

arrhythmia [6,16] of heart rate depending strongly on parasympathetic nervous activity.

Thus, the time trajectories of those functions averaged over the low and the high frequency bands can be obtained. Let  $K^2(\text{LF})$ ,  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{LF})$ ,  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{LF})$ ,  $K^2(\text{HF})$ ,  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{HF})$  and  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{HF})$  denote the corresponding averaged functions by marking “(LF)” or “(HF)” to make a distinction between the two frequency bands.

**3. Results**

All subjects were classified into three groups according to following rules:

- Among three categories (Total, Nausea, and Oculomotor), the number of subjects of each group, High, Medium, and Low must be same.
- In each category, the number of subjects of each group, High, Medium, and Low should be close to each other as soon as possible.

Table 1 shows the number of subjects, the average value, and the standard deviation of the SSQ score in each group. In the table, for example, Group-A1 and Group-A3 can be regarded as a sick group and a well group, respectively.

Fig. 3 shows the mean time trajectories, averaged over 18 subjects, of (a)  $K^2(\text{LF})$ , (b)  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{LF})$ , and (c)  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{LF})$ , compared between Groups-A1 and A3. The shadow depicted in the figure represents the time period in which there was a significant difference between the two groups for more than two consecutive points (more than 20 s). The significant test was followed by Welch’s *t*-test with a 5% significant level.

This figure indicates that all three kinds of coherence functions of Group-A1 were lower than those of Group-A3 at many points of time and that these differences were significant at some points of time in watching the video. The significant differences in  $K^2(\text{LF})$  and  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{LF})$  were observed at the latter part of the video (after  $t = 800$  s). On the other hand, that in  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{LF})$  was observed at the middle part of the video (around  $t = 480$  s).

In the same way as the case of Groups-A1 and A3, the top 18 subjects with high nausea score (NS) of the SSQ and

the bottom 18 subjects with low NS were categorized into Groups-B1 and B3, respectively (Table 1). The comparison between these two groups is shown in Fig. 4. Moreover, Fig. 5 shows the comparison between Groups-C1 and C3 whose members were, in the same way, chosen on the basis of the oculomotor score (OS).

These comparisons shown in Figs. 4 and 5 resulted in roughly similar trends to the comparison between Groups-A1 and A3 shown in Fig. 3. However, there was no significant difference in  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{LF})$  between Groups-B1 and B3 and between Groups-C1 and C3 at the latter part of the video. Moreover, the difference in the whole coherence function  $K^2(\text{LF})$  was not so large as that between Groups-A1 and A3.

Fig. 6 shows the mean time trajectories, averaged over 18 subjects, of (a)  $K^2(\text{HF})$ , (b)  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{HF})$ , and (c)  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{HF})$ , compared between Groups-A1 and A3. In this figure,  $K^2(\text{HF})$  and  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{HF})$  of both groups decreased gradually from the middle part of the trial (after  $t = 500$  s). However,  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{HF})$  of Group-A3 did not change so much while that of Group-A1 decreased. Thus, the difference in  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{HF})$  between Groups-A1 and A3 became significant at the latter part of the video. In addition, this difference was observed even after watching the video image.

**4. Discussion**

As shown in Table 1, the male–female ratio in the sick group was almost the same as in the well group. Some previous studies have reported that motion sickness is more common among women than men [4,11]. At the same time, the sensitivity to motion sickness varies by subjects’ habituation to the visual appearance of motion [10]. However, there is no difference in the frequency of the exposure to visual stimulation, which is the result of questionnaire about the frequency of watching television in daily life, between the groups. In this experiment, the number of subjects was not so large that the difference in the VIMS rate between the sexes was not significant.

Low linearity in the baroreflex system implies that heart rate varies independently of blood pressure and/or blood pressure varies independently of heart rate. Fig. 3 suggests that the linearity of the sick group (Group-A1) tends to be lower than that of the well group (Group-A3). Especially at around  $t = 900$  s, there were significant differences both in  $K^2(\text{LF})$  and  $K^2_{\text{HR} \rightarrow \text{SBP}}(\text{LF})$  between the groups while  $K^2_{\text{SBP} \rightarrow \text{HR}}(\text{LF})$  had little difference. This means that blood pressure tended to change independently of heart rate in the sick group. Such situation may happen when blood pressure is mainly determined by the peripheral vascular resistance rather than by heart rate. As well as heart rate, the peripheral vascular resistance is manipulated by the autonomic nervous system to regulate blood pressure. Consequently, it seems that the subjects in the sick group suffered from VIMS by watching the swaying video image, and then, their vasomotor activity controlled by the auto-

Table 1  
The number of subjects, an average and a standard deviation of the score, Total, Nausea, or Oculomotor, in each group

	<i>n</i> (male, female)	Score	Average	SD
Group-A1	18 (11, 7)	Total	38.5	13.9
Group-A2	20 (14, 6)	Total	14.8	4.8
Group-A3	18 (9, 9)	Total	4.2	2.4
Group-B1	18 (11, 7)	Nausea	81.6	36.9
Group-B2	20 (14, 6)	Nausea	29.1	7.9
Group-B3	18 (9, 9)	Nausea	9.0	7.7
Group-C1	18 (11, 7)	Oculomotor	83.5	17.8
Group-C2	20 (13, 7)	Oculomotor	24.4	8.0
Group-C3	18 (10, 8)	Oculomotor	3.1	7.5

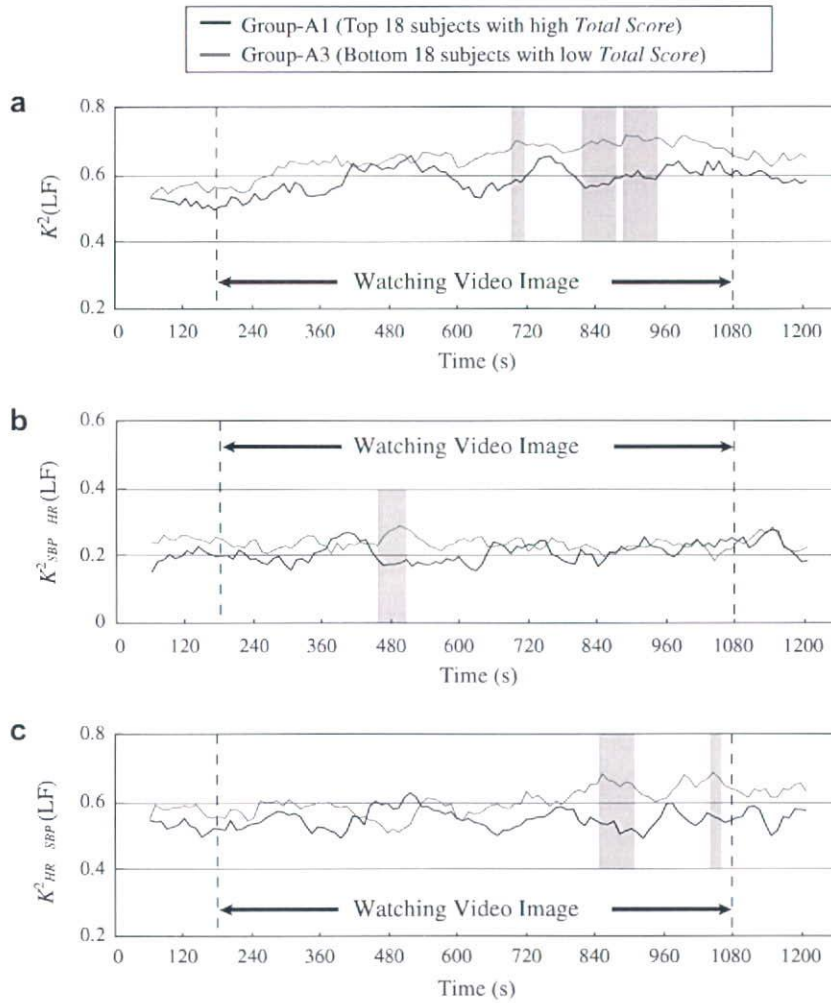


Fig. 3. Changes in (a)  $K^2$ , (b)  $K^2_{SBP-HR}$ , and (c)  $K^2_{HR-SBP}$  with time in the low frequency band (0.05–0.15 Hz). In each figure, Group-A1 (top 18 subjects with high Total Score) and Group-A3 (bottom 18 subjects with low Total Score) are compared with each other. The shadow in the figure represents the time period when there is a significant difference (*t*-test,  $p < 0.05$ ) between the two groups for more than two consecutive points (more than 20 s).

onomic nervous system was disturbed to decrease  $K^2(LF)$  and  $K^2_{HR-SBP}(LF)$  whose frequencies correspond to the Mayer wave.

Previous studies [13,15] reported that nausea scores obtained from subjects watching a swaying visual image for 5 min or so were not high. This agrees with our result that the difference in  $K^2(LF)$  or  $K^2_{HR-SBP}(LF)$  between Groups-A1 and A3 shown in Fig. 3 became significantly wider after about 10 min from the beginning of presentation of the video.

On the other hand, as shown in Fig. 3b, a significant difference in  $K^2_{SBP-HR}(LF)$  between the two groups was observed before 10 min. Yoshino [26] reported that the mean value of  $K^2_{SBP-HR}(LF)$  during acute restraint stress was significantly lower than during the baseline period. In our earlier study [24], a subject who is prone to motion sickness had a tendency that his physiological index changed immediately after the beginning of presentation of the unstable video. This change may be not exactly caused by

VIMS but by an emotional or psychological reaction in which he reflexively felt repulsive to avoid seeing such an uncomfortable video. This suggests that the proposed indices cannot distinguish the physiological symptoms of VIMS from the psychological reactions. However, the reactions must be correlated with VIMS such that the reactions may have a significant difference between the motion sick group and the well group. Consequently, it is possible that there was a factor for giving the subjects mental stress at this point of time in the video, and this mental stress may be linked to symptom onset of VIMS, in other words, this may be a triggering phenomenon of VIMS.

Comparison between Groups-B1 and B3 (grouping with NS) shown in Fig. 4 and that between Groups-C1 and C3 (grouping with OS) shown in Fig. 5 are similar to each other and to the result of grouping with Total Score (TS) shown in Fig. 3. This indicates that both nausea and eye-strain affect the autonomic nervous activity in a similar manner, but at the same time, it is difficult to distinguish



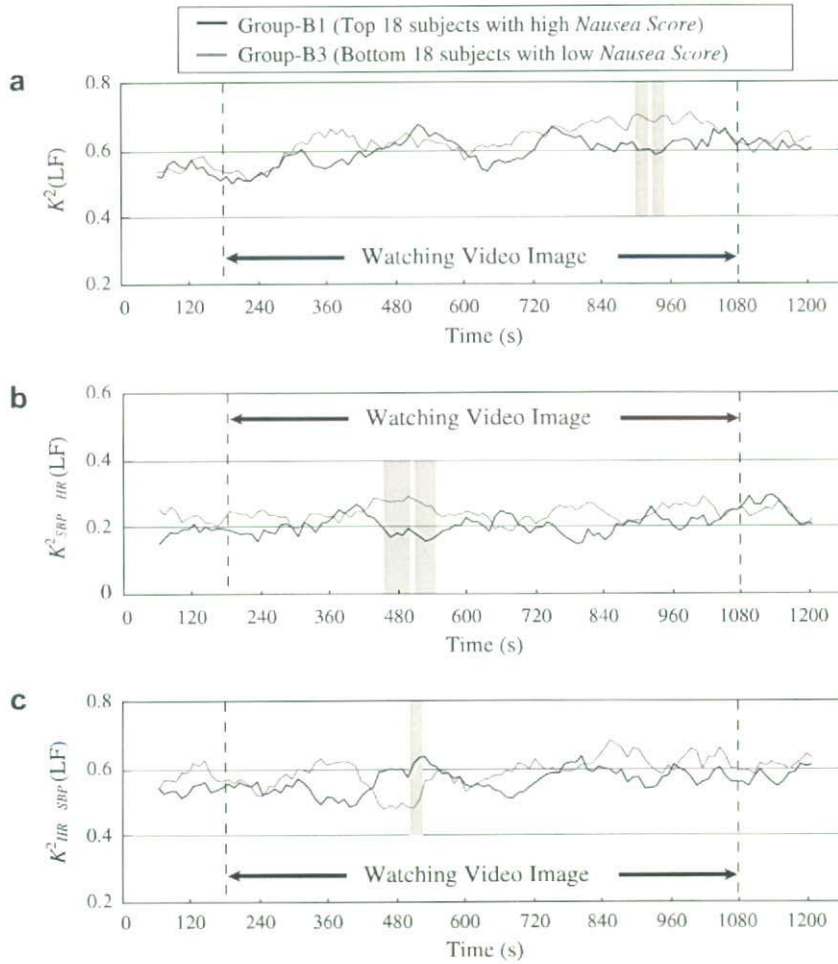


Fig. 4. Changes in (a)  $K^2$ , (b)  $K^2_{\text{SBP-HR}}$ , and (c)  $K^2_{\text{HR-SBP}}$  with time in the low frequency band (0.05–0.15 Hz). In each figure, Group-B1 (top 18 subjects with high Nausea Score) and Group-B3 (bottom 18 subjects with low Nausea Score) are compared with each other. The shadow in the figure represents the time period when there is a significant difference (*t*-test,  $p < 0.05$ ) between the two groups for more than two consecutive points (more than 20 s).

between the effects of nausea and eyestrain only by using the proposed indices.

