厚生労働科学研究費補助金（政策科学推進研究事業）
分担研究報告書

人口動態変動および構造変化の見通しとその推計手法に関する総合的研究：「出生意欲データを用いた出生率推計に関する基礎研究」

研究分担者　守泉理恵　国立社会保障・人口問題研究所

研究要旨

2時点の調査データを用いてコーホート完結出生子ども数を推計する de Beer（1991）が示したPAF法を取り上げ、日本の「出生動向基本調査」第12回（2002年）、第13回（2005年）のデータを用いて試算を行った。

その結果、日本において、調査で把握される予定子ども数・希望子ども数は実際の行動に比べて過大予想であり、とくに35歳未満の若い世代のコーホート完結出生子ども数は、調査値を24～35％ほど割引く必要があることが分かった。また、推計された完結出生子ども数は、02年調査に比べて05年調査で若年層に出生意欲下げ止まりの傾向がみられたことから、1980年代以降の世代で反転上昇する動きを示した。

日本の公的推計（2006年12月推計）の出生率仮定値との比較では、35歳以上の部分ではPAF法推計値と06年公的推計仮定値はかなり近い値であったが、35歳未満の若い層では差が大きく出ていた。これは、調査データにない独身者の追加予定子ども数をどのように推計するかという問題がかかわっている。本稿では独身者の現存子ども数は一律にゼロとし、希望子ども数を追加予定子ども数とみなして計算を行った。このため、独身者割合が高い若年層になるほど追加予定子ども数の平均値が高めに出て、完結出生子ども数も高くなったと考えられる。また、離死別経験ありの独身者は子どもがいる人も少なくないとみられ、独身者の追加予定子ども数を過大推計している可能性がある。

本稿で試みた推計方法はまだ改善の必要があるが、若い世代の女性たち自身の意識が反映された今回の推計値は、若いコーホートで出生率が反転上昇するパターンを描いており、これは若年層における今後の出生行動の方向性を予測する際に有用な資料になると考えられる。

今後は、調査で把握される出生意欲データの調整について、年齢や追加出生意欲の実現率だけでなく、女性の就業状況など、社会経済変数を取り入れたモデルを開発することが発展課題として挙げられる。

A．研究目的

将来人口推計において、出生率の仮定値は推計結果に大きな影響力を持つが、結婚・出生行動は人口学的要因、社会経済要因、文化要因などから多岐にわたり影響を受ける上に、今後どのように動くのか予測

する根拠となる理論やモデルがない。通常、出生率推計は、これまでの実績データの動向が分析され、そのトレンドが将来に投影されて仮定値が決められるが、人々の行動変化が激しい時期はまだデータのない若い世代の行動を見通すのは容易なことではない。

補外法以外の出生率推計方法の一つとして、調査で得られる出生意欲に関するデータを用いてコーホートごとの完結出生子ども数を推計する方法がある。本研究は、2 時点の調査データを用いてコーホート完結出生子ども数を推計する de Beer（1991）が示した Partial Adjustment Forecasting（PAF）法を取り上げ、日本の「出生動向基本調査」第12回(2002年)、第13回(2005年）のデータを用いて試算を行うことを目的とする。

B．研究方法

PAF 法において、コーホート完結出生子ども数は、年齢別累積出生子ども数に年齢別追加出生子ども数を加算していき、49 歳時点で得られた数値とする。このとき、年齢別の追加出生子ども数を算出するために、出生意欲（追加予定子ども数）の調査データを用いる。

PAF 法では、年齢が上がるに従って次第に予定していた出生が実現していくため、追加予定子ども数はそれに応じて変化していくと考える。2 時点の調査データを集計して出生コーホート別に観察すれば、あるコーホートが調査間隔分の時間を経てどの程度出生を累積し、また追加予定子ども数が変化したか、その変化率を算出することができる。そして$G_{c,a+i} - G_{c,a} = \mu_{c,a} A_{c,a}$という方程式を用いてコーホート完結出生子ども数の推計値を得る。$G_{c,a}$ は出生年 c、年齢 a の女性の累積出生率で、$A_{c,a}$ は、これらの女性の追加予定子ども数、$\mu_{c,a}$ は、a 歳から a+i 歳までの間に、a 歳時点の追加予定子ども数のうちどのくらい出生が実現するかを示す係数である。第 12 回・第 13 回出生動向基本調査で得られる年齢別追加予定子ども数のデータ、および人口動態統計から得られる年齢別累積出生率をこのモデルに投入し、1957～1986 年出生コーホートの完結出生子ども数の推計値を得た。

