E．結論（政策含意含む）

出生、死亡に関する指標と異なり、国際人口移動関連の統計は精緻な人口分析を可能にする十分な整備がなされていないことから、緊急に整備が求められる。

将来推計の客観性を担保するためには、今後国際人口移動に関する仮定設定に理論的整合性を伴う指標の検討も必要である。そのためには今回の研究成果をもとにして、今後、性、年齢といった人口における基本属性別の分析と実用性について発展的に検証を続ける必要がある。

F．研究発表（予定含む）

1．論文発表

なし

2．学会発表

○石川晃「行政記録に基づく人口統計の現状と課題」第61回日本人口学会 於：関西大学（2009年6月）

○石川晃「将来人口推計における国際人口移動仮定方法の検討」第62回日本人口学会 於：お茶の水女子大学（2010年6月予定）

G．知的所有権の取得状況

なし

厚生労働科学研究費補助金（政策科学推進研究事業）
分担研究報告書

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「2005年以降の合計特殊出生率上昇に関する要因分析」

研究分担者　岩澤美帆　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨
本研究は、2005年以降の日本における合計出生率の反転上昇の要因を探索することを目的としている。この上昇を説明する要因として、同様に出生率の反転を経験している欧州の超低出生率国において注目されている、(1)テンポ効果の消滅、(2)移民（外国人）による貢献、(3)経済の回復、(4)両立支援策の各効果に着目し、都道府県別データを用いた重み付き回帰モデル、および誤差項に空間自己相関が観察される場合には、空間自己回帰項を明示的にモデル化した重み付き空間誤差モデルを用いて検証した。全子および出生順位別の合計出生率の2005年～2008年間の変化を説明する変数として、(1)同期間における高年齢出生率の変化と(2)母外国人の出生率の変化、(3)2002～2007年の有業率（失業率の余数）の変化および(4)核家族世帯に住む未就学児を持つ母親の有業率変化を用いた。また、家族主義的文化を示す固定効果として、(5)2005年の未就学児のいる世帯の拡大家族割合を用いた。推定されたモデルを使い、2005年～2008年までの合計出生率の上昇分に対する各要因の寄与を求めたところ、高年齢出生率変化が72%、母外国人出生率変化が11%、有業率変化が11%、母親の有業率変化がマイナス12%の寄与を示した。外国人女性の減少や景気の悪化など、短期的な社会経済状況の変化によって、合計出生率が再び低下に転じる可能性が示唆される一方で、日本においても晩産によるキャッチアップが定着しつつあり、テンポ効果消滅による合計出生率の緩やかな上昇が期待できる側面もあることがわかった。ただし、こうしたキャッチアップ行動が定着するかどうかは、仕事と子育ての両立を期待して出産に踏み切った親たちが期待通りの生活を実現できるかにかかっている側面もあり、両立支援策の推進実態を注意深く見ていく必要がある。

A．研究目的

2003年～2005年にかけて、日本の合計出生率は1.3を下回ったが、こうした水準が晩産化の過程における一時的なものなのか、本格的な完結出生児数の低下に結びつく行動変化なのかを見極めることは、将来人口推計の重要な仮定値である出生率の見通しにとって大変重要である。実際2005年以降、合計出生率が反転上昇しており、その要因を特定することが鍵となる。そこで本研究では、2005年以降の合計出生率の反転がど

のような要因によって説明されるのかを、都道府県別のデータの合計出生率の変化量を説明するモデルを利用して明らかにすることを試みた。要因については、近年、日本と同様に合計出生率が上昇している、かつての超低出生力地域に関して指摘されている、(1)テンポ効果の消滅、(2)移民(外国人)による貢献、(3)経済の回復、(4)両立支援策の各効果に着目した。また、イタリアでは、家族主義的文化が強い地域ほど出生率の回復が弱いといった知見が明らかになっているので、日本についても(5)家族主義的文化が近年の出生率上昇にどう影響しているのかを検証した。

B．研究方法

都道府県別の合計出生率の変化が、都道府県別の各要因の変化で説明される回帰モデルを使い、各要因の効果を推定した。都道府県別のデータを使うにあたっては、以下の二点に着目することにより、手法を選択した。一つ目の点は、地域のデータは、しばしば隣接する地域で相関が高くなる空間相関の特徴をもつということである。最小二乗法による回帰モデルは、誤差項に強い空間相関がある場合、推定量が歪むことが知られている。そこで、誤差項の空間相関を明示的にモデル化した空間誤差モデルを利用した。二つ目の留意点は、日本における都道府県は人口規模が大きく違うため、各都道府県の全国の動向への寄与が等しいという前提は現実的ではないということである。そこで、最小二乗法による回帰分析および空間誤差モデルを推定する際には、各都道府県における再生産年齢（15-49 歳）の女子人口を重みとして使用した。モデルは全子の合計出生率および出生順位別合計出生率の 2005 年～2008 年の変化について、それぞれ推定した。

(1)テンポ効果の消滅、(2)移民(外国人)による貢献、(3)経済の回復、(4)両立支援策の各効果および(5)家族主義的文化の影響を検証する説明変数については以下を用いた。

(1)2005 年～2008 年における高年齢出生率の変化、(2)2005 年～2008 年における母外国人の出生率の変化、(3)2002～2007 年の有業率（失業率の余数）の変化、(4)核家族世帯に住む未就学児を持つ母親の有業率変化、(5) 2005 年の未就学児のいる世帯の拡大家族割合(固定効果)である。

推定されたモデルも用い、全国値の各要因変化をつかって予測値を計算することによって、それぞれの要因の寄与を明らかにした。

C．研究成果

従属変数である全子および第 1 子～第 4 子の合計出生率の変化分についての空間相関を検証したところ、モランの I 統計量はいずれも有意であり、空間相関の構造をもっていることがわかった。

重み付き最小二乗法による回帰モデルおよび重み付き空間誤差モデルによる推定結果は以下のようにまとめられる。第 1 子については、高年齢出生率(+)、母外国人出生率(+)、有業率(+)、母親有業率(-)が統計的に有意な関係を示した。第 2 子については、高年齢出生率(+)、母外国人出生率(+)、拡大家族割合(-)が統計的に有意な関係を示した。第 3 子については、高年齢出生率(+)と拡大家族割合(+)が統計的に有意な関係を示した。第 4 子以上については、高年齢出生率(+)、母外国人出生率(+)、母親有業率(-)、拡大家族割合(+)が統計的に有意な関係を示した。そして全子については高齢出生率(+)、母外国人出生率(+)、母親有業率(-)の各変化および拡大家族割合(-)の影響が統計的に有意であった。

また、全子、第 2 子、第 4 子については、重み付き最小二乗法による回帰モデルの誤

差項に統計的に有意な空間相関が観察され、重み付き空間誤差モデルの空間自己回帰係数が有意であるなど、重み付き空間誤差モデルのほうがデータに対するあてはまりが良いことがわかった。一方、第1子、第3子の出生率変動については、重み付き空間誤差モデルにおける空間自己回帰係数は有意ではなく、最小二乗法による推定が望ましいことがわかった。