Contrary to the coherence function in the low frequency band, both  $K^2(\text{HF})$  and  $K^2_{\text{SBP-HR}}(\text{HF})$  shown in Figs. 6a and b decreased gradually but had little difference between the sick and the well groups. This means that their decreasing patterns are not related to VIMS but possible to be the effect of fatigue and/or physiological stress for watching. The significant difference in  $K^2_{\text{HR-SBP}}(\text{HF})$  found in Fig. 6c can be considered to be the effect of profound fatigue caused by VIMS. Meanwhile the corresponding high frequency components are affected by respiration so strongly that the relationship between the respiratory pattern and the symptoms of VIMS should be considered in terms of parasympathetic nervous activity [3,9].

In the past finding reported by the authors [27,23], it was shown that the maximum cross-correlation coefficient ( $\rho_{\text{max}}$ ) between blood pressure and heart rate whose frequency components were limited to the Mayer-wave band was a good index for quantifying the effect of visual stim-

ulation on humans. Namely,  $\rho_{\text{max}}$  of the subjects who were prone to motion sickness was recovered more slowly than that of the subjects who were not prone after watching an exciting scene such as a falling scene of a roller coaster. It is obvious that  $\rho_{\text{max}}$  is mathematically roughly equivalent to  $K^2(\text{LF})$ . It has already been ascertained that the two indices have nearly the same trajectories as each other. However,  $\rho_{\text{max}}$  is slightly more stable in numerical calculation than  $K^2(\text{LF})$ .

The present study has indicated that the technique using coherence functions could quantitatively evaluate the effect of VIMS. However, the subject reported symptoms of VIMS after watching the video, and then it is unlikely that the physiological data we obtained reflects moment-to-moment symptoms of VIMS.

To untangle this concern, SSQ data should be obtained continuously and compared with physiological data. But there are some problems to obtain subjective data in measuring physiological parameters because the motion of the subject's body to answer questionnaires, such as vocaliza-

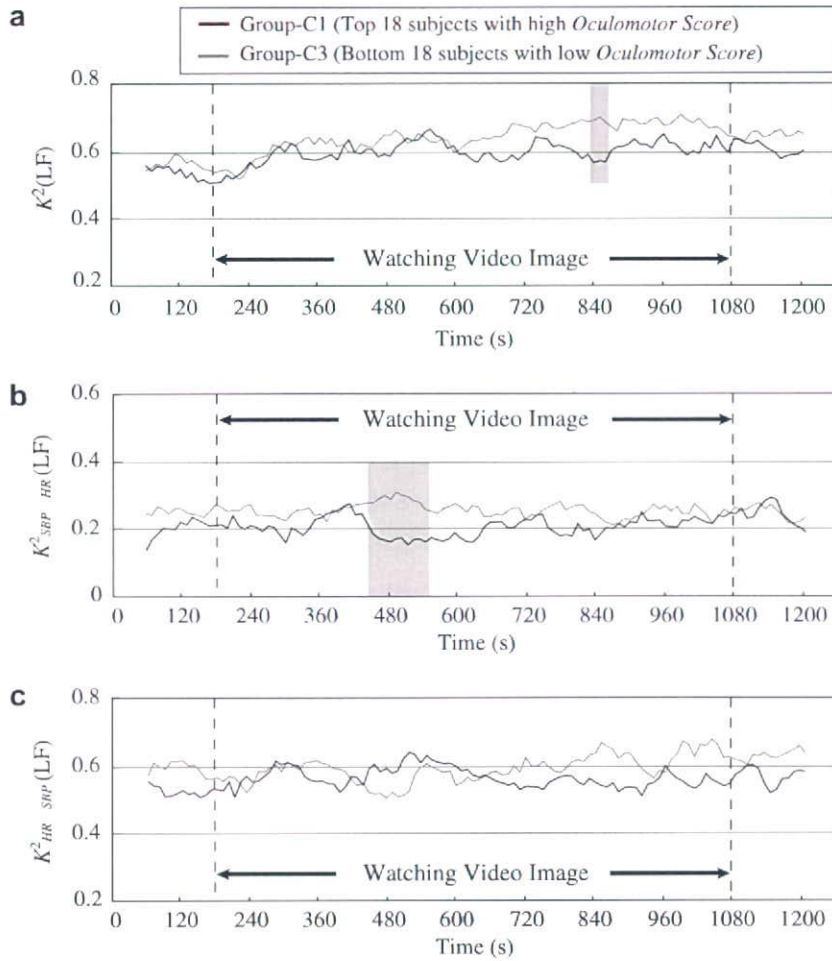


Fig. 5. Changes in (a)  $K^2$ , (b)  $K^2_{SBP-HR}$ , and (c)  $K^2_{HR-SBP}$  with time in the low frequency band (0.05–0.15 Hz). In each figure, Group-C1 (top 18 subjects with high Oculomotor Score) and Group-C3 (bottom 18 subjects with low Oculomotor Score) are compared with each other. The shadow in the figure represents the time period when there is a significant difference (*t*-test,  $p < 0.05$ ) between the two groups for more than two consecutive points (more than 20 s).

tion or hand motion, would affect these parameters. For the future, we should develop a new method of subjective assessment which has little influence on the physiological parameters.

Furthermore, in this study, we focused on how the autonomic nervous activity of the subject who complained about VIMS had been changing while watching the video. The result of the experiment was statistically-meaningful but it is difficult to judge whether a person felt VIMS or not only by seeing his physiological data obtained from the proposed method. To do this, it should be needed to obtain much more parameters and analyze their time varying patterns.

### 5. Conclusion

To evaluate the effect of VIMS on humans, blood pressure and heart rate variability of 56 healthy subjects watching an unstable video image were analyzed by using not only a traditional coherence function but also two causal

coherence functions. The causal coherence functions have a capability of calculating linear correlation between two systems independently even if the systems are connected with each other to compose a closed-loop system such as the cardiovascular system. The results have shown that there were significant differences in the causal coherence functions as well as the traditional coherence function between the sick and the well groups and that the causal coherence functions of the two systems, i.e., the neural baroreflex system and mechanical hemodynamic system, gave different information from the traditional coherence function with respect to the whole closed-loop system. These findings suggest that the hemodynamic system was mainly disturbed by VIMS rather than the baroreflex system and that the causal coherence functions will be useful and objective means to quantify VIMS as functions of time.

In further studies, it is necessary to check the effect of changes not only in audiovisual environment, for example, angle of view, distance from a screen, and luminosity, but also in the subject's characteristics such as age, gender, fre-



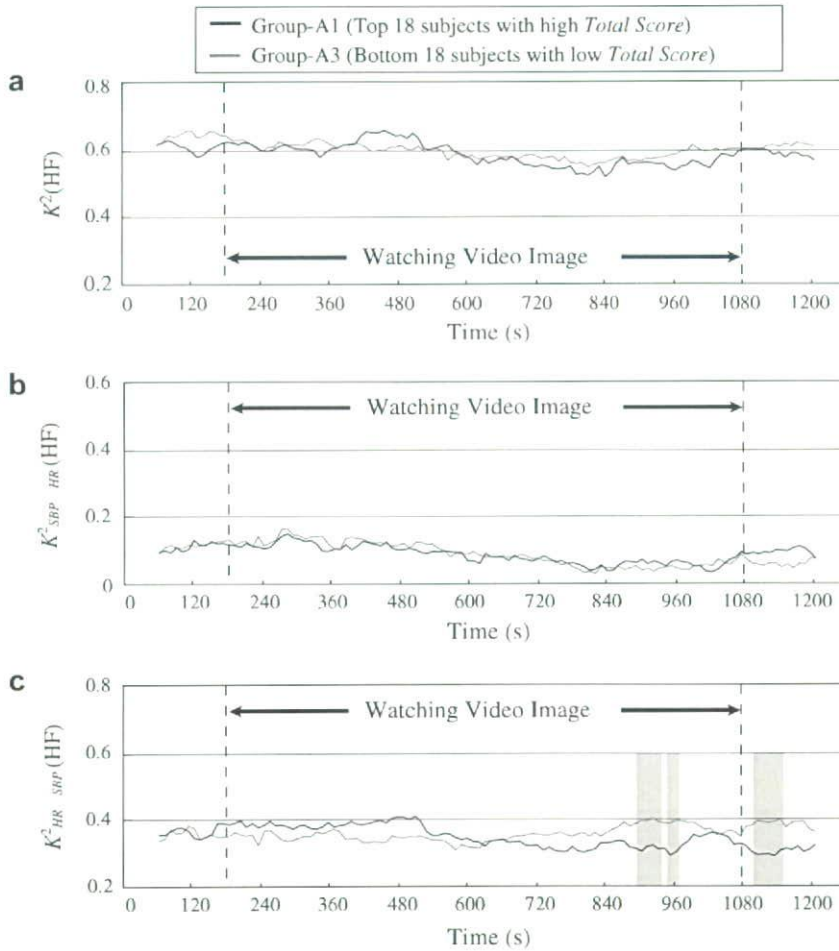


Fig. 6. Changes in (a)  $K^2$ , (b)  $K^2_{\text{SBP-HR}}$ , and (c)  $K^2_{\text{HR-SBP}}$  with time in the high frequency band (0.15–0.45 Hz). In each figure, Group-A1 (top 18 subjects with high Total Score) and Group-A3 (bottom 18 subjects with low Total Score) are compared with each other. The shadow in the figure represents the time period when there is a significant difference ( $t$ -test,  $p < 0.05$ ) between the two groups for more than two consecutive points (more than 20 s).

quency of watching TV or driving a car, and so on. Moreover, we should check the effect of respiratory pattern on our analysis. This is because it was reported that the change in instantaneous lung volume gives not negligible effect on the activity of the cardiovascular system even if the frequency range of interest is not so high as the frequency of the respiratory sinus arrhythmia [14].

We should analyze data from more subjects to confirm the validity of the proposed method. If the change in the physiological parameters significantly correlate with the result of subjective evaluation of VIMS for more subjects, it will be possible to apply this method to a new warning machine to alert the risk of VIMS to the viewers in a real-time fashion. Furthermore, we should improve the method by using multiple parameters.