C．研究成果

1957 年出生コーホートの完結出生子ども数推計値は 1.971 人であるが、それ以降の若いコーホートでは低下していき、1960 年コーホート 1.846、1965 年コーホート 1.604、1970 年コーホート 1.444、1975 年コーホート 1.392 となる。そして 1980 年コーホート（2005 年の第 13 回調査時点で 25 歳）が最も低く、1.376 である。1981 年出生コーホート以降は反転上昇しており、今回の試算で最も若いコーホートである 1986 年生まれ（調査時点 19 歳）では 1.595 となっている。

推計値と調査で回答された予定子ども数を比べると、各コーホートとも、調査回答値より、PAF 法推計値の方が小さい。その差は、若いコーホートほど大きくなっている。調整係数をみると、1980 年出生コーホートが最小で、それ以降の 83～86 年コーホートでは調査回答値との差が縮小している。具体的な数値の動きとしては、1957～66 年出生コーホート（2005 年に 39～48 歳）までは 0.9 前後であり調査回答値と推計値がかなり近いが、1967 年出生コーホートで調整係数が一気に 0.7 台となっている。それ以降の 1970～80 年代の出生コーホートでは 0.65～0.76 の間の数値となっている。日本において、若い世代のコーホート完結出生子ども数は、調査で把握される予定子ども数を 24～35％割引く必要がある

ことを示している。

PAF 法推計値と、2006 年 12 月公表の公的将来人口推計の仮定値（中位・高位・低位）から計算されるコーホート合計特殊出生率の値を比較すると、PAF 法推計値は、2005 年時点に 35 歳以上であった 1970 年生まれの頃までは公的推計値と近いが、1974～75 年出生コーホート以降から両者は徐々に乖離し、若いコーホートほど差が大きくなっている。また、PAF 法で出した推計値は、おおまかな動き方としては出生率が反転上昇するパターンである公的推計の高位仮定に近い。

D．結果の考察

1980 年以降の若い世代で完結出生子ども数の推計値が反転上昇しているのは、第 12 回に比べて、第 13 回ではこれらの若いコーホートで予定子ども数の平均値が高まっているためである。1960 年代出生コーホートまでは、おおむね第 12 回より第 13 回で平均予定子ども数が小さく、1970 年代生まれではほぼ差がない。それが 1980 年代生まれでは第 13 回調査で平均値が大きい傾向にある。さらに、19～22 歳では追加予定子ども数の変化率（A）の数値が 1 を超えているため、出発点での追加予定子ども数が大きくなり、追加出生分が累積した 49 歳時の値が高まった。第 13 回調査では、夫婦調査において平均予定子ども数の低下が結婚 10 年未満の若い層の夫婦で下げ止まる傾向が見られ、独身者調査でも女性の平均希望子ども数が 30 歳未満層で第 12 回調査より増加した。夫婦調査・独身者調査共通でたずねている結婚・家族に関する意識でも、第 13 回調査では伝統的な価値観の支持が復調する流れも見られた。若い層で、これまで続いていた子ども数に関する意識の低下基調が下げ止まる兆しがあるといえるかもしれない。今回の完結出生子ども数の推計では、こうした意識の微妙な変化が反映されている。

また、公的推計に比べて、調査で得られた今後の出生意欲を用いている PAF 法推計値が大きい理由には、独身者の追加予定子ども数の置き方にあると考えられる。今回、独身者の現存子ども数は一律にゼロとし、希望子ども数を追加予定子ども数とみなして計算を行ったため、独身者割合が高い若年層になるほど追加予定子ども数の平均値が高めに出て、全体の完結出生子ども数も高くなる。また、独身者のうち離死別経験者は実際には子どもがいる場合も少なくないとみられ、そうした女性たちは必ずしも希望子ども数が追加予定子ども数とはならないだろう。今回の方法では独身者の追加予定子ども数を過大推計している可能性がある。

E．結論（政策含意含む）

本稿で試みた推計方法は、独身者の出生意欲データをどのように推定するかなどについて、まだ改善の必要がある。しかし、若い世代の女性たち自身の意識が反映された今回の推計値は、若いコーホートで出生率が反転上昇するパターンを描いており、これは若年層における今後の出生行動の方向性を予測する際に有用な資料になると考えられる。

