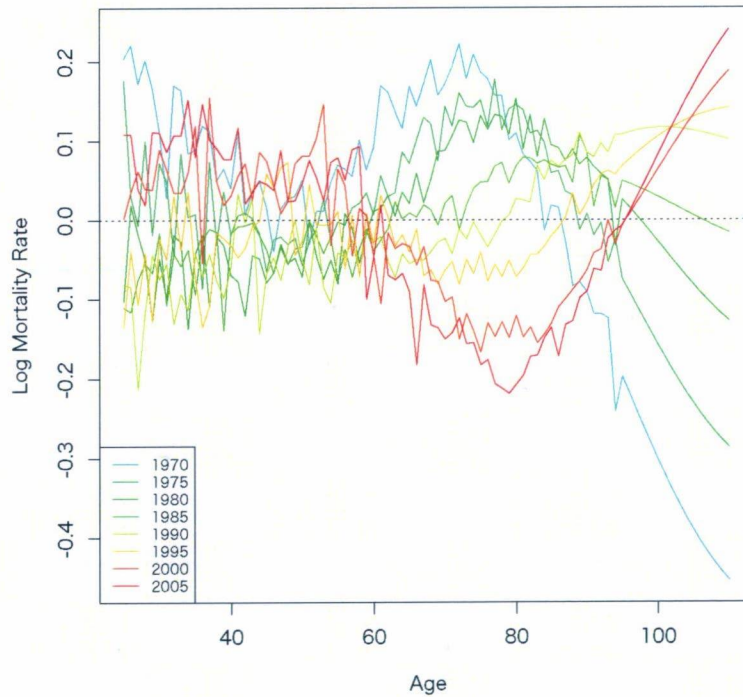
図3は、実績値からモデルによる推定値を差し引くことにより、両者の乖離度合を示したものである。このグラフより、1970年では60歳から80歳のところで実績値はモデルに比べて高い値となっているが、時間の経過に伴って低くなることがわかる。しかしながら、90歳以上においてはこれとは反対の傾向が見られる。これは、60歳から80歳においては死力改善率の実績値がモデルによる推定値より大きい一方で、90歳以上では小さいことによるものであり、死力改善率が年齢に関して定数であるという PH モデルの制約条件に起因するものである。

Mortality Rates (Actual and Model, PH)



☒ 2 Mortality Rates (Actual and Model, PH)

Difference of Mortality Rates (Actual - Model, PH)



☒ 3 Difference of Mortality Rates (Actual - Model, PH)

3.2 リー・カーター・モデル (LC)

LCモデルについても、 a_x として全期間における平均値をとった。すなわち、

$$a_x = \frac{1}{t_e - t_s + 1} \sum_{t_c=t_s}^{t_e} \lambda_{x,t_c}$$

である。

パラメータ k_{t_c} 、 b_x は以下のようにして推定される。

行列 $\lambda_{x,t_c} - a_x$ の特異値分解 (SVD) を

$$\lambda_{x,t_c} - a_x = \sum_i u_{xi} q_i v_{t_c i} \quad (q_1 \geq q_2 \geq \dots)$$

と表す。このとき、まず、

$$\tilde{k}_{t_c} = q_1 v_{t_c 1}$$

$$\tilde{b}_x = u_{x1}$$

と置き、これを以下のように変換することによりパラメータ推定を行う。

$$k_{t_c} = \tilde{k}_{t_c} \frac{t_e - t_s}{\tilde{k}_{t_e} - \tilde{k}_{t_s}}$$

$$b_x = \tilde{b}_x \frac{\tilde{k}_{t_e} - \tilde{k}_{t_s}}{t_e - t_s}$$

図4は対数死力関数 (λ_{x,t_c}) の実績値とLCモデルによる推定値を示したものである。この図より、LCモデルでは、PHモデルに比べて実績値へのあてはまりがかなり改善していることがわかる。これは、LCモデルが年齢毎に異なった死力改善率を持つことが可能であることによるものである。

しかしながら、図5を見ると、若年層における実績値とモデルによる推計値との差は、データ範囲の最初と最後の年の近辺では高く、中間では低くなるという傾向が、また、高齢層ではこれとは逆の傾向が生じていることがわかる。