## References

- [1] H. Akaike, A new look at the statistical accuracy, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-19 (1974) 716–723.
- [2] G. Baselli, S. Cerutti, F. Badilini, L. Biancardi, A. Porta, M. Pagani, F. Lombardi, O. Rimoldi, R. Furlan, A. Malliani, Model for the assessment of heart period and arterial pressure variability interactions and respiratory influences, *Medical and Biological Engineering and Computing* 32 (1994) 143–152.
- [3] G.G. Berntson, J.T. Cacioppo, K.S. Quigley, Respiratory sinus arrhythmia: autonomic origins physiological mechanisms and psychophysiological implications, *Psychophysiology* 30 (1993) 183.
- [4] F. Biocca, Will simulation sickness slow down the diffusion of virtual environment technology? *Presence* 1 (3) (1992) 334–343.
- [5] C.T. Bonnet, E.M. Faugloire, M.A. Riley, B.G. Bardy, T.A. Stoffregen, Motion sickness preceded by unstable displacements of the center of pressure, *Human Movement Science* 25 (6) (2006) 800–820.
- [6] S. Cerutti, G. Baselli, A. Bianchi, M.G. Signorini, Spectral Techniques of Analysis for Blood Pressure and Heart Rate Signals, *Blood Pressure and Heart Rate Variability*, IOS Press, 1992, pp. 39–55.
- [7] M.A. Cohen, J.A. Taylor, Short-term cardiovascular oscillations in man: measuring and modeling the physiologies, *Journal of Physiology* 542 (3) (2002) 669–683.
- [8] R. Cowie, G. Hale (Producer), D. Myrick, E. Sanchez (Director), *The Blair Witch Project*, USA, 1999.
- [9] J. Hayano, Y. Sakakibara, A. Yamada, Accuracy of assessment of cardiac vagal tone by heart rate variability in normal subjects, *American Journal of Cardiology* 67 (1991) 199–204.

- [10] K.J. Hill, P.A. Howarth, Habituation to the side effects of immersion in a virtual environment, *Displays* 21 (1) (2000) 25–30.
- [11] S.R. Holmes, M.J. Griffin, Correlation between heart rate and the severity of motion sickness caused by optokinetic stimulation, *Journal of Psychophysiology* 15 (1) (2001) 35–42.
- [12] R.S. Kennedy, N.E. Lane, K.S. Berbaum, M.G. Lilienthal, Simulation Sickness Questionnaire: an enhanced method for quantifying simulator sickness, *International Journal of Aviation Psychology* 3 (3) (1993) 203–220.
- [13] W.T. Lo, R.H.Y. So, Cybersickness in the presence of scene rotational movements along different axes, *Applied Ergonomics* 32 (2001) 1–14.
- [14] T.J. Mullen, M.L. Appel, R. Mukkamala, J.M. Mathias, R.J. Cohen, System identification of closed-loop cardiovascular control: effect of posture and autonomic blockade, *American Journal of Physiology* 272 (Heart Circuit Physiology 41) (1997) 448–461.
- [15] M. Ohmi, H. Ujike, Self-orientation and motion sickness which is induced by visual information, *BME* 18 (1) (2004) 32–39 (in Japanese).
- [16] M. Pagani, F. Lombardi, S. Guzzetti, O. Rimoldi, R. Furlan, P. Pizzinelli, G. Sandrone, G. Malfatto, S. Dell'Orto, E. Piccaluga, Power spectral analysis of heart rate and arterial pressure variabilities as a marker of sympatho-vagal interaction in man and conscious dog, *Circulation Research* 59 (2) (1986) 178–193.
- [17] W.M. Paulus, A. Straube, Th. Brandt, Visual stabilization of posture: physiological stimulus characteristics and clinical aspects, *Brain* 107 (1984) 1143–1163.
- [18] B. Pomeranz, R.J.B. Macaulay, M.A. Caudill, Assessment of autonomic function in humans by heart rate spectral analysis, *American Journal of Physiology* 248 (1985) H151–H153.
- [19] A. Porta, R. Furlan, O. Rimoldi, M. Pagani, A. Malliani, P. van de Borne, Quantifying the strength of the linear causal coupling in closed loop interacting cardiovascular variability signals, *Biological Cybernetics* 86 (2002) 241–251.
- [20] L.J. Smart Jr., T.A. Stoffregen, B.G. Bardy, Visually induced motion sickness predicted by postural instability, *Human Factors* 44 (3) (2002) 451–465.
- [21] T.A. Stoffregen, L.J. Hettinger, M.W. Haas, M. Roe, L.J. Smart, Postural instability and motion sickness in a fixed-base flight simulator, *Human Factors* 42 (2000) 458–469.
- [22] T.A. Stoffregen, L.J. Smart Jr., Postural instability precedes motion sickness, *Brain Research Bulletin* 47 (5) (1998) 437–448.
- [23] N. Sugita, M. Yoshizawa, A. Tanaka, K. Abe, T. Yambe, S. Nitta, Evaluation of effect of visual stimulation on humans based on maximum cross-correlation coefficient between blood pressure and heart rate, *Journal of Human Interface Society of Japan* 4 (4) (2002) 39–46 (in Japanese).
- [24] N. Sugita, M. Yoshizawa, A. Tanaka, K. Abe, T. Yambe, S. Nitta, S. Chiba, Biphasic response of autonomic nervous system to visually-induced motion sickness, *Transactions of the Virtual Reality Society of Japan* 9 (4) (2004) 369–376 (in Japanese).
- [25] H. Ujike, K. Ukai, K. Nihei, Survey on motion sickness-like symptoms provoked by viewing a video movie during junior high school class, *Displays* 29 (2) (2008) 81–89.
- [26] K. Yoshino, M. Hayakawa, E. Niki, K. Matsuoka, Closed-loop analysis of cardiovascular variability in rats under restraint stress, *Autonomic Neuroscience* 119 (1) (2005) 61–66.
- [27] M. Yoshizawa, N. Sugita, A. Tanaka, K. Abe, T. Yambe, S. Nitta, Quantitative and physiological evaluation of three dimensional images, in: *Proceedings of the Seventh International Conference on Virtual Systems and Multimedia*, Berkeley, CA, USA, 2001, pp. 864–871.



# 混合体理論に基づく冠循環数理モデルの定式化\*

陳献\*<sup>1</sup>, 杉浦清了\*<sup>2</sup>, 砂川賢二\*<sup>3</sup>, 久田俊明\*<sup>4</sup>

## Formulation of the Theoretical Model of Coronary Circulation Based on Mixture Theory

Xian CHEN\*<sup>5</sup>, Seiryō SUGIURA, Kenji SUNAGAWA, Toshiaki HISADA

\*<sup>5</sup> Digital Medicine Initiative, Kyushu University  
3-1-1 Maidashi, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8582, Japan

The disorder of the coronary circulation system, which supplies blood for the working heart, may cause ischemic heart disease such as myocardial infarction, angina pectoris. On the other hand, the interaction between intramyocardial pressure and coronary blood flow is recognized to be an important factor that influences the hemodynamics of coronary circulation. In this work, a multiphase model for coronary circulation system is proposed based on mixture theory by treating the myocardial matrix and the blood in hierarchical coronary system as solid phase and multi-fluid phase respectively. The control equations and constitutive relations have been derived by applying conservation laws and entropy inequality in the framework of mixture theory. The microscopic properties, such as the viscosity of blood or the compliance of the micro vessel are represented by their macroscopic counterparts. The abilities of representing the characteristic behavior of coronary system have been confirmed by numerical examples.

*Key Words* : Biomechanics, Medical Engineering, Finite Element Method, Coronary Circulation, Mixture Theory

### 1. 緒 言

休みなく働く心臓のエネルギー源としての心筋への血液供給は冠循環によって行われており、冠循環の障害は虚血性心疾患と呼ばれる心筋梗塞、狭心症などの重篤な結果をもたらすため、冠循環メカニズムの解明は臨床学上重要な意義を持っている。冠循環における血管システムは冠動脈・冠静脈及び細動脈・細静脈からなるツリー構造と毛細血管の非ツリー構造に分類できる。心筋に占めるツリー構造血管の容積率が約1～2%に対し、毛細血管の容積率が10%以上にも達するため、拡張期に冠動脈から流入する血液を貯蔵する役割は主に毛細血管が担っているといえる。また、心筋の収縮・拡張が心筋内冠血管に与える外圧の変化を通じて血流の分布に大きな影響を及ぼすことも知られており、冠動脈と冠静脈血流の位相の逆転などとして認識されている。このようなメカニズムは細血管と毛

細血管及びそれらを取り巻く心筋組織の微視的構造に依存しており、臨床応用を目指した冠循環モデルはこのような解剖学的特徴を反映できることが要求される。

従来、冠動脈血流が拡張期に主に流れ逆に冠静脈血流が収縮期に流れること、心筋内層から外層に向かう収縮期における逆流の存在などの現象を説明するため、主に電気回路モデルが用いられてきた。しかし、このようないわゆる現象論的モデルでは回路の抵抗やキャパシタンスを調整することによりある程度上述のような現象を説明可能であるが、実際の物理現象、特に毛細血管による心筋内血液容量調節機能の解明には至らない。一方、心筋内全ての血管を構造としてモデル化し流体力学解析によって冠循環における血行動態を解析することも原理的には可能であるが、冠循環に寄与する血管は無数にあるため計算量を考慮すれば現実的ではない。

一方、一種のマルチスケール解析手法として、マクロ的対象物をミクロ的各成分からなる混合体とみなし、ミクロ成分間の相互作用の平均的特性をマクロ的挙動に反映させる混合体理論<sup>(1)</sup>を生体シミュレーションに導入するアプローチが提案されている<sup>(2)</sup>。本研究では冠循環のメカニズムを解明するため多相混合体理

\*原稿受付 0000年00月00日

<sup>1</sup> 正員、九州大学デジタルメディシン・イニシアティブ  
(〒812-8582 福岡市東区馬出3-1-1)

<sup>2</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科

<sup>3</sup> 九州大学大学院医学研究院

<sup>4</sup> 正員、東京大学大学院新領域創成科学研究科

E-mail: xchen@digital.med.kyushu-u.ac.jp

論の導入を提案する。即ち、冠循環血管システムの各階層（冠動脈・冠静脈、小動脈・小静脈、細動脈・細静脈、毛細血管）における寸法など構造の違い及び動脈系と静脈系が直接連結せず透過性を持つ毛細血管經由で血液を交換することを考慮して、冠循環系各階層の血管システムが空間的にはほぼ連続的に分布していると仮定し、心室壁を各階層の血液による異なる流体相及び心筋基質による固体相からなる多相混合体とみなす。このモデルでは各階層の血管系における空間的血液流れに対する抵抗は各流体相と固体相間の相互作用を表す透過率(permeability), さらに各階層間の血液交換に対する抵抗を転送係数(transfer coefficient)として定量化され、また、各階層血管のコンプライアンスを導入することにより、動脈硬化や血栓などによる冠循環障害の病態を数理的に表現することが可能となる。さらに、各階層の血管系が心筋基質からの収縮期・拡張期に対応した圧力をうけ、その容積率も心筋の体積変化と直接関連つけられるため、心周期における心筋内血流の貯留・排出や sloss 現象など血流形態を再現することができる。混合体理論に基づく冠循環モデルに関する研究としては Huyghe<sup>(3)</sup> が提案した階層型混合体モデルが挙げられるが、構成則の導入は強引に有効応力の導入によって行われているため、流体相の構成則については明確に定義されていない。本論文ではまず上記の階層的多相混合体に基づく冠循環数理モデルの定式化を行い、数値解析例を通じて提案したモデルの有効性について検証を行う。

## 2. 冠循環数理モデルの支配方程式

混合体理論では、各相が同時に同じ空間位置を占めているとして、着目する任意の空間微小体積には各相が連続的に分布し、且つ物理的特性が均一的であり、各相における質量、運動量、エネルギー保存則及び熱力学第二法則が成り立つと仮定している。小動脈、小静脈より細い血管及び毛細血管がほぼ心筋内に満遍なく分布しているため、図1に示すように心筋基質を固体相、各階層の血液を異なる流体相とすれば、心臓壁に多相混合体の仮定が適用できると考えられる。