今後の課題としては、上述の独身者の出生意欲推定の改善のほか、出生意欲に関する調査データの不詳をどのように処理するかということが挙げられる。本研究では不詳は欠損値として除外したが、第 12 回では女性総数の 8.7%（1,088 人）、第 13 回では 7.3%（809 人）が子ども数に関する意識の項目で不詳となっており、これは決して少ない数ではない。子ども数に関する意識への回答が不詳の女性は、出生意欲が低い場合が多いとも言われており、出生意

欲データの不詳の処理をどのように行うのかによって推計値が変わってくる。また、出生意欲データの調整にあたって、年齢や追加出生意欲の実現率だけでなく、女性の就業状況など、社会経済変数を取り入れたモデルを開発することも発展課題として挙げられるだろう。

F．研究発表

1．論文発表

なし

2．学会発表

なし

G．知的所有権の取得状況

なし

Ⅱ．　個別研究報告

1　多状態安定人口モデルにおける状態別再生産数とその応用

稲葉　寿

1　はじめに

1970 年代に人口学者のロジャース (Andrei Rogers) とルブラ (Herve Le Bras) はそれぞれ独立に、地理的に分割された人口集団とその地域間人口移動を考慮にいれるように安定人口モデルを拡張する試みを行った。これは数学的に言えば、古典的な安定人口モデル（スカラーモデル）をベクトルモデルへ拡張することであるが、多状態モデルを考察することは、一般に個体が同一年齢においてもその人口学的挙動に関して同質的ではないというリアリティをモデルに反映させるための重要な一歩である。社会科学、生物学、疫学等における定量的問題においては、個体群の様々な状態間における配置とその動的推移の問題として定式化されるものが数多く存在するから、多状態人口学の考え方の潜在的な応用範囲は非常に大きい。

ロジャースとその協力者は理論的モデルの提示にとどまらず、現実の入手可能なデータからパラメータを推定して、実用性のある多地域人口推計モデルを構築する方法論を示したため、その方法論は地域人口のみならず、労働力状態や配偶状態などの一般の多状態人口モデル (multistate demographic models) に適用されて大きな成功を収めた。特に今日では、計算能力はさらに飛躍的に発展しているから、利用しやすいプログラムパッケージなどの開発が進めば、多状態人口モデルの応用範囲は非常に広がるであろう。

一方、多状態人口モデルの理論に関してみると、多状態の純再生産行列が分解不能であれば、人口学の基本定理（安定人口モデルの強エルゴード定理）が成立することがわかっているが、まだ多くの未解明の課題が残されている。たとえば多状態安定人口の純再生産率（基本再生産数 R_0）は純再生産行列のスペクトル半径として与えられ、その性格はいささか抽象的である。とくに出生力の変動が特定の状態においてのみ発生するときに、R_0 にどのような影響をおよぼすか、という問題は興味深い。たとえば日本や西欧のような $R_0 < 1$ である少子化国において、ある地域ないしライフステージにおける出生力を上昇させることで全人口の R_0 を 1 以上にすることは可能であるか？、可能な場合はどの程度の上昇が必要か、という問いは、少子化国の人口政策を考えていく上で基本的な重要性をもっている。逆に、発展途上諸国においては、農村部などの高止まりしている出生力をどのていど引き下げれば、人口が定常化されるかに関心もたれている。

本稿では、上記の問題意識のもとで、多状態安定人口モデルにおいて各状態別の再生産数 (state-reproduction number) を定義して、それによる閾値条件、制御条件の定式化をおこなう。

2　多状態安定人口モデルと基本定理

2.1　基礎理論

はじめに多状態安定人口モデルの基本的な性質をみておこう。いま単性の人口が有限個の相互に排他的な状態 (state) に分割されているとして、$i = 1, 2, .., n$ を各状態を示す番号であるとする。ここで人口の状態とは個体の動態に影響を与えるような特性であって、具体的には居住地域、労働力状態、結婚状態、パリティ（出産歴）等が考えられる。$p_i(t, a)$ は $i-$ 地域の人口密度関数であるとして、人口ベクトルを

$$p(t, a) = (p_1(t, a), ..., p_n(t, a))^{\mathrm{T}},$$

と定義しておく。ここで τ は行列の転置作用を示す。$q_{ij}(a),\ i \neq j$ を状態 j から状態 i への瞬間的な推移強度、$\mu_j(a)$ を状態 j における死亡力関数であるとする。さらに

$$q_{jj}(a) = -\mu_j(a) - \sum_{i \neq j} q_{ij}(a), \quad i \leq j \leq n,$$

と定義して、$q_{ij}(a),\ 1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列を $Q(a)$ とする。また $m_{ij}(a)$ は状態 j にある個体が i 状態に属する新生児を産む年齢別出生率関数であるとする。$M(a)$ を $m_{ij}(a),\ 1 \leq i, j \leq n$ を (i, j) 要素とする $n \times n$ 行列とする。