このような誤差項の傾向は、年齢別死力改善率の年齢分布が時間の経過に応じて変化していることに関連していると考えられる。そこで、次に、ここまで見た2つのモデルの $\rho_{x,t}$ ：死力改善率をより詳しく見てみることにしよう。

Mortality Rates (Actual and Model, LC)

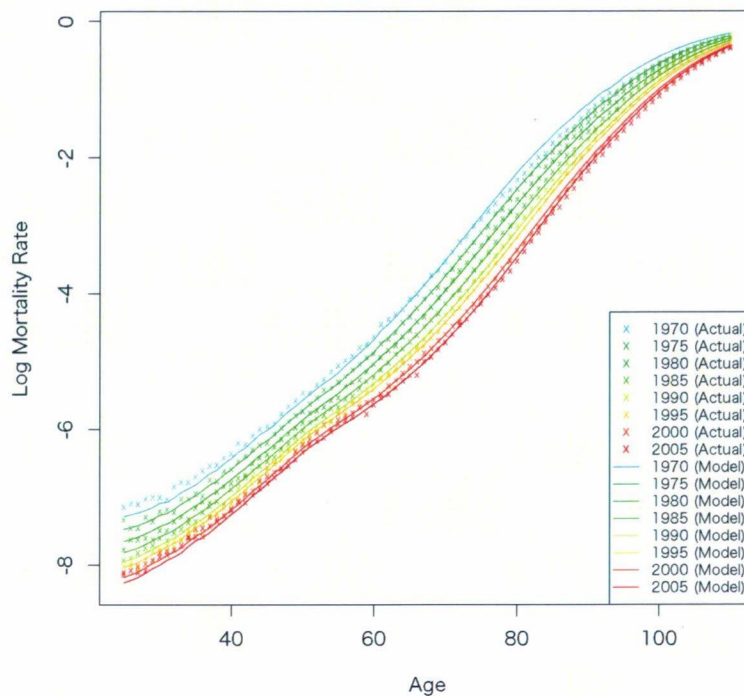


图 4 Mortality Rates (Actual and Model, LC)

Difference of Mortality Rates (Actual - Model, LC)

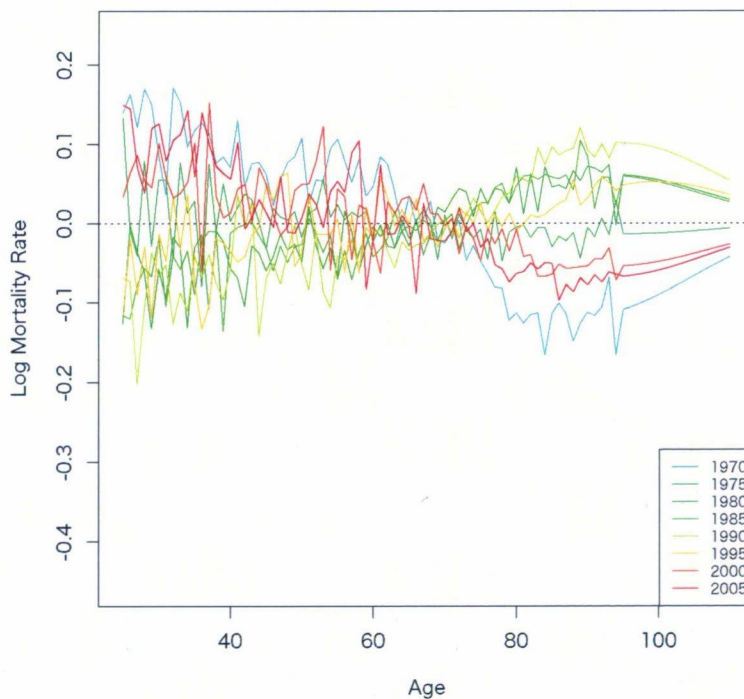


图 5 Difference of Mortality Rates (Actual - Model, LC)