混合体微小体積  $dv$  に対する固体相微小体積  $dv^s$  及び  $i$  階層流体相微小体積  $dv^{f^i}$  の比を体積率  $\phi^s$  及び  $\phi^{f^i}$  として定義し、

$$\phi^s = \frac{dv^s}{dv}, \quad \phi^{f^i} = \frac{dv^{f^i}}{dv} \quad (1)$$

飽和状態では

$$\sum \phi^\alpha = 1 \quad (\alpha = s, f^1, f^2, \dots, f^n) \quad (2)$$

の関係を満たしている。また、混合体体積における各相の見かけの質量密度(apparent density)  $\rho^\alpha$  は実質質量密度(true density)  $\rho_T^\alpha$  から次のように定義される。

$$\rho^\alpha = \phi^\alpha \rho_T^\alpha \quad (3)$$

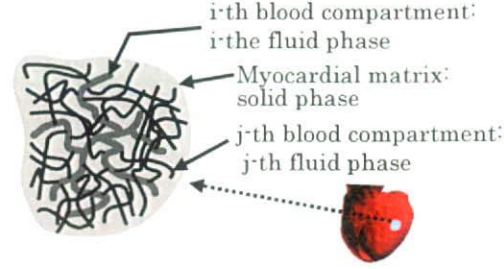


Fig. 1 Mixture model of heart wall

### 2.1 質量保存則

連続体力学理論より、他相との質量交換  $\xi^\alpha$  を考慮した  $\alpha$  相に関する質量保存則は次のように導かれる。

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \xi^\alpha \quad (4)$$

固体相と流体相の間で化学反応などによる質量交換を生じないと仮定すれば

$$\xi^s = 0, \quad \sum_{f^i} \xi^{f^i} = 0 \quad (5)$$

が得られる。

### 2.2 運動量保存則

他相からの質量流入に伴う運動量増加率  $\xi^\alpha \mathbf{v}^\alpha$  及び固体相との相互作用力  $\boldsymbol{\pi}^\alpha$  を考慮した  $\alpha$  相に関する運動量保存則は次式で与えられる。

$$\rho^\alpha \frac{D^{(\alpha)} \mathbf{v}^\alpha}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \boldsymbol{\pi}^\alpha \quad (6)$$

$\mathbf{v}^\alpha$ 、 $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  及び  $\mathbf{b}^\alpha$  はそれぞれ  $\alpha$  相の速度、応力及び体積力を表わしている。混合体理論では、混合体全体も連続体に関する保存則を満たすと仮定している。これを混合体全体の運動量保存に適用すると次の条件が導かれる。

$$\sum_\alpha (\boldsymbol{\pi}^\alpha + \xi^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = 0 \quad (7)$$

一方、各階層の流体相が同一であるため、血液全体を一つの流体相とすると、同様に式(7)と類似した関係が得られ、

$$\boldsymbol{\pi}^s + \boldsymbol{\pi}^f + \xi^s \mathbf{v}^s + \xi^f \mathbf{v}^f = 0 \quad (8)$$



固体相と流体相間の質量交換がないため、質量保存則より  $\xi^s = 0$  及び  $\xi^f = 0$  となり、これを流体相の固体相から受ける作用力  $\pi^f = \sum \pi^f$  の関係とともに式(8)に代入し、式(7)と比較すると  $\sum \xi^\alpha \mathbf{v}^\alpha = 0$  が得られ、式(7)が次のようになる。

$$\sum \pi^\alpha = 0 \quad (9)$$

混合体理論では、各成分の応力以外に、各相間の拡散による運動量の変化が混合体の応力に寄与するとして、拡散速度

$$\mathbf{u}^\alpha \equiv \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v} \quad (10)$$

を用いて混合体応力は次式によって与えられる<sup>(1)</sup>。

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum \left( \boldsymbol{\sigma}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha \right) \quad (11)$$

但し、

$$\mathbf{v} = \frac{\sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha}{\sum \rho^\alpha} \quad (12)$$

は混合体質量中心の速度である。一般的な生理学的問題では拡散速度が低く、その2次項を無視できるため、混合体応力は次式で表すことができ、

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \boldsymbol{\sigma}^s + \sum \boldsymbol{\sigma}^f \quad (13)$$

式(9)を考慮して、式(6)を各相について総和をとることにより、混合体の運動方程式が次のように得られる。

$$\sum \rho^\alpha \frac{D^{(\alpha)} \mathbf{v}^\alpha}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \quad (14)$$

### 2・3 エネルギー保存則

他相からの質量流入に伴う内部エネルギー  $\varepsilon^\alpha$  及び運動エネルギー密度  $\mathbf{v}^{\alpha 2} / 2$  の増加率、他相から受ける作用力による機械的仕事率  $\pi^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha$  及び他相との内部エネルギー密度の交換  $\hat{\varepsilon}^\alpha$  を考慮して、 $\alpha$  相に関するエネルギー保存則が次式によって表される。

$$\rho^\alpha \frac{D^{(\alpha)} \varepsilon^\alpha}{Dt} = \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{L}^\alpha - \nabla \cdot \mathbf{q}^\alpha + r^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha \quad (15)$$

但し、 $\mathbf{L}^\alpha$  は変形速度勾配テンソル、 $\mathbf{q}^\alpha$  及び  $r^\alpha$  は混合体表面からの熱流及び内部熱源密度である。さらに、混合体全体のエネルギー保存より次の条件式が導かれる。

$$\sum \left[ \left( \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}^{\alpha 2} \right) \xi^\alpha + \pi^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha \right] = 0 \quad (16)$$

ここでは準静的問題として運動エネルギーを無視し、また熱力学的均一状態を仮定すれば、式(5)を利用して

$$\sum \xi^\alpha \varepsilon^\alpha = \left( \sum \xi^\alpha \right) \varepsilon = 0 \quad (17)$$

となるため、式(16)が次のようになる。

$$\sum \left( \pi^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha + \hat{\varepsilon}^\alpha \right) = 0 \quad (18)$$

### 2・4 エントロピー不等式

混合体内温度  $T$  の分布が均一であると仮定し、単位質量のエントロピー密度を  $s^\alpha$  として、他相からの質量流入に伴うエントロピーの流入率  $\xi^\alpha s^\alpha$  を考慮した混合体全体のエントロピー不等式が次のようになる。

$$T \sum \rho^\alpha \frac{D^{(\alpha)} s^\alpha}{Dt} \geq \sum -\nabla \cdot \mathbf{q}^\alpha + \sum \rho^\alpha r^\alpha \quad (19)$$

さらに、エネルギーの保存則(15)及び条件式(18)を導入して熱エネルギー及び内部エネルギーに関する項を消去し、温度の時間的変化を無視して次式で定義される Helmholtz 自由エネルギー

$$\Phi^\alpha = \varepsilon^\alpha - T s^\alpha \quad (20)$$

を用いると、式(19)が次のようになる。

$$-\sum \rho^\alpha \frac{D^{(\alpha)} \Phi^\alpha}{Dt} + \sum \boldsymbol{\sigma}^\alpha : \mathbf{L}^\alpha - \sum \pi^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha \geq 0 \quad (21)$$

### 2・5 非圧縮条件

質量保存の式(4)に式(3)を代入し、心筋基質及び血液の非圧縮性仮定

$$\frac{D^{(\alpha)} \rho_T^\alpha}{Dt} = 0 \quad (22)$$

を利用すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \theta^\alpha \quad (23)$$

ここで

$$\theta^\alpha = \xi^\alpha / \rho_T^\alpha \quad (24)$$

は単位混合体体積における  $\alpha$  相に流入した体積を表している。式(23)を各流体相について総和を取り、さらに式(5)及び飽和条件式(2)を導入することにより次式が導かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^s + \sum \nabla \cdot \mathbf{w}^f = 0 \quad (25)$$

但し、

$$\mathbf{w}^f = \phi^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (26)$$

は流体相の相対流量である。さらに展開すると次式が得られる。

$$\sum \phi^\alpha \text{tr} \mathbf{L}^\alpha + \sum (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \cdot \nabla \phi^f = 0 \quad (27)$$

## 3. 構成則及び空間的・階層的流動則

本章では混合体理論に基づき、階層的な多相混合体冠循環モデルにおける固体相、流体相の構成則、さらに、

共存する同階層の空間的流動及び同じ空間位置での階層の流動を支配する流動則の導出を行う。

### 3・1 エントロピー不等式の展開

非圧縮条件(27)を Lagrange 乗数  $p$  によりエントロピー不等式(21)に導入すると、非圧縮条件を考慮した等価的エントロピー不等式が得られる。

$$-\sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \frac{D^{(\alpha)} \Phi^{\alpha}}{Dt} + \sum_{\alpha} \sigma^{\alpha} : L^{\alpha} - \sum_{\alpha} \pi^{\alpha} \cdot v^{\alpha} + p \left[ \sum_{\alpha} \phi^{\alpha} \text{tr} L^{\alpha} + \sum_{f'} (v^{f'} - v^s) \cdot \nabla \phi^{f'} \right] \geq 0 \quad (28)$$

任意物理量  $A$  に対し、 $\alpha$  または  $\beta$  相を参照した物質時間微分は次のように表される。

$$\frac{D^{(\alpha)} A}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v^{\alpha} \cdot \nabla A \quad (29)$$

$$\frac{D^{(\beta)} A}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v^{\beta} \cdot \nabla A \quad (30)$$

従って、異なる相を参照している物質時間微分間の関係は

$$\frac{D^{(\alpha)} A}{Dt} = \frac{D^{(\beta)} A}{Dt} + (v^{\alpha} - v^{\beta}) \cdot \nabla A \quad (31)$$

となる。また、固体相を構成しているコラーゲン線維などを混合体の骨格とみなし、固体骨格の変形勾配テンソル  $F^s$  を導入すれば、 $J^s = \det F^s$  は固体骨格の体積変化率を表すため、固体相の非圧縮仮定より変形前後の固体相体積率は次式で関連付けられる。

$$\phi_0^s = J^s \phi^s \quad (32)$$

密度の関係式(3)、非圧縮条件式(22)及び式(32)により次の式が得られる。

$$\rho^s \frac{D^{(s)} \Phi^s}{Dt} = \frac{1}{J^s} \frac{D^{(s)} \Phi_0^s}{Dt} \quad (33)$$

ここで  $\Phi_0^s$  は基準配置で単位混合体体積における固体相の Helmholtz 自由エネルギーである。

心筋基質はコラーゲン線維などからなる固体相としてひずみエネルギーを持つが、各階層の血管もひずみエネルギーを持ち、血管が心筋基質に固着していると仮定すると、血管のひずみエネルギーが心筋変形に寄与していることが理解できる。従って、血管の変形を血液の体積率によって表せば、固体相単位質量 Helmholtz 自由エネルギーの物質時間微分は次式によって与えられる。

$$\rho^s \frac{D^{(s)} \Phi^s}{Dt} = \frac{1}{J^s} \frac{D^{(s)} \Phi_0^s}{Dt}$$

$$= \frac{1}{J^s} \left( \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial C^s} : \frac{D^{(s)} C^s}{Dt} + \sum_{f'} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \frac{D^{(s)} \phi^{f'}}{Dt} \right) \quad (34)$$

但し、 $C^s$  は固体骨格の右 Cauchy-Green 変形テンソルである。式(34)の展開については、まず  $\partial \Phi_0^s / \partial C^s$  の対称性を利用して次式が得られる。

$$\frac{1}{J^s} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial C^s} : \frac{D^{(s)} C^s}{Dt} = \frac{1}{J^s} (F^s \cdot \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial E^s} \cdot F^{sT}) : L^s \quad (35)$$