このときベクトル型あるいは多状態の安定人口モデルは以下のようなベクトル型のマッケンドリックシステムとして表される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,a)}{\partial a} &= Q(a)p(t,a), \quad t > 0,\ a > 0, \\ p(t,0) &= \int_0^{\infty} M(a)p(t,a)da, \quad t > 0, \\ p(0,a) &= p_0(a). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで $p_0(a)$ は初期人口ベクトルである。

上記のシステムに対応する再生方程式を導くために以下のような行列微分方程式を考えよう：

$$\frac{dL(a)}{da} = Q(a)L(a), \quad L(0) = I \tag{2.2}$$

ここで I は $n \times n$ の単位行列である。$Q(a)$ を連続関数と仮定しておけば、常微分方程式論でよく知られているように、$L(a)$ は常微分方程式システム

$$\frac{dp(a)}{da} = Q(a)p(a)$$

の基本解行列に他ならない。$p(a)$ は n 次元ベクトルであり、これを多状態の出生コーホートを表す人口ベクトルとみれば、$p(a)$ はゼロ歳時における状態間の新生児分布が $p(0)$ である場合の a 歳時点で生存している人口の状態間分布に他ならない。$Q(a)$ は対角要素だけが負であるため、(2.2) は本質的に正なシステムであって、基本解行列 $L(a)$ は非負の正則行列である。$L(a)$ の (i, j) 要素を $\ell_{ij}(a)$ とすれば、$\ell_{ij}(a)$ は j 状態に出生した個体が a 歳で i 状態に生存している確率を表している。さらに推移行列 $L(b, a),\ b \geq a$ を $L(b, a) = L(b)L^{-1}(a)$ と定義すれば、これも非負行列であり、その要素 $\ell_{ij}(b, a)$ は a 歳で j 状態に生存していた個体が b 歳で i 状態に生存している確率を表すことがわかる。

推移行列を用いればマッケンドリック方程式 (2.1) は特性線に沿って積分されて、以下の表現を得る：

$$p(t,a)=\begin{cases}L(a)B(t-a), & t-a>0\\ L(a,a-t)p_0(a-t), & a-t>0\end{cases} \tag{2.3}$$

ただしここで $B(t):=p(t,0)$ である。従ってスカラーの安定人口モデルの場合と同様に、表現 (2.3) を (2.1) の境界条件の式に代入すれば以下を得る：

$$B(t)=G(t)+\int_0^t \Psi(a)B(t-a)da. \tag{2.4}$$

ただしここで $G(t)$, $\Psi(a)$ は以下のように与えられる既知の関数である：

$$G(t):=\int_t^\infty M(a)L(a,a-t)p_0(a-t)da, \quad \Psi(a):=M(a)L(a).$$

ここで適宜 $M(a)$, $L(a)$ は $a>\omega$ ではゼロとなるように定義域は拡大されているとする。

人口問題で考えている状況においては $G(t)$, $\Psi(a)$ は有界可積分と仮定してよいから、そうした仮定のもとではベクトル型再生積分方程式 (2.4) は $t\in[0,\infty)$ において一意的な局所可積分解 $B(t)$ を持つことが容易にわかる。(2.4) から $B(t)$ の挙動が決定されれば、$p(t,a)$ の挙動は (2.3) によってすべてきまる。

再生産核行列 Ψ のラプラス変換を

$$\hat{\Psi}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda a}\Psi(a)da$$

と書いておく。再生過程 (2.4) に関する**純再生産行列** (net reproduction matrix) を

$$K=\hat{\Psi}(0)=\int_0^\infty \Psi(a)da \tag{2.5}$$

と定義する。$\hat{\Psi}(0)$ が分解不能であれば、ベクトル値再生積分方程式 (2.4) の漸近挙動に関しては、内的成長率 λ_0 および初期条件に依存する正の定数 Q_0 が存在して、以下が成り立つことが知られている：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_0 t}B(t)=Q_0u_0 \tag{2.6}$$

ここで内的成長率 λ_0 は、$\hat{\Psi}(\lambda)$ が固有値 1 をもつような実数（あるいはそのスペクトル半径 $r(\hat{\Psi}(\lambda)$ が 1 となるような実数）として与えられ、u_0 はそのときの固有値 1 に属する正右固有ベクトルである。