よりデータにあてはまりのよいモデルを使い、2005年～2008年までの合計出生率の上昇分に対する各要因の寄与を求めたところ、第1子上昇分については、高年齢出生率の変化は上昇分の98%を占めるプラスの寄与があり、母外国人の出生率の上昇も11%の寄与を示した。有業率の上昇は24%を説明し、未就学児を持つ母親の有業率の上昇は、予想に反して18%の低下をもたらしている。また各要因の変化に関わらない共通効果としてマイナス15%の減少があったことを示した。

第2子については、20%の共通効果のほか、高年齢出生率の上昇が64%、母外国人出生率が14%を説明する。有業率および母親の有業率は、それぞれ7%とマイナス4%であった。

第3子については、ここで取り上げた要因で説明できない共通効果の寄与が62%と高い。高年齢出生率の上昇は45%、母外国人出生率が 5%を説明する。有業率および母親の有業率は、それぞれマイナス 2%とマイナス 10%であった。

第4子以上についても、共通効果が98%と高く、高年齢出生率の上昇は16%、母外国人出生率が23%を説明する。有業率および母親の有業率は、それぞれマイナス22%とマイナス15%であった。

第1子から第4子モデルの結果を合計することによって、全子の合計出生率上昇に関する各要因の寄与を示すことができる。高年齢出生率変化が72%、母外国人出生率変化が11%、有業率変化が11%、母親の有業率変化がマイナス 12%の寄与を示した。共通効果は19%であった。

D．考察

高年齢出生率の上昇が7割の変化を説明するということは、日本においても先送りされていた出生率のキャッチアップが始まり、テンポ効果の消滅過程に入っているという説明がある程度支持される。また近年における母外国人の出生数の増加も1割ほどの上昇分を説明し、有業率の上昇（失業率の低下）も、全子モデルでは有意ではなかったものの（第1子では有意なプラスの効果)、同じく1割ほどの上昇分を説明する。ただし、2006年以降、国際結婚の数が減少傾向にあり、また失業率も2007年以降再び上昇している。失業率は2007年から2009年に1.2%ポイント上昇しており、今回のモデルによれば、この変化で合計出生率はおよそ0.01下落することになる。

両立支援策の効果として取り上げた核家族世帯に住む未就学児を持つ母親の有業率の変化は、予想に反してマイナスの効果を示した。これについては、子どもを持ちながら働く母親が次子を持つことが相変わらず難しいという可能性や、出生率の回復が顕著であった都市部における保育所不足が、労働力を潜在化させている可能性も考えられる。

家族主義の指標として用いた拡大家族割合は、全子モデルおよび第2子モデルではイタリアのケースと同様マイナスの効果を示した。すなわち、東北地方など、かつては高い出生率を可能にした強力な親族ネットワークが残っていると思われる地域ほど、近年の出生率の回復が弱い。逆に言えば、こうした特徴の少ない都市部でも子育ての道筋が開かれてきたことを示唆する結果で

ある。家族主義に代わる何が出生行動に結びついているのかを明らかにすることは、反転が弱い地域の今後の取り組みに役立つかも知れない。ただし、第3子モデル、第4子モデルでは拡大家族割合はプラスの効果を示しており、多子世帯にとっては同居祖父母からの経済的、時間的サポートが今日でも重要な役割を担っている可能性を示唆する。

（政策的含意）

2005 年以降の出生率の反転上昇の一部は、国際結婚の増加や景気の改善など短期的な条件の重なりによって説明できるので、2008 年以降の外国人の減少や失業率の悪化が、出生率にマイナスの影響をもたらす可能性がある。落ち込みを止めるためには失業率対策がある程度有効なことを示している。他方、比較的高年齢での出生率による押し上げが、今回の分析では7割と大きな部分を占めており、これが晩産による本格的なキャッチアップの定着を意味するならば、今後もテンポ効果消滅による緩やかな出生率上昇が期待できる側面もある。ただし、このままこうしたキャッチアップが定着するかどうかは、先送りの果てに出産に踏み切った30代女性や夫婦が、期待通りに仕事と生活の調和を図れるかにかかっている側面もある。近年の都市部における保育園待機児童の急増や 2008 年以降の経済不況によって顕在化した「産休・育休切り」（出産や育児休業取得を機に解雇を迫られる雇用環境）といった問題は、ようやく高まった期待感を後退させることになりかねず、早急な対策が必要であると思われる。

F．研究発表

1．論文発表

鎌田健司・岩澤美帆.2009.「出生力の地域格差の要因分析：非定常性を考慮した地理的加重回帰法による検証」『人口学研究』第 45 号, pp.1-20.

2．学会発表

Iwasawa, Miho, Kenji Kamata, Kimiko Tanaka and Ryuichi Kaneko. 2009. “Recent family formation patterns in Japan: Evidence from geographical patterns and regional correlates.” Paper presented at the XXVI IUSSP International Population Conference, September 27 - October 2, 2009, Marrakech, Morocco.

鎌田健司・岩澤美帆.2009.「日本における近年の家族形成パターン: 地理・地域の視点からみた関連性」日本人口学会第 61 回大会、関西大学(6.12-14).

Iwasawa, Miho, Kenji Kamata, Kimiko Tanaka and Ryuichi Kaneko. 2009. “Regional patterns and correlates in recent family formation in Japan: Spatial Analysis of Upturn in Prefecture-level Fertility after 2005” Paper presented at the annual meeting of Population Association of America, April 29 – May 1, 2009, Detroit, MI, US.

Iwasawa, Miho.2009. “The end of lowest-low fertility in Japan?: explanations for regional fertility reversal after 2005.” Demographic Seminar, Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2009, Madison.WI, US.

G．知的所有件の取得状況

なし

厚生労働科学研究費補助金（政策科学総合研究事業（政策科学推進研究事業））
分担研究報告書

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「出生意欲データを用いた出生率推計に関する基礎研究（その２）」

研究分担者　守泉理恵　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨

本研究では、昨年度行ったPAF法による出生率推計モデルをもとに、出生意欲の指標を媒介して社会経済要因を取りこんだ独自の推計方法について検討を行った。使用したデータは、出生動向基本調査（夫婦・独身者調査）の第10回（1992年）～第13回（2005年）のデータである。

PAF法は、2時点の調査データを用いて、年齢別の累積出生実現率と追加予定子ども数変化率を算出し、これらを用いて若い世代の完結出生児数を推計するというものである。このモデルでキーとなるのは年齢別の平均追加予定子ども数である。そこで、社会経済要因が変化したときの予測値を得られるように、追加予定子ども数を社会経済要因で説明する重回帰式を推定した。説明変数は、短大・高専卒以上の学歴をもつ者の割合、独身者割合、正規就業者割合、非正規就業者割合、DID居住者割合の５つである。そして、各説明変数の値が変化した場合の追加予定子ども数予測値を2005年実績値と入れ替え、2002～2005年の期間の年齢別の累積出生実現率と追加予定子ども数変化率を計算し、これにより若い世代の完結出生児数がどのように影響を受けるか試算を行った。