次に非圧縮条件式(23)を用いて

$$\frac{1}{J^s} \sum_{f'} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \frac{D^{(s)} \phi^{f'}}{Dt} = \frac{1}{J^s} \sum_{f'} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \left[ \theta^{f'} - \phi^{f'} \text{tr} L^{f'} - \nabla \phi^{f'} \cdot (v^{f'} - v^s) \right] \quad (36)$$

が導かれる。一方、流体相に関しては、ひずみエネルギー、内部粘性及び各相間の拡散による散逸効果が小さいとして、流体相 Helmholtz 自由エネルギーの変化が無視できるとの仮定をおく。これにより、式(35)～(36)を式(28)に代入し、式(9)を利用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{J^s} (F^s \cdot \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial E^s} \cdot F^{sT}) + \sigma^s + \phi^s p I \right] : L^s \\ & + \sum_{f'} \left[ \frac{1}{J^s} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \phi^{f'} I + \sigma^{f'} + \phi^{f'} p I \right] : L^{f'} \\ & \sum_{f'} \left[ \left( \frac{1}{J^s} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} + p \right) \nabla \phi^{f'} - \pi^{f'} \right] \cdot (v^{f'} - v^s) \\ & - \sum_{f'} \frac{1}{J^s} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \theta^{f'} \geq 0 \quad (37) \end{aligned}$$

### 3・2 構成則

Coleman と Noll の理論では<sup>(4)</sup>、式(37)左辺の固体相及び流体相変形速度勾配テンソル  $L^s$ 、 $L^{f'}$  が互いに独立であり、任意の熱力学的過程に対して不等式(37)が成り立つため、これらの独立変数の係数がゼロになる必要がある。従って、固体相の変形による応力を

$$\sigma_E^s = \frac{1}{J^s} (F^s \cdot \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial E^s} \cdot F^{sT}) \quad (38)$$

と定義し、流体相に対しては、

$$\bar{p}^{f'} = \frac{1}{J^s} \frac{\partial \Phi_0^s}{\partial \phi^{f'}} \quad (39)$$



と定義すれば

$$\sigma^s = -\phi^s p \mathbf{I} + \sigma_E^s \quad (40)$$

$$\sigma^{f^i} = -\phi^{f^i} (p + \tilde{p}^{f^i}) \mathbf{I} \quad (41)$$

がそれぞれ固体相と流体相の構成則として得られる。ここでは、Lagrange 未定乗数  $p$  は心筋基質の静水圧に対応しており、また血液の圧力は

$$\tilde{p}^{f^i} = p + \tilde{p}^{f^i} \quad (42)$$

によって与えられる。さらに式(39)より、血管内外圧力差を示す経壁圧 (transmural pressure)  $\tilde{p}^{f^i}$  は血管による Helmholtz 自由エネルギー、即ち血管弾性コンプライアンスに依存することが分かる。さらに式(13)、(40)～(42)より混合体の構成則は次式で与えられる。

$$\sigma = -(\phi^s p + \sum_{f^i} \phi^{f^i} \tilde{p}^{f^i}) \mathbf{I} + \sigma_E^s \quad (43)$$

### 3・3 空間的・階層的流動則

階層  $k$  の流体相に対し、上位階層からの体積流入率を  $\omega^{f^{k-1}}$ 、下位階層への体積流出率を  $\omega^{f^k}$  とし、他の流体相からの総体積流入率  $\theta^{f^k}$  は次のようになる。

$$\theta^{f^1} = -\omega^{f^1}, \quad \theta^{f^n} = \omega^{f^{n-1}}$$

$$\theta^{f^k} = \omega^{f^{k-1}} - \omega^{f^k} \quad (k = 2, n-1) \quad (44)$$

これにより次式が得られる。

$$\sum_{f^i} \tilde{p}^{f^i} \theta^{f^i} = \sum_{k=1, n-1} \omega^{f^k} (\tilde{p}^{f^{k+1}} - \tilde{p}^{f^k}) \quad (45)$$

式(40)、(41)及び(45)を用いて式(37)が次のようになる。

$$\sum_{f^i} \left[ (p + \tilde{p}^{f^i}) \nabla \phi^{f^i} - \pi^{f^i} \right] \cdot (\mathbf{v}^{f^i} - \mathbf{v}^s) - \sum_{k=1, n-1} \omega^{f^k} (\tilde{p}^{f^{k+1}} - \tilde{p}^{f^k}) \geq 0 \quad (46)$$

上式を満たすため、まずマトリックス定義

$$\{\beta\}^T = \left\{ (p + \tilde{p}^{f^1}) \nabla \phi^{f^1} - \pi^{f^1}, \dots, (p + \tilde{p}^{f^k}) \nabla \phi^{f^k} - \pi^{f^k}, \right.$$

$$\dots, (p + \tilde{p}^{f^n}) \nabla \phi^{f^n} - \pi^{f^n}, -(\tilde{p}^{f^2} - \tilde{p}^{f^1}), \dots,$$

$$\left. -(\tilde{p}^{f^k} - \tilde{p}^{f^{k-1}}), \dots, -(\tilde{p}^{f^n} - \tilde{p}^{f^{n-1}}) \right\} \quad (47)$$

$$\{\gamma\}^T = \left\{ \mathbf{v}^{f^1} - \mathbf{v}^s, \dots, \mathbf{v}^{f^k} - \mathbf{v}^s, \dots, \mathbf{v}^{f^n} - \mathbf{v}^s, \right.$$

$$\left. \omega^{f^1}, \dots, \omega^{f^{k-1}}, \dots, \omega^{f^{n-1}} \right\} \quad (48)$$

を用いて式(46)を次のように書き直し、

$$\{\beta\}^T \{\gamma\} \geq 0 \quad (49)$$

二つの変数マトリックスの間に一次近似として

$$\{\beta\} = [k] \{\gamma\} \quad (50)$$

の線形関係を仮定すると、係数マトリックス  $[k]$  が正定値であれば

$$\{\gamma\}^T [k]^T \{\gamma\} \geq 0 \quad (51)$$

が成り立つ。即ち不等式(46)を満たすことができる。

各階層間、空間・階層間の相互影響が無視できると仮定すれば、係数マトリックス  $[k]$  は対角行列となり、次の関係式が導かれる。

$$\pi^{f^i} = (p + \tilde{p}^{f^i}) \nabla \phi^{f^i} - \kappa^{f^i} \cdot (\mathbf{v}^{f^i} - \mathbf{v}^s), \quad i = 1, n \quad (52)$$

$$\omega^{f^i} = -\kappa_j (\tilde{p}^{f^{i+1}} - \tilde{p}^{f^i}) \quad (53)$$

さらに、式(53)及び流体相対応力式(41)を運動方程式(6)に代入し、慣性力及び体積力を無視すれば次式が得られる。

$$\mathbf{w}^{f^i} = -\kappa^{f^i} \cdot \nabla (p + \tilde{p}^{f^i}) \quad (54)$$

明らかに、式(53)及び式(54)はそれぞれ階層的または空間的流体流れを支配する流動則となり、 $\kappa_j$  は輸送係数 (transfer coefficient) であり、式(54)が多孔質体における Darcy 則に相当し、 $\kappa^{f^i}$  は透過係数である。

## 4. 大変形問題の定式化

心臓の収縮・拡張は常に大変形を伴うため、本章では変形前の状態を基準配置とする大変形問題の定式化を行う。任意のベクトルまたはテンソル  $\mathbf{a}$  に対して、変形勾配  $\mathbf{F}$  及び  $\mathbf{F}$  の行列式  $J$  を用いた Piola 変換

$$\mathbf{A} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{a} \quad (55)$$

を行うと次式が成立する<sup>(5)</sup>。

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{A} = J \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (56)$$

またスカラー量  $p$  に対しては

$$\nabla p = \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_0 p$$

の関係がある。ここで  $\nabla_0$  は参照配置における微分演算子である。これらの関係式を利用して以下のように大変形問題における支配方程式を導くことができる。以下では簡潔のため固体相骨格の変形を示す量の添え字  $s$  を省略する。

まず慣性力と体積力を無視して、混合体の運動方程式(14)及び構成則(43)より次式が得られる。

$$\nabla_0 \cdot \left[ -(\phi^s p + \sum_{f'} \phi^{f'} \bar{p}^{f'}) J F^{-1} + J F^{-1} \cdot \sigma_E^s \right] = \theta \quad (57)$$

次いでは Piola 変換及び式(42)を式(54)に適用することにより各流体相における空間的流動則は次のようになる。

$$\mathbf{W}^{f'} = -\mathbf{K}^{f'} \cdot \nabla_0 \bar{p}^{f'} \quad (58)$$

但し、

$$\mathbf{K}^{f'} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\kappa}^{f'} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (59)$$

は基準配置における透過係数である。大変形の場合は血管の変形も大きいことが考えられ、血管の直径と関連する流体相の体積率が小さくなると、血液の粘性による抵抗が高くなるため、一般的には透過係数が流体相の体積率に依存している。例えば、一次近似として、血液の流れを Poiseuille 流と仮定した次の関係式が提案されている<sup>(3)</sup>。

$$\boldsymbol{\kappa}^{f'} = \boldsymbol{\kappa}_0^{f'} (J \phi^{f'} / \phi_0^{f'}) \quad (60)$$

さらに、Piola 変換及び  $\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}^s$  の関係により、混合体全体の非圧縮条件式(25)が次のようになり、

$$\dot{J} + \sum_{f'} \nabla_0 \cdot \mathbf{W}^{f'} = 0 \quad (61)$$

また、各階層流体相の非圧縮条件式(23)を展開し、式(44)、(53)及び Piola 変換を適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D^{(s)} J \phi^{f'}}{Dt} + \nabla_0 \cdot \mathbf{W}^{f'} &= -J \boldsymbol{\kappa}_{k-1} (\bar{p}^{f'} - \bar{p}^{f'^{-1}}) \\ &+ J \boldsymbol{\kappa}_k (\bar{p}^{f'^{+1}} - \bar{p}^{f'}) \quad (k=1, n; \boldsymbol{\kappa}_0 = \boldsymbol{\kappa}_n = 0) \end{aligned} \quad (62)$$

上式は単位混合体体積における  $k$  階層血液の体積流出率  $\nabla_0 \cdot \mathbf{W}^{f'}$  と血液体積率の変化率及び階層間血液流量の関係を示している。式(62)を全ての流体相について総和を取ると、

$$\sum_{f'} \frac{D^{(s)} J \phi^{f'}}{Dt} + \sum_{f'} \nabla_0 \cdot \mathbf{W}^{f'} = 0 \quad (63)$$

となることが容易に証明できる。式(61)から式(63)を引くことにより、

$$\dot{J} - \sum_{f'} \frac{D^{(s)} J \phi^{f'}}{Dt} = 0 \quad (64)$$

が得られ、時間積分をして初期値  $J(0)=1$  及び  $\phi^{f'}(0)=\phi_0^{f'}$  を利用すれば、結局式(61)が次のようになる。

$$J - 1 - \sum_{f'} J \phi^{f'} + \sum_{f'} \phi_0^{f'} = 0 \quad (65)$$

冠循環問題では血管の変形能力を表すコンプライアンスが重要な物性であり、経壁圧の変化に対する血管体積の変化率として定義される<sup>(6)</sup>。式(62)の  $J \phi^{f'}$  は変形前の混合体体積を基準にした血液の体積を表しているため、その時間的変化率が次式によって経壁圧の時間的変化率と関連付けられる。

$$\frac{D^{(s)} J \phi^{f'}}{Dt} = C^{f'} \frac{D^{(s)} \bar{p}^{f'}}{Dt} \quad (66)$$