非負行列 K のスペクトル半径（K のフロベニウス根）を $r(K)$ とするとき、$\hat{\Psi}(\lambda_0)=1$ で、$\hat{\Psi}(\lambda)$ は実数 λ に関して単調減少であるから、$r(K)>1$ であれば、$\lambda_0>0$ となり、$r(K)=1$ であれば、$\lambda_0=0$、$r(K)<1$ であれば、$\lambda_0<0$ となることがわかる。そこで、$r(K)$ を**純再生産率** (net reproduction rate) とよぶ。

さらに v_0 を対応する左固有ベクトルとすれば、Q_0 は以下のように計算される：

$$Q_0=\frac{v_0^{\mathrm{T}}\hat{G}(\lambda_0)}{v_0^{\mathrm{T}}\Psi_1u_0} \tag{2.7}$$

ここで、

$$\Psi_1=\int_0^\infty ae^{-\lambda_0 a}\Psi(a)da$$

である。したがって、年齢分布関数ベクトル $p(t,a)$ に関しては、

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_0 t}p(t,a)=Q_0e^{-\lambda_0 a}L(a)u_0 \tag{2.8}$$

がなりたち、状態別の年齢プロファイルは多状態安定人口分布に収束する：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p(t,a)}{\int_0^\infty |p(t,a)|da}=\frac{e^{-\lambda_0 a}L(a)u_0}{\int_0^\infty e^{-\lambda_0 a}|L(a)u_0|da} \tag{2.9}$$

ただしここで n ベクトル $p=(p_1,...,p_n)^{\mathrm{T}}$ のノルムとしては $|p|=\sum_{i=1}^n |p_i|$ を採用する。

とくに K が分解不能で固有値 1 をもてば、その対応する固有ベクトルを u_0 とするとき多状態の人口モメンタムが

$$M=\frac{\int_0^\infty |L(a)u_0|da}{\int_0^\infty |p_0(a)|da}\frac{v_0^{\mathrm{T}}\hat{G}(0)}{v_0^{\mathrm{T}}\Psi_1 u_0} \tag{2.10}$$

として計算される。ただし、

$$\Psi_1=\int_0^\infty a\Psi(a)da$$

であり、v_0 は K の固有値 1 に属する左固有ベクトルである。多状態モデルにおいては、K が固有値 1 をもつようにパラメータを変更する方法は、スカラーモデルの場合以上に多様であることは明らかであろう。純再生産行列のパラメータ変更は、その固有ベクトルも変えてしまうので、たとえ初期データが安定人口分布であっても、スカラーモデルにおける Keyfitz のモメンタム公式のような単純な形は得られない。

2.2 出生状態と非出生状態

人口を分類する状態に関して、ある状態に新生児が出生する可能性がある場合には、その状態を**出生状態** (birth state) とよぶ。例えば、状態が居住地域である場合はすべてが出生状態であるが、労働力状態別人口では、非労働力が出生状態であり、結婚状態別人口では未婚状態が出生状態、年齢依存パリティ拡大モデルではパリティゼロ状態だけが出生状態である。年齢依存モデルにおいては、非出生状態の境界条件はゼロとなるが、持続時間依存モデルでは必ずしもそうではないことに注意しなければならない。また非出生状態からの生残率は形式的に計算可能であるが、実際上意味がない。

多地域人口モデルのように、全状態（地域）が出生状態である場合は、純再生産行列 $K=\hat{\Psi}(0)$ を、数理疫学の用語にならって、**次世代行列** (next generation matrix) にとよぶことができる。次世代行列のスペクトル半径は**基本再生産数** (basic reproduction number) とよばれ、R_0 と書かれる。すなわち、全状態が出生状態である場合は、純再生産行列と次世代行列が一致して、純再生産率と基本再生産数は等しい。しかし、一般には上記で述べた労働力状態別人口や結婚状態別人口などのように、状態は非出生状態を含んでいて、再生方程式 (2.4) は $0=0$ という自明な関係式を含んでいる。そうした場合は純再生産行列 $\hat{\Psi}(0)$ は次世代行列とは異なる。