いずれの社会経済変数も、2005年実績値より5％ほど増加する方向で変化した場合を想定して計算を行った結果、2002年、2005年とも調査実績値を用いた基本モデル推計値に比べ、完結出生児数の推計値は引き下げられることが分かった。影響が大きかったのは、働き方が変化したケースであった。

以上により、年齢別の平均追加予定子ども数は、社会経済要因によってかなりの程度変動を説明できることと、社会経済要因の変化の影響は若い世代ほど大きく、将来の完結出生児数を変動させるということが分かった。一方で、推計に用いる社会経済要因の相互関係や変化の方向・程度については別途精査と考察が必要であること、追加予定子ども数の決定モデルをさらに洗練する必要があることなど、課題も明確となった。

A．研究目的

本研究は、昨年度試算した Partial Adjustment Forecasting（PAF）法による出生意欲を用いた出生率推計モデルを基礎に、社会経済要因を取り入れた出生率推計について検討することを目的とする。

B．研究方法

PAF 法は、年長コーホートが実際に経験した年齢別の累積出生率の実現率（μ値）、および追加予定子ども数の変化率（A 値）を仮定値とし、未知の年齢部分がある若いコーホートにこれらの仮定値を適用してコーホート完結出生児数を算出するというものである。ここでキーとなるのは年齢別の追加予定子ども数で、この値が変化すれば、累積出生率の実現率も、追加予定子ども数の変化率も変わることになる。そこで、第 10 回（1992 年）～第 13 回（2005 年）の出生動向基本調査（夫婦・独身者調査）の女性のデータを用い、年齢各歳別の平均追加予定子ども数を従属変数とし、社会経済要因を説明変数とした重回帰分析を行った。これにより各説明変数の係数が決まれば、それらの変数の値が変わったときの年齢別平均追加予定子ども数の予測値を算出できる。そして、社会経済要因が変化したときの予測値を 2005 年の実績値の代わりに投入し、2002 年からのデータで新たなμ値、A 値を算出して、完結出生児数の将来予測がどの程度変わるか検証した。

C．研究成果

重回帰式の推定で、説明変数として取り上げたのは、短大・高専卒以上の学歴をもつ者の割合、独身者割合、正規就業者割合、非正規就業者割合、DID 居住者割合である。そして、このモデルを用いて、短期的変化が想定しにくい学歴構成を除き、各社会経済変数が変化した場合の追加予定子ども数予測値を算出した。いずれの社会経済変数も、2005 年実績値より 5％ほど増加する方向で変化した場合を想定した。

その結果、2002 年、2005 年とも調査実績値を用いた基本モデル推計値に比べ、各社会経済要因が増加の方向で変化したケースでは、完結出生児数の推計値は引き下げられることが分かった。

D．結果の考察

社会経済要因を変化させた場合の完結出生児数の推計値は、基本モデルの推計値に比べて、とくに 35 歳以下のところで下方に開きが大きくなっていた。もっとも引き下げ効果が大きいのが、非正規就業者割合が全年齢で 5％増加したケースであり、次に正規就業者が 30 歳以上で 5％増加したケースである。非正規就業者割合が増加した場合の推計値は、1970 年代半ば以降のコーホートで、基本モデル推計値の 70～80％であった。働き方の変化は、現在の因果関係構造のもとでは、若い世代の将来の完結出生児数を引き下げることになる。また、働き方の変化よりは差が小さいが、独身者が増えた場合と、都市化が進んだ場合もモデル推計値に比べて若い世代の完結出生児数を引き下げる。公的推計の中位推計値と比較すると、働き方が変化した場合の推計値がもっとも中位推計値に近い動きを示した。

E．結論

ここまでの研究で分かったことは、ひとつは、年齢別の平均追加予定子ども数は、社会経済要因によってかなりの程度変動を説明できるということである。そうであれば、追加予定子ども数を推定するモデルについて考察を深め、洗練することで、より精度の高い出生率推計のためのモデルを得ることができる。

もうひとつは、社会経済要因の変化の影響は、とくにまだ実績値のない未知の部分が多い若い世代ほど大きく、将来の完結出生児数を変動させるということである。

一方で、今後考察すべき課題も明確となった。まず、本研究では、社会経済要因の変化について簡単な仮定を置き、さらにそれらが単独で変わる場合のみ推計を行った。このようにして推計を行った場合、結果が現実的であるためには、各変数の独立性が確保されねばならないが、実際にはこれらの社会経済要因は独立であることは少なく、ある程度相互に関連していると考えられる。また、社会経済情勢の変化の程度や方向についても、さらに研究を深め、説得力のあるシナリオを提示しなくてはならない。

今回は、これまでにない新たな出生率推計の方法を提示し、その適用を試みたが、実用化に際しては上記のような課題を残している。本研究と同じ課題を掲げた先行研究は非常に少なく、今後、内外の関連研究について徹底してサーベイを進めるとともに、出生意欲を用いた出生率推計の方法についてさらに考察を深める必要がある。

F．研究発表

1．論文発表

なし

2．学会発表

なし

G．知的所有権の取得状況

なし

Ⅱ.　個別研究報告

1　変動環境下における人口再生産力

稲葉 寿

1　はじめに

人口学における標準モデルである安定人口モデルは人口動態率（出生率、死亡率、状態感遷移率など）が時間的に不変であることを仮定しているが、現実の人口ではそのようなことはほとんどなく、動態率は時間的に変動している。その場合、人口動態率は人口自身の変化と変動する環境の影響によって規定されているであろう。一般に人口のサイズや分布の変化も環境変数として動態率を規定していると考えれば、フィードバック構造をもつ非線形人口モデルが得られるが、その解析は数学的にはずっと難しい問題である ([13])。一方、変動環境下におけるパラメータの時間変動が与えられたものとみなすならば、時間依存パラメータをもつ線形人口モデルによる記述が有効である。以下ではそのような一般線形人口モデルに関して、その再生産力をどのようにとらえるべきかを考察する。

2　変動環境下の一般線形人口理論

安定人口モデルを時間依存パラメータを持つモデルへ拡張することから始めよう。いま単性の人口が有限個の相互に排他的な**状態** (individual state: i-state) に分割されているとして、$i = 1, 2, .., n$ を各状態を示す番号であるとする。ここで人口の状態とは個体の動態に影響を与えるような特性であって、具体的には居住地域、労働力状態、結婚状態、パリティ（出産歴）等が考えられる。$p_i(t, a)$ は i-状態の人口密度関数であるとして、人口ベクトルを $p(t, a) = (p_1(t, a), ..., p_n(t, a))^{\mathrm{T}}$ と定義しておく。ここで τ はベクトルの転置作用を示す。$q_{ij}(t, a)$, $i \neq j$ を時刻 t における状態 j から状態 i への瞬間的な推移強度、$\mu_j(t, a)$ を時刻 t, 年齢 a, 状態 j における死亡力関数であるとする。さらに

$$q_{jj}(t, a) = -\mu_j(t, a) - \sum_{i \neq j} q_{ij}(t, a), \quad 1 \leq j \leq n,$$

と定義して、$q_{ij}(t, a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列を $Q(t, a)$ とする。また $m_{ij}(t, a)$ は時刻 t において状態 j にある個体が i 状態に属する新生児を産む年齢別出生率関数であるとする。$M(t, a)$ を $m_{ij}(a)$, $1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列とする。