明らかに

$$C^{f'} = \frac{\partial J \phi^{f'}}{\partial \bar{p}^{f'}} \quad (67)$$

は血管のコンプライアンスである。

式(62)に式(58)及び式(66)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} C^{f'} \frac{D^{(s)} (\bar{p}^{f'} - p)}{Dt} - \nabla_0 \cdot (\mathbf{K}^{f'} \cdot \nabla_0 \bar{p}^{f'}) \\ = -J \boldsymbol{\kappa}_{k-1} (\bar{p}^{f'} - \bar{p}^{f'^{-1}}) + J \boldsymbol{\kappa}_k (\bar{p}^{f'^{+1}} - \bar{p}^{f'}) \\ (k=1, n; \boldsymbol{\kappa}_0 = \boldsymbol{\kappa}_n = 0) \end{aligned} \quad (68)$$

最終的には、式(57)、(65)及び(68)の合計3組の支配方程式があり、対して固体相変位  $\mathbf{v}^s$ 、心筋圧力  $p$  及び血液圧力  $\bar{p}^{f'}$  が独立変数となるため、固体相変形とそれによる応力との関係、及び血液体積率と経壁圧の関係を与えれば、閉じた方程式システムが得られる。

## 5. 解析例

これまでの定式化で導かれた支配方程式に重み付き残差法を適用することにより、有限要素法による数値解析プログラムを作成した。ここでは図1に示す側面拘束(confined)モデルを用いて、まず応力緩和問題における2相混合体モデルとの比較を行った上、文献<sup>(3)</sup>による骨格筋血液灌流における物性を参考に設定した物性値(表1)により、本研究で提案したモデルに対する検証を行う。また、流体体積率と経壁圧の関係を線形と仮定して、即ち血管のコンプライアンスを定数とする。透過係数及び輸送係数の空間的分布を一定として、3階層の流体相は



それぞれ順に細動脈、毛細血管及び細静脈を表すものとする。

式(68)左辺の第1項目は血液体積率の変化率であり有限の値を持つため、血管コンプライアンスが十分大きければ、経壁圧の時間微分がゼロに近づき、経壁圧が一定になる。また、式(68)右辺の輸送係数は階層間流れに対する抵抗の逆数を表しており、それらが十分大きい場合は各階層間の圧力差がなくなる。従って、血管コンプライアンス及び輸送係数を大きく取り、また初期経壁圧をゼロにすれば、各流体相の圧力が心筋の静水圧に等しくなり、各階層血液の全体が一つの流体相として機能することになる。但し、2相混合モデルと比較する場合は、式(61)に式(58)を代入した結果

$$J - \nabla_0 \cdot \left( \sum_{f^i} \mathbf{K}^{f^i} \cdot \nabla_0 p \right) = 0 \quad (69)$$

となるため、2相混合モデルにおける等価的透過係数を  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^{f^i}$  とする必要がある。以上の考察を基に、図2に示す解析モデル上面に0.1mmの強制変位を与え、血管のコンプライアンス及び輸送係数を共に  $10^5$  に設定して応力緩和解析を行った。その結果を2相混合モデル<sup>(5)</sup>の解析プログラムによる結果と共に示す図3より両者が Arterial よく一致していることが分かる。

次に表1に示す骨格筋血液灌流における物性の参考値を用いて本研究の提案モデルに対する検証を行う。解析では、静脈血圧をゼロとし、図2に示す有限要素モデルの上面における動脈血圧を13.3kPa(100mmHg)、下向きの垂直荷重を14.7kPa(110mmHg)まで0.5秒で線形的に負荷させた後、次の0.5秒で動脈血圧を10.6kPa(80mmHg)、垂直荷重をゼロまで除荷させる条件を設定した。また、各流体相体積率と経壁圧の関係として次式<sup>(5)</sup>を採用し、

$$J\phi^{f^i} = \phi_0^{f^i} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\bar{p}^{f^i} - p - p_s}{p_0} \right) \right) \quad (70)$$

血管のコンプライアンスは式(67)に基づき上式の微分より求めた。

図4は解析モデル中段付近の心筋及び各流体相血液の圧力履歴を示している。境界条件がゼロと設定されている細静脈の血圧はほぼゼロに近い値を保っており、また、毛細血管の血圧も負荷状況に対応した変動を示しているが、外部負荷とほぼ一致する心筋の圧力が負荷の段階では細動脈血圧より高く、即ち細動脈の

経壁圧が負圧となっている。除荷の段階では心筋圧力が低下し、やがて細動脈血圧より低くなり、最終的にはゼロに近づいていく。

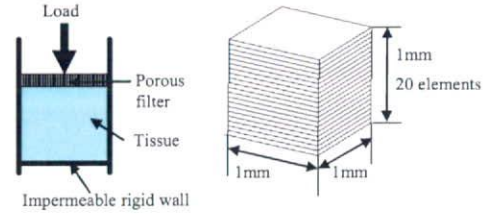


Fig. 2 Confined model and finite element mesh

Table 1 Material properties

	Arteriolar	Capillary	Venular
Permeability (mm <sup>4</sup> /sec-N)	50.0	0.5	50.0
Transfer coefficient (mm <sup>2</sup> /sec-N)	0.6	2.3	5.0
Compliance (mm <sup>2</sup> /N)	1.0	80	100
Volume fraction (%)	0.7	1.8	2.2
Myocardial matrix: Young's modulus=0.02MPa Poisson's ratio=0.0			

モデルへの流入を細動脈血流に対しては正、細静脈血流に対しては負と規定して、これらの流れを心筋圧力と共に図5に示す。負荷により生じる心筋圧力により、細動脈においては負荷の初期段階ではモデルから流出する逆流が起こり、その後は動脈血圧の上昇により流入するようになるが、流量が比較的に低い。しかし、除荷が始まると細動脈の流量が急に増え、負荷段階最大値の約2倍に達している。一方、細静脈血液流れに関しては逆流を生じないが、負荷段階において大きく上昇する流量が、除荷に伴い急に減少する様子が見られる。このように、本解析例で用いている物性や解析条件は正確な心臓の状態を反映しているとはいえないが、本研究で提案した理論モデルにより、冠循環の特徴として挙げられる収縮期における冠動脈血流の逆流、冠動脈における拡張期優位性及び細静脈における収縮期優位性を表現することができると考えられる。なお、細動脈、毛細血管及び細静脈の体積率の時間変化を示す図6では、収縮期の圧縮により減少した各流体相の体積率が拡張期に再び大きくなり、拡張期優位で入ってくる動脈血流を貯蔵する機能を再現している。

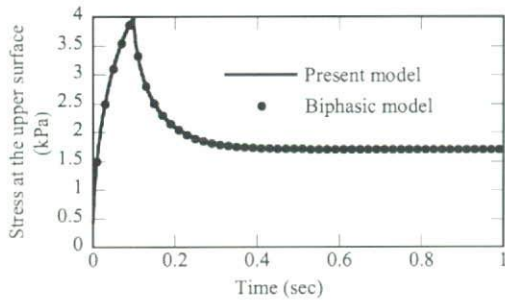


Fig. 3 Comparison of present model with biphasic model for stress relaxation problem

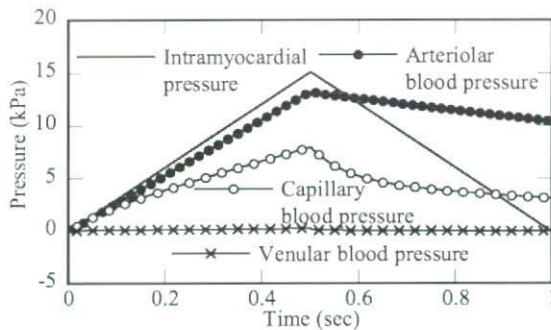


Fig. 4 Temporal variation of intramyocardial, arteriolar blood, capillary blood and venular blood pressures in the middle of FEM model

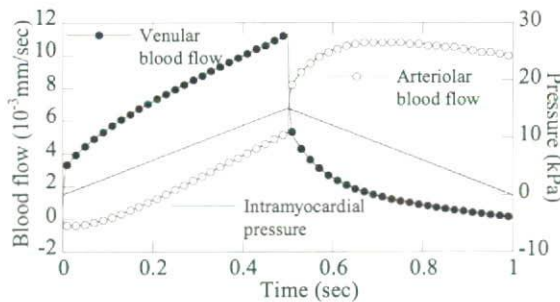


Fig. 5 Temporal variation of the displacement of upper surface and arteriolar, capillary and venular blood flows in the middle of FEM model

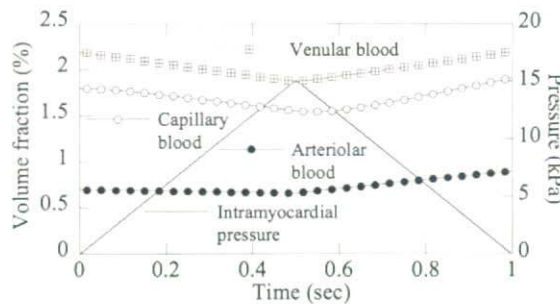


Fig. 6 Temporal variation of the blood volume fractions in the middle of FEM model

## 6. 結 語

心臓に血液を供給する冠循環システムの障害は心筋梗塞、狭心症など虚血性心疾患の原因となる。一方、冠循環は常に心臓の収縮・拡張に伴って行われるため、心筋圧力は冠循環血液流れに大きな影響を及ぼしていることが認識されている。本研究では混合体理論を導入することにより、心筋基質を固体相、階層的血管構造における血液を異なる流体相として、心臓の拍動と冠循環間の力学的連成を扱うことのできる冠循環数値モデルを構築した。また、数値解析例を通じて、本研究で提案した理論モデルを用いれば、冠循環における冠動脈（または冠静脈）血流の拡張期（または収縮期）優位などの特徴を再現する可能性を示すことにより、提案した理論モデルの妥当性について検証を行った。今後の課題としては、冠循環血管系の形態や微小循環における血行力学に基づく推定及び実験計測による物性の取得、さらに臨床データによる本提案モデルの検証及び改善が必要である。

## 文 献

- (1) Truesdell, C. and Toupin, R., The Classical Field Theories, (1960), Springer.
- (2) Ateshian, G.A., On the theory of reactive mixtures for modeling biological growth, *Biomechanics And Modeling In Mechanobiology*, Vol. 6, (2007), pp. 423-445.
- (3) Vankan, W.J. et al., Mechanical Blood-Tissue Interaction in Contracting Muscles: a Model Study, *Journal of Biomechanics*, Vol. 31, (1998), pp. 401-409.
- (4) Coleman, B.D. and Noll, W., The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 13, No.1 (1963), pp. 167-178.
- (5) Chen, X. et al., A Study on Mechanical Model of Soft Tissues by Nonlinear Finite Element Analysis Based on Biphasic Theory, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 70, No.697 (2004), pp. 1208-1215.
- (6) Bruinsma, P. et al., Model of the Coronary Circulation Based on Pressure Dependence of Coronary Resistance and Compliance, *Basic Research in Cardiology*, Vol. 83, No.5 (1988), pp. 508-524.



有限要素法 うげんようそほう	Finite Element Method 0103	ゆ
バイオメカニクス いおめかにつくす	Biomechanics 0081	ぼ
医用工学 ようこうがく	Medical Engineering 0914	い

## 非線形問題に対する低計算負荷均質化法の提案\*

岡田純一<sup>\*1\*2</sup>, 鷲尾 巧<sup>\*3\*4</sup>, 久田俊明<sup>\*5</sup>

## Nonlinear Homogenization Algorithms with Low Computational Cost

Jun-ichi OKADA<sup>\*6</sup>, Takumi WASHIO and Toshiaki HISADA<sup>\*6</sup>JST, Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo,  
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa-shi, Chiba, 277-8563 Japan

An efficient homogenization method for nonlinear problems is introduced. In order to avoid prohibitive computational cost, we have already developed a homogenization technique using characteristic deformation mode superposition. However, in the mode superposition technique, the approximation error is caused depending on the analysis case. In this paper a new method is proposed, in which the same accuracy as the exact method is preserved by solving the microscopic equilibrium equation while the tangential matrix of the multiscale equilibrium equation is approximated using the mode superposition method. The performance of the proposed method is examined together with the block LU factorization algorithm, and satisfactory results are obtained.