いま一般性を失うことなく、状態番号を付け替えて出生状態は 1 から k $(\leq n)$ であると仮定できる。このとき年齢依存モデルを考えると、$B_{k+1}=\cdots=B_n=0$ であって、(2.3) は実際には k 次元ベクトル $B^*(t)=(B_1(t),\cdots,B_k(t))$, $G^*(t)=(G_1(t),\cdots,G_k(t))$ と $\Psi(a)$ の k 次首座行列 $\Psi^*(a)=(\psi_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ による方程式となる：

$$B^*(t)=G^*(t)+\int_0^t \Psi^*(a)B^*(t-a)da. \tag{2.11}$$

このときの次世代行列 $K^*=\int_0^\infty \Psi^*(a)da$ は $K=\hat{\Psi}(0)$ の k 次首座行列であるが、K のそれ以外の要素はすべてゼロだから、次世代行列のスペクトル半径として与えられる基本再生産数 R_0 は、非出生状態を含む純再生産行列 K のスペクトル半径（純再生産率）に等しい。

いま (2.11) において、初期人口からみて n 世代目の出生数ベクトルを $B_n^*(t)$ とすれば、

$$B_1^*(t) = G^*(t), \quad B_{n+1}^*(t) = \int_0^t \Psi^*(a) B_n^*(t-a)da$$

であり、$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^*(t)$ となる。このとき累積出生児数ベクトル $X_n = \int_0^\infty B^*(t)dt$ は以下をみたす：

$$X_{n+1} = K^* X_n,$$

ここで $K^* = \int_0^\infty \Psi^*(a)da$ は次世代行列である。したがって、$X_n = (K^*)^{n-1}X_1$ であり、K^* の固有値 R_0 に対応する正固有ベクトルを u_0 とすれば、初期条件に依存する正定数 C が存在して、$X_n \sim CR_0^{n-1}u_0$ となるから、$R_0 = r(K^*)$ は漸近的な、継続する世代のサイズ比に等しい。

例題 2.1 女性人口をシングルと有配偶の 2 状態にわけ、それぞれの出生率を $\beta_1(a), \beta_2(a)$, 生残率を $\ell_{ij}(a)$ とすれば、

$$\Psi(a) = \begin{pmatrix} \beta_1(a) & \beta_2(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11}(a) & \ell_{12}(a) \\ \ell_{21}(a) & \ell_{22}(a) \end{pmatrix}$$

となる。したがってこの場合、次世代行列は一次元であって、それ自身が純再生産率（基本再生産数）になっている：

$$R_0 = K^* = \int_0^\infty [\beta_1(a)\ell_{11}(a) + \beta_2(a)\ell_{21}(a)]da.$$

状態間移動の強度を

$$Q(a) = \begin{pmatrix} -q_{21}(a) - \mu_1(a) & q_{12}(a) \\ q_{21}(a) & -q_{12}(a) - \mu_2(a) \end{pmatrix}$$

としよう。このとき $\mu_j(a)$ は状態 j での自然死亡率であり、$q_{21}(a)$ は結婚強度、$q_{12}(a)$ は離婚ないし配偶者が死亡する強度である。この場合、新生児はすべて単身状態に生まれるから、生残率として意味のあるのは $\ell_{11}(a), \ell_{21}(a)$ だけであり、初期値問題

$$\frac{d}{da}\begin{pmatrix} \ell_{11}(a) \\ \ell_{21}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{21}(a) - \mu_1(a) & q_{12}(a) \\ q_{21}(a) & -q_{12}(a) - \mu_2(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11}(a) \\ \ell_{21}(a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ell_{11}(0) \\ \ell_{21}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解として与えられる。

上記のように、基本モデルが年齢依存モデルであって、「出生」が文字通り年齢ゼロの新生児の再生産を意味する場合には、状態として非出生状態が含まれていても $r(K) = r(K^*)$ なので、システムの純再生産率 $r(K)$ と基本再生産数 $R_0 = r(K^*)$ と区別する必要はない。ところが、Feeney のパリティ拡大モデルのように、年齢のかわりに持続時間が使用される場合には、基本モデル (2.1) の純再生産率 $r(K)$ は、基本再生産数 $R_0 = r(K^*)$ とは異なり、しかも新生児は、非出生状態を経由して再生産されるので、(2.10) のような出生状態のみからなる再生産モデルを簡単に書き下すことはできない。

例題 2.2 持続時間依存のパリティ拡大モデル（最大パリティ n）を考えると、$n-1$ パリティまでの再生産に

関する純再生産行列は以下のような形をしている：

$$K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & \dots & \dots & k_{n-1} \\ k_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & k_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、k_j はパリティ j におけるパリティ拡大率である。新生児はパリティゼロに生まれるから、状態1のみが出生状態であり、そのほかの状態の再生産は出産にともなうパリティ増加を意味している。