このとき時間依存パラメータをもつ（非自律的）多状態人口モデル*1は以下のようなベクトル型のマッケン

*1 female dominant model であり、女性人口に関するモデルだけを以下で考える。

ドリックシステムとして表される：

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t,a)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,a)}{\partial a}&=Q(t,a)p(t,a),\quad t>0,\ a>0,\\ p(t,0)&=\int_0^\omega M(t,a)p(t,a)da,\quad t>0,\\ p(0,a)&=p_0(a).\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで $p_0(a)$ は初期人口ベクトル、ω は年齢の上限である。

上記のシステムの解を与える発展作用素システムを導くために、まず以下のような行列微分方程式を考えよう：

$$\frac{dL(x;t,a)}{dx}=Q(t+x,a+x)L(x;t,a),\quad L(0;t,a)=I\tag{2.2}$$

ここで I は単位行列である。(2.2) の解行列 $L(x;t,a), x\geq 0$ の (i,j) 要素 $\ell_{ij}(x;t,a)$ は時刻 t、年齢 a、状態 j の人口が x 時間後に i 状態に生残している割合を示している。このとき以下の推移規則が成り立つ：

$$L(x_2;t+x_1,a+x_1)L(x_1;t,a)=L(x_1+x_2;t,a),\quad x_1,x_2\geq 0\tag{2.3}$$

このときシステム (2.1) の解 $p(t,a)$ の時間発展は以下のような 2-パラメータの作用素のシステムによって表現される：

$$p(t,a)=(U(t,s)p(s,\cdot))(a),\tag{2.4}$$

ここで、$U(t,s)$, $s\leq t$ は状態空間 $X_+:=L^1_+(0,\omega;\mathbf{R}^n)$ 上の線形作用素で、時刻 s における人口ベクトルを時刻 t の人口ベクトルへ変換する作用をしている。具体的には $U(t,s)$ は以下のように与えられる ([12])：

$$(U(t,s)\phi)(a)=\begin{cases}L(a;t-a,0)B(t-s-a;\phi,s), & t-s>a,\\ L(t-s;s,a-t+s)\phi(a-t+s), & t-s\leq a,\end{cases}\tag{2.5}$$

ただしここで $B(\xi;\phi,s)$, $\xi>0$ は以下の再生方程式の解である：

$$B(\xi;\phi,s)=G(\xi;\phi,s)+\int_0^\xi \Psi(s+\xi,a)B(\xi-a:\phi,s)da,\tag{2.6}$$

$$\Psi(t,a):=M(t,a)L(a:t-a,0),$$

$$G(\xi;\phi,s):=\int_\xi^\infty M(\xi+s,a)L(\xi;s,a-\xi)\phi(a-\xi)da.$$

このとき $U(t,s)$, $s\leq t$ は時間依存の発展作用素システムとなり、以下の発展法則が成り立つ：

$$U(t_3,t_2)U(t_2.t_1)=U(t_3,t_1),\quad t_1\leq t_2\leq t_3,\quad U(s,s)=I_d\tag{2.7}$$

ここで I_d は X_+ の恒等作用素である[*2]。

[*2] $\phi\in X_+$ であるとき、$U(t,0)\phi$ は、必ずしも偏微分可能ではないから、(2.1) の古典解ではないが、以下のシステムを満たす弱い解である：

$$\begin{aligned}Dp(t,a)&=Q(t,a)p(t,a),\\ p(t,0)&=\int_0^\omega M(t,a)p(t,a)da,\end{aligned}\qquad t\in\mathbf{R},\ a\in[0,\omega]$$

ここで D はコーホートに沿っての微分である：

$$Df(t,a):=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h,a+h)-f(t,a)}{h}$$

そこで、むしろ (2.5)-(2.6) によって定まる発展システム $U(t,s)$ を時間依存パラメータをもつ人口モデルとみなせる。

このとき (2.5)-(2.6) から初期値問題 (2.1) の解が、$p(t,\cdot)=U(t,0)p_0$ で与えられるから、

$$p(t,a)=\begin{cases}L(a;t-a,0)B(t-a), & t-a>0\\ L(t;0,a-t)p_0(a-t), & a-t>0\end{cases} \tag{2.8}$$

と表現される。ただし、ここで $B(t):=p(t,0)$ は以下の再生方程式を満たしている：

$$B(t)=G(t)+\int_0^t \Psi(t,a)B(t-a)da \tag{2.9}$$

ここで、$\Psi(t,a)=M(t,a)L(a;t-a,0)$ は $t-a$ 時刻に生まれた女性が a 歳まで生残して、女児を出産する率である。$G(t)$ は初期時刻 $t=0$ に生存していた女性人口 $p_0(a)$ から単位時間に生まれてくる女児の密度を表していて、以下のよう表現される：

$$G(t)=\int_t^\infty M(t,a)L(t;0,a-t)p_0(a-t)da$$

自律系の場合と同様に、再生方程式 (2.9) に関して、各世代の出生率関数 $B_n(t), n=1,2,\cdots$ を以下のように定義できる：

$$B_1(t)=G(t),\quad B_n(t)=\int_0^t \Psi(t,a)B_{n-1}(t-a)da,\quad (n\ge 2) \tag{2.10}$$

この場合、再生方程式の解は

$$B(t)=\sum_{n=1}^\infty B_n(t)$$

で与えられる。

このとき各世代の総出生数を計算してみると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty B_n(t)dt &= \int_0^\infty dt\int_0^t \Psi(t,a)B_{n-1}(t-a)da\\ &= \int_0^\infty da\int_a^\infty \Psi(t,a)B_{n-1}(t-a)dt=\int_0^\infty da\int_0^\infty \Psi(a+\tau,a)B_{n-1}(\tau)d\tau\\ &= \int_0^\infty\left\{\int_0^\infty \Psi(a+\tau,a)da\right\}B_{n-1}(\tau)d\tau=\int_0^\infty K(\tau)B_{n-1}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$K(\tau):=\int_0^\infty \Psi(a+\tau,a)da,$$

は時刻 τ に生まれたコーホートの純再生産行列（次世代行列）である。すなわち時間に依存したパラメータをもつ人口システムでは、ある世代の出生数は前世代の出生数とコーホート純再生産行列の積和になっていて、世代サイズの比は時間的に変化する。パラメータの時間依存性がなければ、すなわち安定人口モデルの場合は、K は定数行列であり、世代のサイズ比は K のスペクトル半径 $r(K)$ に漸近する。したがってその場合は、スペクトル半径 $r(K)$ を純再生産率（基本再生産数）と定義することができるが、上記のように時間依存のケースではそのような定義ができない ([14])。

ただし例えば、コーホート的な純再生産行列が一定である場合、すなわち $K(\tau)$ が τ によらなければ、継続する世代サイズの比は時間不変なコーホート純再生産行列のスペクトル半径 $r(K)$ に漸近する。た