**Key Words:** Homogenization Method, Nonlinear, Finite Element Analysis, Algorithm, Block LU Factorization, Heart

## 1. 緒 言

均質化法は周期的な微視構造を持つ不均質体の解析を効率的に行うための数値モデル化手法である。単位周期の尺度と物質全体の尺度の2つの空間スケールを導入し、両スケールの支配方程式を連成して解く事により、等価な均質体としての巨視的特性と微視構造内の変数分布を同時に解析する事が出来る。我々は、心筋細胞内の各組織が心拍動に及ぼす影響を調べるため、心筋細胞を微視構造、心臓を巨視構造として有限要素解析を行なう事を目標に必要な解析技術の開発を進めている。

生体材料は多くの場合において超弾性体でモデル化される。しかし、心筋細胞内において収縮力を発生する筋原線維には異方性があり、また強い材料非線形性がある。従来の非線形均質化法のアルゴリズム<sup>(1)(2)</sup>では、巨視構造の反復計算の中で全ての積分点において均質化接線剛性の更新を行ない、微視構造の力学的平衡をとるため、非常に多くの計算量が必要となる。計算負荷の削減のため微視応答をデータベース化する方法<sup>(3)</sup>、感度解析<sup>(4)</sup>、高速フーリエ変換<sup>(5)</sup>を利用する方

法等が報告されているが、これまで三次元での実用的問題の解析は殆ど行なわれていない。

我々はこの問題を解決すべく、既知の特性変形の線形結合により現在の微視変位場を近似的に表す解法(特性変形モード重ね合わせ法)を提案し<sup>(6)</sup>、微圧縮超弾性体・粘弾性体などの物質に対する定式化・適用例を示してきた<sup>(7)(8)</sup>。しかし、この解法には、問題によっては微視構造変位場の近似精度が低下し、誤差を生じするという欠点がある。

本研究では、与えられた境界条件の下での巨視的な力学的平衡状態と微視的な自己平衡状態を効率的に実現するため、均質化法のアルゴリズムを新たに2種類提案する。最初に、従来法のように巨視反復のループの中で微視の収束計算を行なうことなく、Block LU分解を利用して微視と巨視を整合的に取り扱うことにより各スケールの残差を同時に減少させるアルゴリズムを示す。更に均質化接線剛性の更新を省くためにモード重ね合わせ法を利用して均質化接線剛性を近似するアルゴリズムを提案する。この解法では、モード重ね合わせ法によって得られる強連成形のマルチスケール力学的平衡式と微視構造の力学的平衡式を諸変数の交換を行ないつつ解く事より、従来法に比べ遥かに低い計算コストで、全く同じ解(誤差のない解)を得る事が出来る。最後に各解法を簡単なモデルに適用した例を示し、計算負荷・収束性に関して従来法との比較検討

\* 原稿受付 2007年8月20日。

<sup>\*1</sup> 正員, 科学技術振興機構(☎332-0012 川口市本町4-1-8 川口センタービル)。<sup>\*2</sup> 正員, 東京大学大学院新領域創成科学研究科(☎277-8583 柏市柏の葉5-1-5)。<sup>\*3</sup> 科学技術振興機構。<sup>\*4</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科(☎277-8583 柏市柏の葉5-1-5)。<sup>\*5</sup> フェロー, 東京大学大学院新領域創成科学研究科(☎113-0033 東京都文京区本郷7-3-1)。

E-mail: okada@sml.k.u-tokyo.ac.jp



を行なうと共に、簡略化された心臓マルチスケール問題の計算例を示す。

2. 有限変形問題における均質化法

2.1 問題設定と幾何学的考察 始めに本論文の記号の定義を示す。

- $Y, y$  : 微視構造での変形前後の位置ベクトル
- $X, x$  : 巨視構造での変形前後の位置ベクトル
- $u$  : 巨視的変位ベクトル
- $\{u\}$  : 巨視構造節点変位ベクトル
- $\{u^e\}$  : 巨視要素節点変位ベクトル
- $w$  : 微視的変位ベクトルの周期成分
- $\{w\}$  : 全微視構造の節点変位ベクトルの周期成分
- $\{w^e\}$  : 単一微視構造の節点変位ベクトルの周期成分
- $\{w^e\}$  : 微視要素節点変位ベクトルの周期成分
- $F$  : 変形勾配テンソル
- $Z$  : 変位勾配テンソル
- $C$  : 右 Cauchy-Green 変形テンソル
- $E$  : Green-Lagrange 歪テンソル
- $\Pi$  : 第 1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル
- $I$  : 2 階又は 4 階の単位テンソル
- $I_c, II_c, III_c$  :  $C$  の第 1~第 3 主不変量

図 1 に示すように、周期性を持つ微視的構造 ( $Y_0$ ) が任意点で存在する巨視構造 ( $\Omega$ ) を想定する。巨視領域を記述する巨視的な座標系を  $X \in \Omega$ 、微視構造の単位セルを記述する座標系を  $Y \in Y_0$  とすると、構造全体での領域は微視領域と巨視領域の直積空間 ( $\Omega \times Y_0$ ) で表される。今後文字に上付き Bar のある変数は  $\Omega$  において定義される巨視系を参照しているものとする。均質化法の定式化を進める上で、下記の仮定 (均質化法の仮定) を導入する。

- 周期的な微視構造から成る巨視構造を近似的に等価な均質体と見なす事が出来る。
- 微視構造の大きさは巨視構造に比べて無限に小さく、巨視構造の任意点で定義される変数が、微視構造内の対応する変数の体積平均量に対応する。この時微視領域で定義される位置ベクトル  $y, Y$  の関係は下記ようになる<sup>(9)</sup>。

$$y = \bar{F}Y + w \tag{1}$$

つまり微視領域での変形は、均質な部分  $\bar{F}Y$  ( $\bar{F}$  は巨視的変形勾配で、微視的には一定値) と非均質な周期

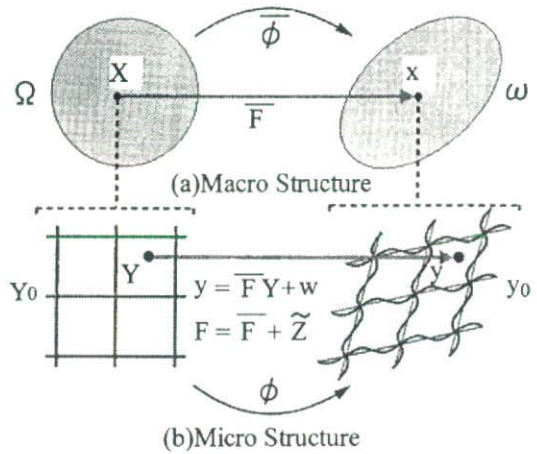


Fig. 1 Homogenization method in large deformation problems

的な場  $w$  からなるものと仮定する。従って、微視的変形勾配は、

$$F = \nabla_Y y = \frac{\partial y}{\partial Y} = \bar{F} + \tilde{Z} \tag{2}$$

$$\bar{F} = \nabla_X x = \frac{\partial x}{\partial X} \tag{3}$$

$$\tilde{Z} = \nabla_Y w = \frac{\partial w}{\partial Y} \tag{4}$$

となり、変形勾配増分修正量及び変分は

$$\Delta F = \Delta \bar{F} + \Delta \tilde{Z} = \Delta \bar{F} + \nabla_Y \Delta w \tag{5}$$

$$\delta F = \delta \bar{F} + \delta \tilde{Z} = \delta \bar{F} + \nabla_Y \delta w \tag{6}$$

となる。上述の均質化法の仮定より、巨視的変形勾配  $\bar{F}$  は微視的変形勾配  $F$  の単位セル  $Y_0$  の体積平均として対応づけられるので、以下の式が要請される。

$$\bar{F} = \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} F dY = \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} (\bar{F} + \tilde{Z}) dY = \bar{F} + \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \tilde{Z} dY \tag{7}$$

ここで、 $V$  は微視構造  $Y_0$  の体積である。従って、以下の式

$$\int_{Y_0} \tilde{Z} dY = 0 \tag{8}$$

が、成立しなければならない。つまり、

$$\int_{Y_0} \frac{\partial w}{\partial Y} dY = \int_{\partial Y_0} N \otimes w dS = 0 \tag{9}$$

これは  $w$  に周期性があれば満たされる。

2.2 均質化法の定式化・有限要素離散化 周期的な微視構造を持つ物質の力学的平衡問題を考える。均質化法の仮定より巨視構造の各点の仮想仕事が微視構造の仮想仕事の体積平均と対応付けられるので、構

造全体の仮想仕事は下記ようになる。

$$\int_{\Omega} \overline{\delta F} : \overline{\Pi} dX = \int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \delta F : \Pi dY dX = F_{ext}(\delta u) \quad (10)$$

ここで  $F_{ext}(\delta u)$  は、外力の仮想仕事である。数学的に厳密な定式化は、two-scale 収束理論を用いて寺田ら<sup>(11)</sup>が行っており、この定式化によっても上式と同じ式を得る事が出来る。

ここで支配方程式(式(10))に式(6)を代入すると、微視・巨視の力学的平衡式は変分の定義される空間によって以下の式のように分離できる。

$$\overline{G} = \int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \delta \overline{F} : \Pi dY dX = \int_{\Omega} \delta \overline{F} : \overline{\Pi} dX = F_{ext}(\delta u) \quad (11)$$

$$G = \int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : \Pi dY = 0 \quad (12)$$

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \Pi dY \quad (13)$$

巨視構造は与えられた境界条件に対し平衡し、微視構造内では微視変位の周期境界条件(式(9))のもとで自己平衡状態が実現されている事になる。均質化はこの2種類の力学的平衡状態を同時に満たす解を求める問題となる。

式(10)は、一般に非線形方程式なので、式(10)を解く為に Newton-Raphson 反復法を用いる事とし、変数に対する線形化を行なう。

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \delta F : A : \Delta F dY dX = F_{ext}(\delta u) - \int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} \delta F : \Pi dY dX \quad (14)$$

$$A = \frac{\partial \Pi}{\partial F} \quad (15)$$

式(5),(6)より、

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} (\delta \overline{F} + \delta \tilde{Z}) : A : (\Delta \overline{F} + \Delta \tilde{Z}) dY dX = F_{ext}(\delta u) - \int_{\Omega} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} (\delta \overline{F} + \delta \tilde{Z}) : \Pi dY dX \quad (16)$$

となる。式(17),(18)の有限要素離散化を行なうと式(16)の各項は巨視構造の積分点単位で式(19),(20)のようになる。

$$\Delta \overline{F} = [\overline{B}^e] \{\Delta u^e\} \quad (17)$$

$$\Delta \tilde{Z} = [B^e] \{\Delta w^e\} \quad (18)$$

式(16)の左辺

$$\begin{aligned} &= \{\delta w^e\} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [A] [B^e] dY \{\Delta w^e\} + \\ &\{\delta u^e\} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [A] dY [\overline{B}^e] \{\Delta u^e\} + \\ &\{\delta u^e\} [\overline{B}^e]^T \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] [B^e] dY \{\Delta w^e\} + \\ &\{\delta u^e\} [\overline{B}^e]^T \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] dY [\overline{B}^e] \{\Delta u^e\} \\ &= \{\delta w^e\} K_{ww}^Q \{\Delta w^e\} + \{\delta w^e\} K_{wu}^Q \{\Delta u^e\} + \\ &\{\delta u^e\} K_{uw}^Q \{\Delta w^e\} + \{\delta u^e\} K_{uu}^Q \{\Delta u^e\} \end{aligned} \quad (19)$$