K はレスリー行列であるから、その固有値は以下の特性方程式の根で与えられることはよく知られている：

$$F(\lambda) := \frac{k_0}{\lambda} + \frac{k_1 k_0}{\lambda} + \cdots + \frac{k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_0}{\lambda^N} = 1, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \tag{2.12}$$

$F(\lambda)$ は $\lambda > 0$ に関して単調減少であり、$r(K)$ は (2.12) の唯一の正根であるから、$F(1) > 1$ であれば $r(K) > 1$ であり、$F(1) < 1$ であれば $r(K) < 1$ である。その生物的な意味から、

$$F(1) = k_0 + k_1 k_0 + \cdots + k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_0,$$

は1人の女性が生涯に生む（同性）子供数となるから、これが1次元の次世代行列 ($K^* = F(1)$) であり、基本再生生産数 R_0 となる。一方、$r(K)$ は世代的に見た持続時間ゼロのパリティ別人口ベクトルのサイズの漸近的成長率であり、R_0 とは解釈されない。

3　部分集団の再生産理論

上記のように出生状態と非出生状態が混合している場合、純再生産行列 K の正固有値は考えている人口の基本再生産数 R_0 を与えない。基本再生産数は出生状態のみからなる状態ベクトルの再生方程式から導かれるはずである。一方、すべてが出生状態からなる人口システムにおいても、そのうちの特定集団の再生産数を考えることは、応用上非常に重要である。例えば、特定の状態にある人口のみが人口政策的介入の対象になる場合、介入行為の結果として全人口システムの再生産がどのような影響を受けるか、という問は非常に興味深い。そこで以下では、全状態を二つの集団（ターゲットとノンターゲット）にわけて、ターゲット人口集団の再生産を記述する再生方程式を導くことを考えよう。

一般性を失うことなく状態番号を付け替えて、最初の1から k までの状態がターゲットとなる部分人口集団の状態であるとする。すなわち N 個の状態をターゲットとなる集団とそれ以外の集団に分割する：$\{1,2,\dots,N\} = \{1,2,\dots,k\} \cup \{k+1,\dots,N\} =: \Omega_+ + \Omega_-$。$\Omega_+$ はターゲットとなる状態の集合である。

$B(t) = (B_1(t),\dots,B_N(t))^{\mathrm{T}}$ を出生率ベクトルとする。このとき再生方程式 (2.3) における出生率 $B(t)$ と初期データ $G(t)$ を以下のように分解しよう：

$$B_+(t) = (B_1(t),\dots,B_k(t),0,\dots,0)^{\mathrm{T}}, \quad B_-(t) = B(t) - B_+(t),$$

$$G_+(t) := (G_1(t),\dots,G_k(t),0,\dots,0)^{\mathrm{T}}, \quad G_-(t) = G(t) - G_+(t).$$

ターゲットの状態への $N \times N$ 射影行列を以下のように定義する：

$$P := \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

ここで I_{11} は $k \times k$ の単位行列であり、O_{jk} はゼロ行列である。たとえば O_{22} は $(N-k) \times (N-k)$ のゼロ行列となる。$P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ とすれば、$i \in \Omega_+$ であれば $p_{ii} = 1$、それ以外の場合は $p_{ij} = 0$ となる。そこで $B_+(t) = PB(t)$, $B(t)_- = (I-P)B(t)$ 等と表現できる。

上記の分割に対応して、再生方程式 (2.4) は二つの方程式へ分解される：

$$\begin{aligned} B_+(t) &= G_+(t) + \int_0^t P\Psi(\tau)B_+(t-\tau)d\tau + \int_0^t P\Psi(\tau)B_-(t-\tau)d\tau, \\ &= G_+(t) + (\Psi_+ * B_+)(t) + (\Psi_+ * B_-)(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} B_-(t) &= G_-(t) + \int_0^t (I-P)\Psi(\tau)B_+(t-\tau)d\tau + \int_0^t (I-P)\Psi(\tau)B_-(t-\tau)d\tau, \\ &= G_-(t) + (\Psi_- * B_+)(t) + (\Psi_- * B_-)(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで $\Psi_+ := P\Psi$, $\Psi_- := (I-P)\Psi$ であり、$*$ は関数の合成積を表す。

積分核 $\Psi_\pm(\tau)$ に対応するレゾルベント核を $\Phi_\pm(\tau)$ としよう。レゾルベント核は以下の（行列）積分方程式の解として得られる：

$$\Phi_\pm = \Psi_\pm + \Phi_\pm * \Psi_\pm \tag{3.3}$$

明らかにレゾルベント核 $\Phi_\pm$ は逐次代入によって以下のように具体的に得られる：

$$\Phi_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_\pm^{(n)} \tag{3.4}$$