とえば、$\Psi(t,a)$ が一定の純再生産関数 $\Phi(a)$ のコーホート上でのエイジシフトによって得られる場合、$\Psi(t,a)=\Phi(a-k(t-a))$ であり、再生産年齢の a に関して $a-k(t-a)>0$ である限り

$$K(\tau)=\int_0^\infty \Psi(a+\tau,a)da=\int_0^\infty \Phi(a-k\tau)da=\int_0^\infty \Phi(a)da$$

となり、$K_c(\tau)$ は定数行列（次世代行列）$K=\int_0^\infty \Phi(a)da$ に等しい。このような場合はコーホートの純再生産率 R_0 は $r(K)$ であるが、再生産タイミングは変化しうるので、期間の R_0 は時間に依存して変動している。

一方、期間的な観測から得られる純再生産行列は以下のように定義できる：

$$K_p(t):=\int_0^\infty M(t,a)L_p(t,a)da$$

ここで、$L_p(t,a)$ は期間的な多状態生命表生残率行列であって、以下の初期値問題の解行列として与えられる：

$$\frac{dL_p(t,a)}{da}=Q(t,a)L_p(t,a),\quad L_p(t,0)=I_d$$

期間的観測による純再生産率は $r(K_p(t))$ として定義できるが、それは仮想コーホートの純再生産率であって、コーホート的な再生産力とは異なる。たとえばコーホートの再生産スケジュールが世代とともに遅れるような場合には、コーホートでみた純再生産率が 1 を超えていても、過渡的には期間的な純再生産率は 1 を下回ることもある。

再生方程式 (2.8) の両辺を 0 から $T>0$ まで積分して、二重積分の順序交換をおこなうと以下の関係がえられる：

$$\begin{aligned}\int_0^T B(t)dt&=\int_0^T G(t)dt+\int_0^T da\int_0^{T-a}\Psi(a+z,a)B(z)dz\\&\le\int_0^\infty G(t)dt+\int_0^T K(z)B(z)dz\end{aligned}$$

そこで生物学的条件から、$K(\tau)$ は上に有界であると仮定してよいので、すべての $\tau\ge 0$ について、$K(\tau)\le K^*$ となるような分解不能な正行列 K^* が存在するとして一般性を失わない。このとき、

$$\int_0^T B(t)dt\le\int_0^\infty G(t)dt+K^*\int_0^T B(\tau)d\tau,$$

であるから、$r(K^*)<1$ であれば $(I-K^*)^{-1}\ge 0$ であって、

$$\int_0^T B(t)dt\le(I-K^*)^{-1}\int_0^\infty G(t)dt$$

ここで $T\to\infty$ とすれば左辺は単調増大で上に有界なので、正数に収束する。したがって全出生数は有限であり、以下が成り立つ：

$$\int_0^\infty B(t)dt\le(I-K^*)^{-1}\int_0^\infty G(t)dt \tag{2.11}$$

このとき $B(t)$ が連続であれば、$\lim_{t\to\infty}B(t)=0$ である。

一方で、もしすべての $\tau\ge 0$ について、$K(\tau)\ge K_*$ となるような非負の分解不能行列 K_* が存在して、$r(K_*)>1$ であれば、明らかに各世代の出生数はすべての状態において幾何級数的に増加する。したがってそのような意味では、コーホートの純再生産率は弱い意味で閾値性をもっている。期間的な純再生産率に対してもコーホート純再生産率と同様な弱い閾値性が認められる。

3 弱エルゴード性

時間依存の動態率をもつ線形人口モデル (2.1) がもつもう一つの著しい特性は**弱エルゴード性** (weak ergodicity) である。いま初期年齢分布が異なるだけで、同じ出生、死亡の動態率に従う 2 つの人口の時間発展を考えよう。簡単のため、ここでは一次元で考える。このとき各人口の出生数を $B_1(t)$, $B_2(t)$ とすれば、スカラーの再生方程式によって、

$$B_i(t) = G_i(t) + \int_0^t \psi(t,a)B_i(t-a)da, \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

と書ける。ここで $\psi(t,a)$ は一次元の純再生産関数である。再生産年齢の上限を ω とすれば、$t > \omega$ では $G_i(t) = 0$ であるが、再生産年齢より高齢の人口しか含まない「自明な」初期条件をのぞけば $0 \le t < \omega$ では $G_i(t) > 0$ である。このとき二つの出生率時系列の比 B_1/B_2 は $t \to \infty$ において、一定値に収束することが示される。

一般的な証明は Inaba ([12]) に譲り、ここでは直感的な説明をおこなおう。いま初期人口が死滅したあと $(t > \omega)$ で考えると、$G_i(t) = 0$ でかつ $a > \omega$ では $\psi(t,a) = 0$ であるから、

$$\frac{B_1(t)}{B_2(t)} = \frac{\int_0^\omega \psi(t,a)B_1(t-a)da}{\int_0^\omega \psi(t,a)B_2(t-a)da} = \int_0^\omega \left[\frac{\psi(t,a)B_2(t-a)}{\int_0^\omega \psi(t,\zeta)B_2(t-\zeta)d\zeta}\right]\frac{B_1(t-a)}{B_2(t-a)}da \tag{3.2}$$

ここで、

$$x(t) := \frac{B_1(t)}{B_2(t)}, \quad \Theta(t,a) := \frac{\psi(t,a)B_2(t-a)}{\int_0^\omega \psi(t,\zeta)B_2(t-\zeta)d\zeta} = \psi(t,a)\frac{B_2(t-a)}{B_2(t)},$$

とおけば、(2.11) は

$$x(t) = \int_0^\omega \Theta(t,a)x(t-a)da \tag{3.3}$$

とかけ、しかも

$$\int_0^\omega \Theta(t,a)da = 1$$

である。従って (3.3) は過去の長さ ω のデータ $x(t)$ の平均をとる操作を反復していくプロセスを表現している。適当な条件のもとでは過去のデータの振幅は単調に減少して、終局的には $x(t)$ は一定の値に収束することが期待できる。

出生数が比例するようになれば、生残率は共通だから二つの人口の年齢分布は漸近的に比例してくるようになる。このことは線形人口モデルにおいては初期条件が年齢分布に及ぼす影響は過渡的なものであって、それは時間とともに消失して動態率だけによってきまる年齢構造が一義的に出現してくることを意味している。このような性質を**弱エルゴード性** (weak ergodicity) とよぶ。

弱エルゴード性を過去のデータ時系列に適用してみると、遠い過去の初期条件の違いは時間とともに消失するから、十分に長い時間の動態率の時系列は現在ないし最近過去の年齢構造の変化を（スケールを除いて）ほぼ一義的に決めていることがわかる。極限的な場合を考えると、無限に長い動態率の歴史と矛盾のない年齢構造の変化の歴史は一通りに決まってしまうことになる ([12])。