式(16)の右辺第2項

$$\begin{aligned} &= -\{\delta u^e\} [\overline{B}^e]^T \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [\Pi] dY \\ &- \{\delta w^e\} \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [\Pi] dY \end{aligned} \quad (20)$$

上式で記号  $Q$  は巨視構造の積分点単位の量であり、記号  $e$  は巨視構造の要素単位の量である事を表す。上記方程式を巨視構造全体について適切にアセンブルし、変分の任意性を考慮してマトリクス表記すると下記のような半正定値対称行列が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wu} \\ K_{uw} & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta w \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_w \\ r_u \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、

$$K_{ww} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [A] [B^e] dY \right) dX \quad (22)$$

$$K_{wu} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [A] dY \right) [\overline{B}^e] dX \quad (23)$$

$$K_{uw} = \int_{\Omega} [\overline{B}^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] [B^e] dY \right) dX \quad (24)$$

$$K_{uu} = \int_{\Omega} [\overline{B}^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] dY \right) [\overline{B}^e] dX \quad (25)$$

$$\{r_w\} = - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [B^e]^T [\Pi] dY \right) dX \quad (26)$$

$$\{r_u\} = \overline{F}_{ext} - \int_{\Omega} [\overline{B}^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [\Pi] dY \right) dX \quad (27)$$

である。非線形均質化法は、巨視構造に対する境界条件と微視構造に対する周期境界条件のもとで式(21)を、 $\Delta u$ :巨視的変位増分修正量・ $\Delta w$ :微視的変位増分修正量について、解く問題となる。このマトリクス方程式の総自由度数は(巨視構造自由度+巨視構造の総積分点数×微視構造自由度)あり、ごく小規模な問題を解くものにも膨大な計算コストを要する。また、メモリの限界からも強連成で解くのは困難であり、以下に示すように弱連成形にして解くのが一般的である。



2.3 特性変形について 非線形問題においても、線形問題<sup>(10)</sup>と同様に巨視的変形に対する微視構造の応答を評価するため、各巨視的積分点において式(12)の微分を取り、式(5),(15)を用いると下式を得る。

$$\int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : d\tilde{Z} dY = - \int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : d\bar{F} dY \quad (28)$$

巨視的変形勾配は微視的な体積積分の外に出せるので、

$$\int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \bar{F}} dY = - \int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : IdY \quad (29)$$

$I$  は、4 階の単位テンソルである。ここで巨視的な変形勾配に対する微視変位の応答として

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \bar{F}} = \nabla_Y \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{F}} \right) \equiv -\nabla_Y \chi \quad (30)$$

ただし、

$$\chi \equiv -\frac{\partial w}{\partial \bar{F}} \quad (31)$$

と定義する。 $\chi$  は特性変形と呼ばれる 3 階のテンソルである。上式を式(29)に代入すると、

$$\int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : \nabla_Y \chi dY = \int_{Y_0} \delta \tilde{Z} : A : IdY \quad (32)$$

$\chi$  を有限要素離散化すると要素レベルでは、

$$\nabla_Y \chi = [B^e] [\chi^e] \quad (33)$$

となる。ここで  $[\chi^e]$  は、変形勾配  $\bar{F}$  の各成分に対する微視変位の導関数、即ち特性変形を 9 つ並べた次式に示すマトリクスである。

$$[\chi^e] = \begin{bmatrix} \chi_{111}^e & \chi_{112}^e & \cdots & \chi_{133}^e \\ \chi_{211}^e & \chi_{212}^e & \cdots & \chi_{233}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{n11}^e & \chi_{n12}^e & \cdots & \chi_{n33}^e \end{bmatrix} \quad (34)$$

$n$  は微視構造を構成する 1 有限要素の自由度となる。式(32)より得られるマトリクス方程式は単一微視構造で下記のようになる。

$$K_\chi [\chi^Q] = [r_\chi] \quad (35)$$

$$K_\chi = \int_{Y_0} [B^e]^T [A] [B^e] dY \quad (36)$$

$$[r_\chi] = \int_{Y_0} [B^e]^T [A] [I] dY \quad (37)$$

$\chi^Q$  は巨視構造の積分点単位の量であり、 $[\chi^e]$  をアセンブルする事により得られる単一微視構造自由度行  $\times$  9 列のマトリクスであり、 $[I]$  は 9 行  $\times$  9 列の単位行列である。上式の  $[I]$  の列ベクトルを  $\{I_i\} (i=1 \dots 9)$  と置

くと、式(37)より各  $\{I_i\}$  において変形勾配各成分に対応する 9 種類の右辺が得られる。上記方程式を、各右辺について周期境界条件のもとで解くと  $[\chi^Q]$  が得られる。

ここで、式(35)の両辺に  $[\bar{B}^e]$  を掛けて、 $|V|$  で割ると、

$$\frac{1}{|V|} K_\chi [\chi^Q] [\bar{B}^e] = \frac{1}{|V|} [r_\chi] [\bar{B}^e] \quad (38)$$

ここで式(19)から、

$$\frac{1}{|V|} K_\chi = K_{ww}^Q \quad (39)$$

$$\frac{1}{|V|} [r_\chi] [\bar{B}^e] = K_{wu}^Q \quad (40)$$

より、

$$K_{ww}^Q [\chi^Q] [\bar{B}^e] = K_{wu}^Q \quad (41)$$

となる。上式を全ての巨視積分点について総和を取ると

$$K_{ww} [\chi] [\bar{B}] = K_{wu} \quad (42)$$

$$[\bar{B}] \equiv \sum_i [\bar{B}^e] \quad (43)$$

$$[\chi] \equiv \sum_i [\chi^Q] \quad (44)$$

$\chi$  は全ての巨視積分点における  $[\chi^Q]$  をアセンブルする事により得られる(巨視構造の総積分点数  $\times$  微視構造自由度) 行  $\times$  9 列のマトリクスである。

非線形問題における特性変形は、その時点における単位巨視ひずみ増分に対する微視構造の変形増分の状態であり、マイクロ構造の材料特性・歪分布などを反映している。また、式(28)は微視変位場に対する線形近似と見る事も出来る事から、式(31)より

$$\Delta w = -\chi : \Delta \bar{F} \quad (45)$$

の関係を用いて微視変位場を更新していく解法は、微視場に対する Forward Euler 法に対応する。

2.4 特性変形モード重ね合わせ均質化法 モード重ね合わせ均質化法では、式(45)を参考に、下式のようにその時刻・反復において、既に計算されているある特性変形  ${}_0\chi$  を重ね合わせる事により、現在の微視変位場増分を近似的に求める<sup>(6)</sup>。

$$\Delta w_k \doteq -{}_0\chi_{kpQ} \Delta \alpha_{pQ} \quad (46)$$

ここで  $\alpha$ :各モードの重みとする. 式(46)を式(21)に代入すると得られるマトリクス方程式は,

$$\begin{bmatrix} [0\chi]^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wu} \\ K_{uw} & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0\chi] & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0\chi]^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_w \\ r_u \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} [0\chi]^T K_{ww} [0\chi] & [0\chi]^T K_{wu} \\ K_{uw} [0\chi] & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0\chi]^T r_w \\ r_u \end{Bmatrix} \quad (48)$$

となる. ここで  $[0\chi]$  は  $[\chi]$  と同様のマトリクスである. 上式は下記の様子に書き直す事が出来る.

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha u} \\ K_{u\alpha} & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_\alpha \\ r_u \end{Bmatrix} \quad (49)$$

ここで,

$$K_{\alpha\alpha} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [0\chi^e]^T [B^e]^T [A] [B^e] [0\chi^e] dY \right) dX \quad (50)$$

$$K_{\alpha u} = - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [0\chi^e]^T [B^e]^T [A] dY \right) [B^e] dX \quad (51)$$

$$K_{u\alpha} = - \int_{\Omega} [B^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] [B^e] [0\chi^e] dY \right) dX \quad (52)$$

$$K_{uu} = \int_{\Omega} [B^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [A] dY \right) [B^e] dX \quad (53)$$

$$\{r_u\} = \bar{F}_{ext} - \int_{\Omega} [B^e]^T \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [\Pi] dY \right) dX \quad (54)$$

$$\{r_\alpha\} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|V|} \int_{Y_0} [0\chi^e]^T [B^e]^T [\Pi] dY \right) dX \quad (55)$$

となり,  $\Delta\alpha, \Delta u$  を未知数とするマトリクス方程式が得られる. その式の自由度は (巨視構造自由度+巨視構造の総積分点数  $\times 9$ ) となり, 計算量が大幅に軽減される.

しかし, 式(55)から分かる様に, この解法は  $\chi_0$  が力学的平衡状態に影響を及ぼしており, 9つの  $\chi_0$  の線形結合により表される変位の範囲内で微視構造の力学的平衡を実現する近似解法である. この様に限られた変形パターンで変形場を近似するため, 解析条件によっては近似誤差が生じるという欠点がある.

図2に示すような簡略化した細胞モデルを用いて例証する. 構成式は後の式(79)に示す St Venant 超弾性体とし, 表1に示す材料定数を用いる. 巨視構造は1要素とし, 従来法とモード重ね合わせ法において同じ荷重境界条件を与え変形の状態を比較した. 図3に  $\chi_0$  として用いた初期状態での特性変形を, 図4に微視構造の変形場の解析例を示す. 従来法では, せん断試

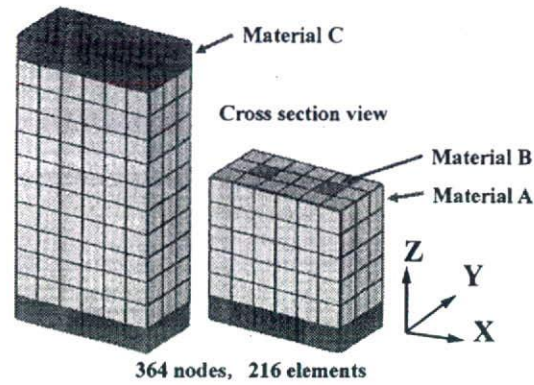


Fig. 2 Simplified cell model

Table 1 Material constants of simplified cell model

	$E$ [kPa]	$\nu$
Material A in Fig.2	0.1	0.3
Material B in Fig.2	60.0	0.3
Material C in Fig.2	100.0	0.3

験において滑らかな変形が実現出来ているのに対し, モード重ね合わせ法では不自然な変形になっている事が分かる. この様な差異は, 均質化法の枠組みを通して, 巨視構造の応力・変位場の収束解にも影響を及ぼす. 一方, 引張り変形に関しては, 比較的良好に近似できている事が確認できる.

モード重ね合わせ法は, 計算負荷が小さく, 誤差は有るものの微視構造の変形形態は従来法と大局的には一致している. そこで, 次節ではモード重ね合わせ法を均質化接線剛性の近似法として利用する.

### 3. 非線形均質化法のアルゴリズム

3.1 一般化アルゴリズム 式(21)において, 微視変数  $\{\Delta w\}$  を静的に縮約する.  $\{\Delta w\}$  は,

$$\{\Delta w\} = K_{ww}^{-1} (\{r_w\} - K_{wu} \{\Delta u\}) \quad (56)$$

と表せるので, 上式を巨視式に代入して  $\{\Delta w\}$  を消去すると,

$$(K_{uu} - K_{uw} K_{ww}^{-1} K_{wu}) \{\Delta u\} = \{r_u\} - K_{uw} K_{ww}^{-1} \{r_w\} \quad (57)$$

となる. ここで, この時点での  $\bar{F}$  に対して次式を置くと,

$$\{r_w\} = 0 \quad (58)$$

式(42),(56)より,

$$\{\Delta w\} = -K_{ww}^{-1} K_{wu} \{\Delta u\} = -[\chi] [\bar{B}] \{\Delta u\} \quad (59)$$