3.3 死力改善率の比較

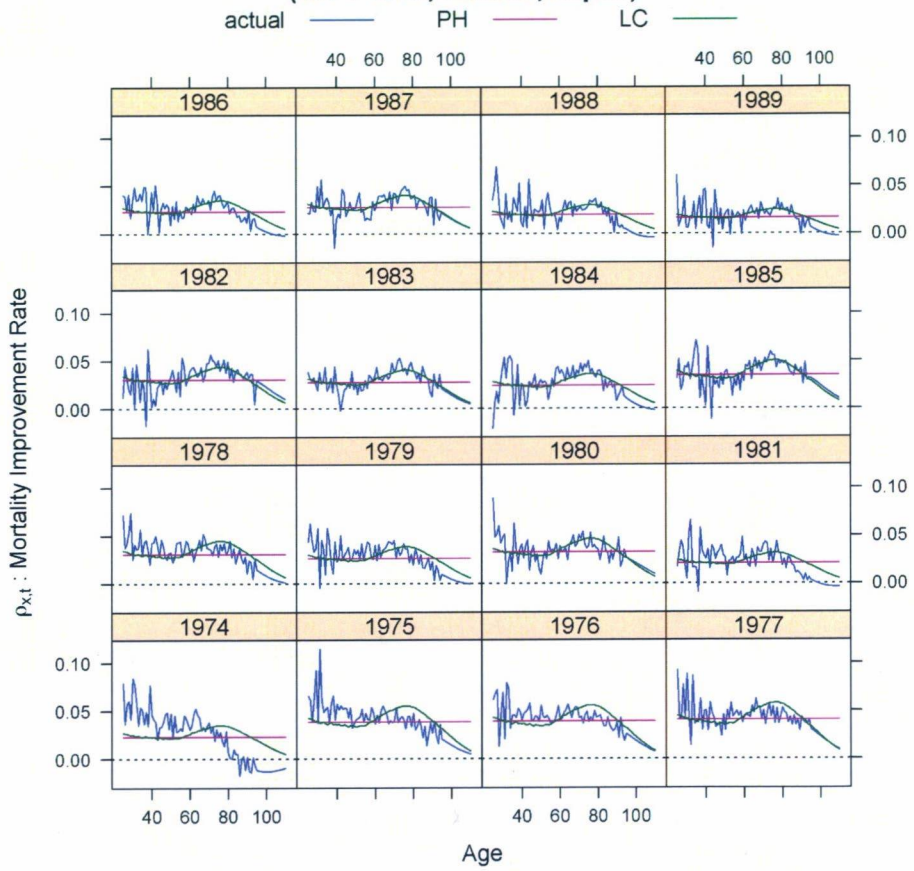
図6、7は、2つのモデルについて、実績値とモデルによる推定値に基づく ρ_{x,t_c} : 死力改善率を示したものである。1974年から1989年についての死力改善率を図6に、1990年から2005年についてを図7に示している。これらの図から、 ρ_{x,t_c} の2つのモデル値と実績値の時系列変化を見ることができる。

青い線は実績値に基づく ρ_{x,t_c} である。死力改善率の実績値は、概ねピークを持つ山形の形状をしていることがわかる。しかしながら、PHモデルによる死力改善率は、各 t について定数関数であることから、ピンク色の線で示されているように横軸に水平な直線となっている。この形状の違いが、先に見たような、PHモデルによる推定値と実績値との乖離を引き起こしたとみることができる。

一方、LCモデルによる死力改善率は緑色の線で表されているが、こちらは実績値と同様にピークを持った山形の形状となっており、これがPHモデルに比べて実績値へのあてはまりが改善した要因となっている。しかしながら、LCモデルの死力改善率の年齢分布は固定されている一方で、実績値の分布は変動している。例えば、1995年前後の死力改善率を比較すると、高齢における実績値の改善率はモデルによる推定値よりも高く、ピークもより右の方に位置している。

このように、死力改善率の年齢分布の実績値は、時間の経過に応じて変化しており、LCモデルの仮定のように一定とはなっていない。そして、このことが図5において観察された、LCモデルの誤差項に見られた傾向を導いているのである。このことは、LCモデルのように死亡率改善を「低下」型として捉えるモデルの一つの限界を示しているともできる。

Comparison of Mortality Improvement Rates (1974-1989, Female, Japan)