特に時間不変な動態率をもつ安定人口モデルにおいては、$\psi(t,a)$ が時間に依存しないために、オイラー・ロトカの特性方程式

$$\int_0^\omega e^{-\lambda_0 a}\psi(a)da = 1$$

をみたす自然成長率 λ_0 がただ一つ存在した。そこで $B_1(t)$ として、特殊解 $e^{-\lambda_0 t}$ を選べば、$\theta(a) = e^{-r_0 a}\phi(a)$ であり、$x(t)$ は定数に漸近する。そこで一般の解 $B_1(t)$ に対して、$t \to \infty$ において $x(t) = B_1(t)/e^{\lambda_0 t} \to$ *const.* であることがわかる。すなわち、弱エルゴード性によってほかの任意の解もまた漸近的にマルサス成長することがわかる。これが安定人口モデルの**強エルゴード性** (strong ergodicity) である。

4　変動環境における人口再生産

4.1　非自律系の成長特性

パラメータ変動に関してなんらの法則性も仮定しなければ、線形人口モデルに関して弱エルゴード性以上の性質を期待できない。しかし、弱エルゴード性が成り立つ過程においては、時間に関して持続的な特殊解が存在すれば、一般解の漸近挙動はその特殊解と同様だからである。

一般に、複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ と正の有界関数 $\phi(t,a)$ が存在して、$e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が人口発展システム $U(t,s)$ と共立[*3]であるときに、これを**指数関数解** (exponential solution) とよび、λ をその**内的成長率**とよぼう。弱エルゴード的過程では、指数関数解が存在すれば、正の解はすべてそれに漸近的に比例するから、内的成長率 λ が長期的成長特性を表現している。モデル (2.1) における微分を、注 2 で示したような方向の微分 D によって置き換えて、弱い解を考えれば以下が示される：

定理 4.1 $f(t,a)$ が $U(t,s)$ と共立であるためには、$f(t,\cdot) \in X_+$ であり、かつ以下が成り立つことが必要十分である：

$$\begin{aligned} f(t,a) &= L(a;t-a,0)f(t-a,0) \\ f(t,0) &= \int_0^\omega \Psi(t,a)f(t-a,0)da, \end{aligned} \tag{4.1}$$

系 4.2 $U(t,s)$ と共立な関数 $f(t,a)$ が存在するためには、ある可測関数 $\phi(t)$, $-\infty < t < \infty$ が存在して

$$\phi(t) = \int_0^\omega \Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.2}$$

となることが必要十分である。

そこで指数関数解 $e^{\lambda t}\psi(t,a)$ が存在しているとすれば、$f(t,0) = e^{\lambda t}\psi(t,0)$ であるから、$\phi(t) := \psi(t,0)$ として (4.2) に代入すれば、以下がなりたたねばならないことがわかる：

$$\phi(t) = \int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.3}$$

逆に (4.3) をみたす λ と有界可測な $\phi(t)$ が存在すれば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi(t-a)$ が (4.1) を満たし、$U(t,s)$ と共立な指数関数解になる。

いま形式的な非負作用素 $K(\lambda)$ を

$$(K(\lambda)\phi)(t) := \int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.4}$$

[*3] X-値の関数 $f(t)$, $-\infty < t < \infty$ が、$f(t) = U(t,s)f(s)$, $-\infty < s \le t < \infty$ をみたすとき、$f(t)$ は $U(t,s)$ と共立 (consistent) であるという。

と定義すれば、ある実数 λ_0 に対して $K(\lambda)$ が固有値 1 と対応する（有界可測な）正の固有関数 ϕ_0 をもてば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ は正の指数関数解を与えることになる。逆に、指数関数解が存在するならば、有界可測関数の空間上で作用素 $K(\lambda)$ は固有値 1 を持たねばならない。

一般に $K(\lambda)$ がコンパクト作用素であれば、Krein-Rutman の定理などによって $K(\lambda)$ がそのスペクトル半径 $r(K(\lambda))$ を固有値として、対応する正の固有関数をもち、$r(K(\lambda))$ は λ の単調減少関数になることが期待されるから、ある実数 λ_0 が存在して $K(\lambda_0)$ が固有値 1 と対応する有界可測な正の固有関数 ϕ_0 をもつであろう。その場合、

$$\mathrm{sign}(\lambda_0) = \mathrm{sign}(r(K(0)) - 1) \tag{4.5}$$

となるから、正作用素 $K(0)$ を、そのスペクトル半径が人口成長の閾値を与えるという意味で次世代作用素（純再生産作用素）として定義して、そのスペクトル半径を基本再生産数（純再生産率）として定義できる[*4]。

4.2 周期系の場合

人口動態が周期的である場合は、指数関数解の存在する最も重要なケースであり、安定人口モデルと同様な漸近挙動が得られる[*5]。

いま $Q(t,a)$, $M(t,a)$ は時間 t に関して周期 θ をもつ連続関数であると仮定しておこう。すなわち

$$M(t+\theta,a) = M(t,a), \quad Q(t+\theta,a) = Q(t,a)$$

このとき以下が成り立つ：

$$L(x;t+\theta,a) = L(x;t,a). \tag{4.6}$$

そこで、さらに表現 (2.5) から以下が成り立つことがわかる：

$$U(t+\theta,s+\theta) = U(t,s). \tag{4.7}$$

周期系に関しては、複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ と、時間に関して周期的な関数 $\phi(t,a)$ が存在して、$e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が $U(t,s)$ と共立である場合、それを周期系の指数関数解とよび、λ をその内的成長率とよぼう。

補題 4.3 内的成長率 λ の指数関数解が存在するためには、モノドロミー作用素 $U(\theta,0)$ が正固有値 $e^{\lambda\theta}$ をもつことが必要十分である[*6]。

証明： 指数関数解 $e^{\lambda t}\phi(t,a)$ が存在すれば、以下のように書けているはずである：

$$e^{\lambda t}\phi(t,a) = (U(t,0)\phi_0)(a), \quad \phi_0 := \phi(0,a).$$

ここで、周期性から $\phi(\theta,a) = \phi(0,a)$ であるから、$e^{\lambda\theta}\phi_0 = U(\theta,0)\phi_0$ を得る。これは $U(\theta,0)$ が固有関数 ϕ_0 と対応する固有値 $e^{\theta\lambda}$ を持つことを意味している。逆に $e^{\theta\lambda}$ が $U(\theta,0)$ の固有値であれば、ある可積分関数 ϕ_0

[*4] Thieme ([17]) は evolution semigroup の概念によって、指数関数解やエルゴード性を利用することなく、適当な ϕ の関数空間に関し、$\mathrm{sign}(\omega(U)) = \mathrm{sign}(r(K(0)) - 1)$ が一般に成り立つことを示している。ここで $\omega(U)$ は発展システム $U(t,s)$ の指数関数的成長上限 (exponential growth bound) であり、

$$\omega(U) := \inf\{\omega : \text{there exists a } M \geq 1 \text{ such that } |U(\tau+s,s)| \leq Me^{\omega\tau}, \forall s \in \mathbf{R}, \tau \geq 0\}$$

と定義される。

[*5] 周期係数をもつ安定人口モデルに関する初期の研究として Coale ([6]) がある。

[*6] 時間原点をずらして $U(s+\theta,s)$ を考えても得られる条件は同じである。

が存在して、$e^{\lambda\theta}\phi_0 = U(\theta,0)\phi_0$ となる。(4.7) によって $e^{-\lambda t}U(t,0)\phi_0$ は時間について周期的な可積分関数値関数となる。そこで、$U(t,0)\phi_0$ は λ を成長率とする指数関数解になる。(証明終)

一般線型人口モデル (2.1) に対応する発展システム $U(t,s)$ は正作用素であるから、適当な条件のもとで、モノドロミー作用素 $U(\theta,0)$ は正固有値 ρ_0 と対応する正固有ベクトル ϕ_0 をもつ。その場合、$\lambda_0 = (\log\rho_0)/\theta$ とすれば、$U(t,0)\phi_0$ は λ_0 を成長率とする指数関数解になる。このとき

$$\operatorname{sign}(\lambda_0) = \operatorname{sign}(\rho_0 - 1) \tag{4.8}$$

であり、$U(t,s)$ が弱エルゴード的であれば、任意の正の解は、漸近的に正の指数関数解に比例する。したがって、人口が潜在的に正の成長力をもつか否かは、モノドロミー作用素の正固有値が 1 より大きいか否かに対応している。その意味で $\rho_0 = r(U(\theta,0))$ は安定人口モデルにおける純再生産率に相当する役割を果たしている。

しかし、$U(\theta,0)$ は (2.5)-(2.6) によって解析的に表現できるにしても、その計算は容易ではなく、自律系の場合の純再生産行列と対応していない。実際、$M(t,a)$, $Q(t,a)$ が時間的に依存しなければ、$U(t,s) = T(t-s)$ として人口半群 $T(t)$ が得られ、$U(\theta,0) = T(\theta)$ は初期時刻の年齢密度分布を θ 時間後のそれに変換する(期間的な変動を記述する)作用素となるから、世代ごとの変化を記述する純再生産行列とは非常に異なっている。

そこで、自律系に対する純再生産行列の直接的な拡張と見なせるような、周期系における次世代作用素として $K(0)$ を定義しよう。$\mathbf{R}$ 上の θ 周期の連続関数の空間 $E := C_\theta(\mathbf{R}:\mathbf{R}^n)$ における線形作用素 $K(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ を

$$(K(\lambda)\phi)(t) := \int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(t,a)\phi(t-a)da \tag{4.9}$$

と定義しよう。上記の議論から、ある実数 λ_0 に対して $K(\lambda)$ が固有値 1 と対応する正の固有関数 $\phi_0 \in E_+$ をもてば、$e^{\lambda(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ は正の指数関数解を与えることになる[*7]。

この場合、$K(\lambda)$ は実数 λ に対しては正のコンパクト作用素[*8]であるから、もしそれが強正値 (strongly positive) であれば、Krein-Rutman の定理によって、そのスペクトル半径 $r(K(\lambda))$ が正の固有値となり、それに対応する正の固有関数が E_+ に存在する。しかも $r(K(\lambda))$ は λ の単調減少関数である。明らかに $\lim_{\lambda\to\infty} r(K(\lambda)) = 0$ であるが、さらに $r(K(\lambda)) > 1$ となるような λ が存在すれば[*9]、$r(K(\lambda)) = 1$ となるただ一つの実根 λ_0 が存在して、

$$\operatorname{sign}(\lambda_0) = \operatorname{sign}(r(K(0)) - 1) \tag{4.10}$$

となる。このとき $K(\lambda_0)$ の固有値 1 に対応する正の固有関数を $\phi_0(t)$ とおけば、$e^{\lambda_0(t-a)}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)$ が正の指数関数解を与える。発展システム $U(t,s)$ が弱エルゴード的であれば、他のすべての正の解は正の指数関数解に漸近的に比例する。したがって、内的成長率 λ_0 が正であれば、人口成長がおきるが、負であれば人口は絶滅するという正確な閾値条件が得られる。

このとき、漸近的な年齢分布は

$$c_0(t,a) = \frac{p(t,a)}{\int_0^\omega p(t,a)da} = \frac{e^{-\lambda_0 a}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)}{\int_0^\omega e^{-\lambda_0 a}L(a;t-a,0)\phi_0(t-a)}$$

となるが、これは θ を周期とし、正規化された任意の年齢分布 $c(t,a)$ に関して

$$\lim_{t\to\infty} |c(t,a) - c_0(t,a)| = 0$$

[*7] $K(0)$ による基本再生産数の定義は数理疫学モデルにおいてすでに導入されている ([1]), [19], [17])。
[*8] 正確には、周期性によって有限区間 $\mathrm{m}[0,\theta]$ 上の連続核積分作用素と同一視できるという意味で、コンパクト作用素になる ([2])。
[*9] そのような λ が存在しない場合は人口は絶滅するので、$K(0)$ が閾値を与えることに変わりはない。

という意味で安定である。

さらにもしパラメータが時間に依存しないのであれば、

$$(K(\lambda)\phi)(t) = \int_0^\omega e^{-\lambda a}\Psi(a)\phi(t-a)da$$

である。このときを正行列 $\hat{\Psi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda a}\Psi(a)da$ のスペクトル半径 $r(\hat{\Psi}(\lambda))$ が 1 になるような実数 λ_0 と、対応する $\hat{\Psi}(\lambda)$ こ固有ベクトルを c_0 とすれば、$\phi_0 \equiv c_0$ という定数値関数は $K(\lambda_0)\phi_0 = \phi_0$ を満たしている。従ってこのときは、$e^{\lambda_0(t-a)}L(a)c_0$ が指数関数解になっていて、他の正の解（共立な関数）はすべて漸近的にこれに比例する。これは多状態安定人口モデルの強エルゴード定理にほかならず、$R_0 = r(\hat{\Psi}(0))$ である。$K(0)$ を定数値関数（任意の周期をもつ関数）のなす空間上での作用素とみれば、それは $\mathbf{R}^n$ 上の作用素 $\hat{\Psi}(0)$ と同一視できる。したがって、作用素 $K(0)$ を周期系における次世代作用素と定義すれば、そのスペクトル半径 $r(K(0))$ は、安定人口モデルにおける R_0 の定義の直接的な拡張になっている。

4.3 繁殖価概念の拡張

基本モデル (2.1) は形式的には以下のような発展方程式（バナッハ空間 X における常微分方程式）とみなせる：

$$\frac{dp(t)}{dt} = A(t)p(t) \tag{4.11}$$

ここで、$A(t)$ は以下のような境界条件のついた微分作用素である：

$$\begin{aligned} (A(t)p(t))(a) &= \left(-\frac{d}{da} + Q(t,a)\right)p(t,a) \\ p(t,0) &= \int_0^\omega M(t,a)p(t,a)da \end{aligned} \tag{4.12}$$

このとき、指数関数解 $e^{\lambda t}\psi(t,a)$ が存在して微分可能であれば、(λ,ψ) は以下の固有値問題の解であることが、(4.11) に代入することでわかる：

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial a} + Q(t,a)\right)\psi(t,a) &= \lambda\psi(t,a), \\ \psi(t,0) &= \int_0^\omega M(t,a)\psi(t,a)da \end{aligned} \tag{4.13}$$