☒ 6 Comparison of Mortality Improvement Rates (1974-1989)

**Comparison of Mortality Improvement Rates
(1990-2005, Female, Japan)**

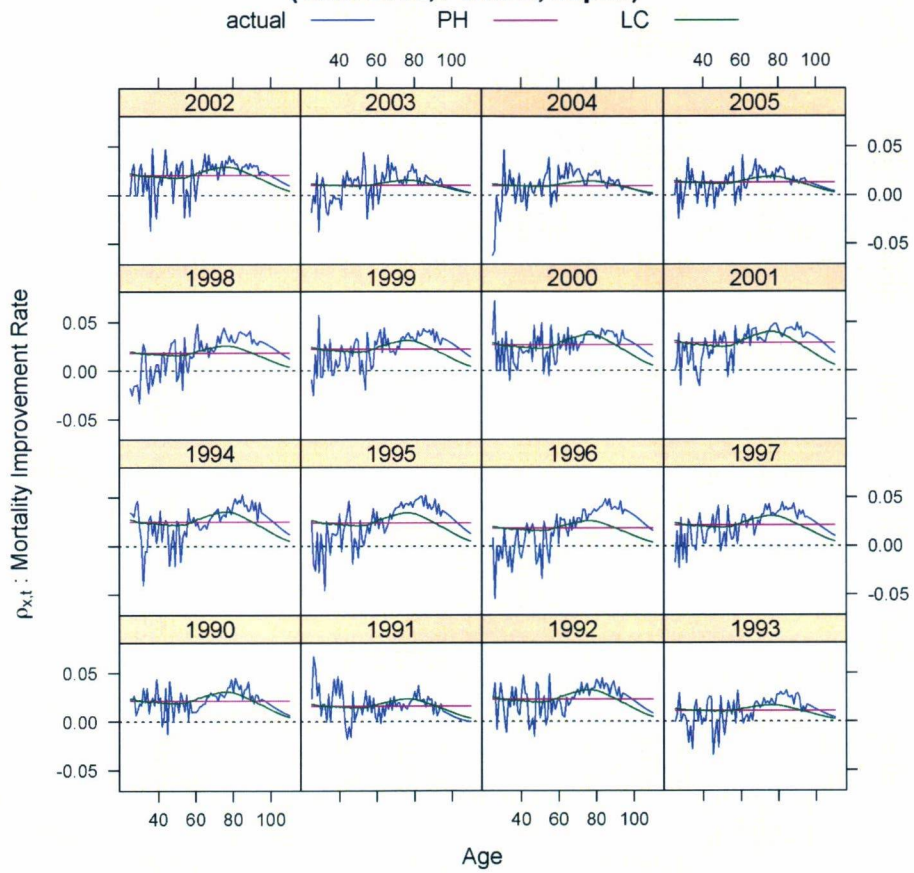


図 7 Comparison of Mortality Improvement Rates (1990-2005)