$A(t)$ の共役作用素 $A^*(t)$ を以下のように定義しよう：

$$\begin{aligned} (A^*(t)v(t))(a) &= \frac{dv(t,a)}{da} + v(t,a)Q(t,a) + v(t,0)M(t,a) \\ v(t,\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、$v(t)$ は $X^* = L^\infty([0,\omega];\mathbf{R}^n)$ に値をとる関数である。ただし n 次元ベクトルとしては横ベクトルをとることにしておく。このとき

$$\langle v(t), p(t)\rangle := \int_0^\omega v(t,a)p(t,a)da$$

とすれば、

$$\langle A^*(t)v(t), p(t)\rangle = \langle v(t), A(t)p(t)\rangle$$

が成り立つ。さらに発展システム $U(t,s)$ の共役作用素 $U(t,s)^*$ を $x^* \in X^*$, $x \in X$ に対して

$$\langle U(t,s)^* x^*, x\rangle = \langle x^*, U(t,s)x\rangle$$

によって定義しておけば、$U^*(s,t) := U(t,s)^*$ は**後退発展システム** (backward evolutionary system) になる。すなわち、

$$U^*(s,r)U^*(r,t) = U^*(s,t), \quad s \le r \le t$$

発展作用素 $U(t,s)$ を用いれば、$p(t) = U(t,s)p(s)$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s) \tag{4.15}$$

である。このときさらに

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t,s)A(s) \tag{4.16}$$

となることが示される ([5])。このことから、

$$\begin{aligned}\langle x^*, \frac{\partial}{\partial s}U(t,s)x\rangle &= -\langle x^*, U(t,s)A(s)x\rangle \\ &= -\langle A^*(s)U^*(s,t)x^*, x\rangle = \frac{\partial}{\partial s}\langle U^*(s,t)x^*, x\rangle\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial s}U^*(s,t) = -A^*(s)U^*(s,t) \tag{4.17}$$

が従う。そこで、X^* の発展方程式

$$\frac{dv^*(s)}{ds} = -A^*(s)v^*(s) \tag{4.18}$$

を**後退方程式** (backward equation) とよぼう。$v^*(s) = U^*(s,t)x^*$ のとき、$v^*(s)$ は後退方程式の解を与えている。一般に $v^*(s) = U^*(s,t)v^*(t)$ であるとき、$v^*(s)$ は $U^*(s,t)$ と共立であるという。後退方程式に関しては、$e^{-\lambda s}w^*(s,a)$ がその解となるとき、それを指数関数解とよぼう。この場合、(λ, w^*) は以下の共役固有値問題の解である：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial s} + A^*(s,a)\right) w^*(s,a) &= \lambda w^*(s,a), \\ w^*(s,\omega) &= 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

補題 4.4 $p(t) \in X_+$ が $U(t,s)$ と共立であるとき、$v^*(t) \in X^*$ が $U^*(s,t)$ と共立であれば、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定である。またもし任意の共立関数 $p(t)$ に対して、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であるような汎関数 $v^*(t)$ が存在すれば、それは共立汎関数である。

証明： $v^*(s)U^*(s,t) = v^*(t)$ であれば、

$$\langle v^*(t), p(t)\rangle = \langle v^*(t), U(t,s)p(s)\rangle = \langle U^*(s,t)v^*(t), p(s)\rangle = \langle v^*(s), p(s)\rangle$$

したがって $\langle v^*(t), p(t)\rangle$ は時間によらず一定である。また汎関数 $v^*(t)$ について、$\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であれば、任意の $x \in X_+$ に対して、$p(t) = U(t,s)x$ と考えれば、

$$\langle v^*(s), x\rangle = \langle v^*(t), U(t,s)x\rangle = \langle U^*(s,t)v^*(t), x\rangle$$

となるから、$v^*(s) = U^*(s,t)v^*(t)$ である。(証明終)

実は、$U(t,s)$ の弱エルゴード性を保証するような適当な仮定の下で、$0 \le s \le t < \infty$[*10]で $U(t,s)$ と共立な任意の正の関数 $p(t)$ に対して $\langle v^*(t), p(t)\rangle$ が時間によらず一定であるような正汎関数 $v_0^*(t)$ が存在して、それは $U^*(s,t)$ と共立であり、定数倍の任意性を除けば一意的であることが示される ([4], [12], [13])。そのような正汎関数 $v_0(t)$ を**主要汎関数** (importance functional) とよぶ。

主要汎関数は一つの共立な関数 $g(t)$ を基準にして、他の正の共立関数 $f(t)$ との漸近的な比例係数を与えるものであり、以下が成り立つ ([13], 定理 D.8)：

$$|f(t) - \langle v_0^*(s), f(s)\rangle g(t)| \le \epsilon(t) g(t), \quad \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = 0 \tag{4.20}$$

ここで $\epsilon(t)$ はスカラー関数で、基準となる $g(t)$ を変えれば $v_0^*(t)$ も変わるが、それらはお互いに比例しているから、本質的にはただ一つの主要汎関数がさだまる。

補題 4.5 半開区間 $0 \le s \le t < \infty$ において $U^*(s,t)$ と共立な汎関数は、定数倍を除けば主要汎関数だけである。

証明： $v^*(t)$ を任意の共立汎関数とすれば、(4.20) から

$$|\langle v^*(t), f(t)\rangle - \langle v_0(s), f(s)\rangle\langle v^*(t), g(t)\rangle| \le \epsilon(t)\langle v^*(t), g(t)\rangle$$

補題 4.4 から $\langle v^*(t), f(t)\rangle$, $\langle v^*(t), g(t)\rangle$ は一定値であるから、

$$|\langle v^*(s), f(s)\rangle - \langle v_0(s), f(s)\rangle\langle v^*(s), g(s)\rangle| \le \epsilon(t)\langle v^*(s), g(s)\rangle$$

$t \to \infty$ で $\epsilon(t) \to 0$ であるから、

$$\langle v^*(s), f(s)\rangle = \langle v_0(s), f(s)\rangle\langle v^*(s), g(s)\rangle$$

がすべての $s \ge 0$ で成り立つ。$f(s)$ は任意にとれるから、

$$v^*(s) = \langle v^*(s), g(s)\rangle v_0^*(s)$$

となっていなければならない。$\langle v^*(s), g(s)\rangle$ は定数であるから、v^* は v_0^* に比例している。(証明終)

特に周期系のように指数関数解 $e^{\lambda t}\phi(t)$ が存在すれば、それを基準として用いることで、

$$|f(t) - \langle v_0^*(s), f(s)\rangle e^{\lambda t}\phi(t)| \le \epsilon(t) e^{\lambda t}\phi(t)$$

ここで $\phi(t)$ は有界だから、

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} f(t) = \langle v_0^*(s), f(s)\rangle\phi(t) \tag{4.21}$$

となる。すなわち、周期系では発展方程式の解は漸近的に指数関数と周期関数の積に書けることになる。

定理 4.6 $v^*(s,a)$ が $U^*(s,t)$ と共立であるためには以下が成り立つことが必要十分である；

$$v^*(s,a) = \int_a^\omega v^*(s+y-a, 0) M(s+y-a, y) L(y-a; s, a) dy \tag{4.22}$$

[*10] $0 \le s$ としたのは便宜的で、時間原点はどこでもよい。