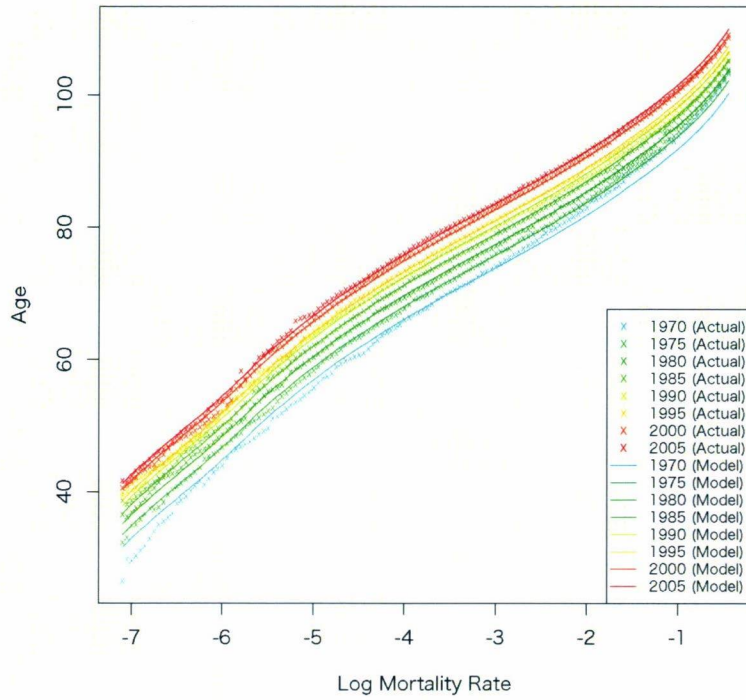
3.4 HS モデルと HL モデル

HS モデルと HL モデルに対するパラメータ推定は、 λ_{x,t_c} の代わりに ν_{y,t_c} に対して適用する点以外は完全に PH モデル、LC モデルと同様に行うことができる。図 8、9 は、死力逆関数 (ν_{y,t_c}) の実績値と PH モデルによる推定値、及び実績値と推定値の乖離を示したものである。また、図 10、11 は、HL モデルに対する同様の図を示したものである。

まず、HS モデルの評価結果からわかることは、HS モデルは PH モデルと同じ構造を持っているにもかかわらず、そのあてはまりは PH モデルよりもかなりよいことである。もちろん、HS モデルでもライトブルーの線で示された 1970 年では若年層で実績値の方がかなり高く、高齢層では逆に低くなっていることが観察されるが、それ以外の年次についての誤差はそれほど大きいものとはなっていない。

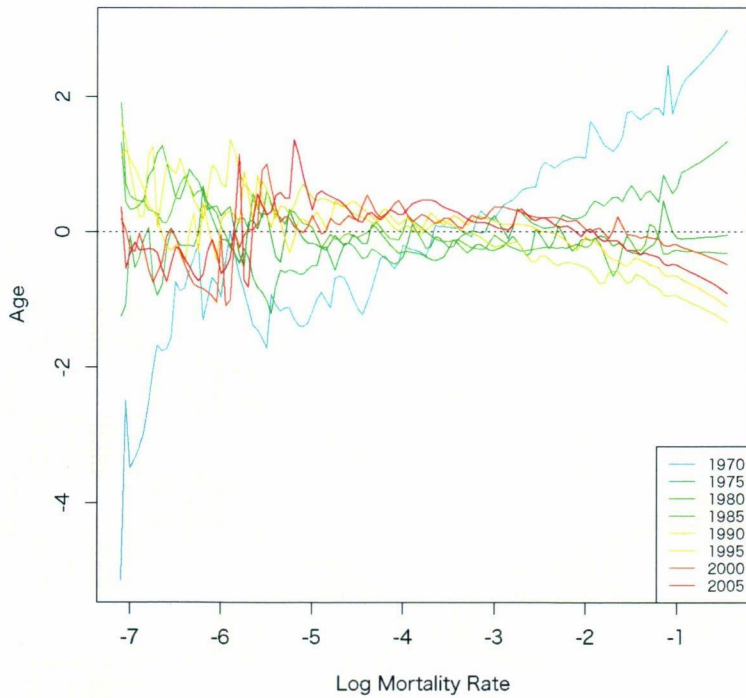
次に HL モデルの結果を見てみると、HL モデルは HS モデルに比べて、全体的にあてはまりが改善していることがわかる。特に、HS モデルで誤差が大きかった 1970 年でのあてはまりも改善している。しかしながら、同時に、「低下」型のペアのあてはまりの違いほど、「シフト」型モデルのあてはまりの違いが大きくないように見える。すなわち、PH モデルにおいては死力改善率が各年次において年齢の定数関数となっているという制約条件が強く、この制約条件が LC モデルにおいて緩和されたことによるフィッティングのパフォーマンス向上が大きいものであったのに対し、HS モデルで年齢増加率が定数関数となっている制約を HL モデルにおいて緩和しても、大きなパフォーマンス向上に繋がっていないということである。この違いを詳細に分析するためには、 τ_{y,t_c} : 年齢増加率を観察する必要がある。そこで、次節において、HS モデル、HL モデルの年齢増加率の違いを見てみることにする。

Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)



☒ 8 Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)

Difference of Inverse Mortality Rates (Actual - Model, HS)



☒ 9 Difference of Inverse Mortality Rates (Actual and Model, HS)