ここで、$\Psi_-^{(n)}$ は逐次的に以下のように計算される：

$$\Psi_\pm^{(1)} = \Psi_\pm, \quad \Psi_\pm^{(n+1)} = \Psi_\pm^{(n)} * \Psi_\pm -, \quad (n = 1, 2, ...)$$

方程式 (3.2) において $g_- + \Psi_- * v_+$ を初期データとみなせば、レゾルベント核を用いて方程式 (3.2) は形式的に v_- に関して解くことができる：

$$\begin{aligned} v_- &= g_- + \Psi_- * v_+ + \Phi_- * (g_- + \Psi_- * v_+) \\ &= g_- + \Phi_- * g_- + (\Psi_- + \Phi_- * \Psi_-) * v_+. \end{aligned} \tag{3.5}$$

方程式 (3.5) から方程式 (3.1) へ v_- の表現を投入すれば、v_+ に関する再生方程式を得る：

$$v_+ = g_+ + \Psi_+ * g_- + (\Psi_+ * \Phi_-) * g_- + [\Psi_+ + \Psi_+ * (\Psi_- + \Phi_- * \Psi_-)] * v_+. \tag{3.6}$$

それゆえ、積分核

$$\begin{aligned} A_+(\tau) &:= \Psi_+(\tau) + (\Psi_+ * \Psi_-)(\tau) + \Psi_+ * (\Phi_- * \Psi_-)(\tau) \\ &= \Psi_+(\tau) + (\Psi_+ * \Phi_-)(\tau) \end{aligned} \tag{3.7}$$

がターゲット集団 ℓ_+ の再生ダイナミクスを決定している。

以下では Φ_- は $[0, \infty)$ 上で可積分であると仮定しよう。そのときは A_+ も可積分となり、その積分は以下のように計算される：

$$M_+ := \int_0^\infty A_+(\tau)d\tau = K_+(I + Q_-) \tag{3.8}$$

ここで

$$K_+ := PK = \int_0^\infty \Psi_+(\tau)d\tau, \quad Q_- := \int_0^\infty \Phi_-(\tau)d\tau$$

であり、レゾルベント方程式 (3.3) を積分して得られる関係

$$Q_- = K_- + Q_- K_-. \tag{3.9}$$

を用いている。

レゾルベント核 Φ_- が可積分であるための必要十分条件は複素平面上の右半平面にあるすべての λ に対して以下が成り立つことである（Paley–Wiener の定理 [3]）：

$$\det(I - \hat{\Psi}_-(\lambda)) \neq 0. \tag{3.10}$$

$\Psi_{jk}(\tau)$ $1 \leq j,k \leq 2$ を以下のような Ψ の小行列であるとしよう：

$$\Psi(\tau) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(\tau) & \Psi_{12}(\tau) \\ \Psi_{21}(\tau) & \Psi_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

ここで Ψ_{11} は $\ell \times \ell$ の首座小行列であり、Ψ_{22} は $(N-\ell) \times (N-\ell)$ の首座小行列である。したがって、

$$\Psi_-(\tau) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ \Psi_{21}(\tau) & \Psi_{22}(\tau) \end{pmatrix}, \quad I - \hat{\Psi}_-(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ -\hat{\Psi}_{21}(\lambda) & I_{22} - \hat{\Psi}_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

ここで、I_{11} は $\ell \times \ell$ の単位行列であり、I_{22} は $(N-\ell) \times (N-\ell)$ の単位行列である。このとき以下が容易にわかる：

$$\{\lambda \in \mathbf{C} | \det(I - \hat{\Psi}_-(\lambda)) = 0\} = \{\lambda \in \mathbf{C} | \det(I_{22} - \hat{\Psi}_{22}(\lambda)) = 0\}. \tag{3.11}$$

Ψ の分割に対応して、小行列 K_{jk} を以下のように定義できる：

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

ここで

$$K_{jk} = \int_0^\infty \Psi_{jk}(\tau)d\tau = \hat{\Psi}_{jk}(0).$$

したがって、

$$K_- = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

であり、

$$r(K_{22}) = r(K_-) \tag{3.12}$$

を得る。行列 K_{11}, K_{22} はそれぞれターゲット集団、非ターゲット集団が他集団を利用せずに自己再生産する場合の純再生産行列であるから、そのスペクトル半径を**自己再生産数** (self-reproduction number) とよんでおこう。

多状態安定人口モデルにおける Euler–Lotka の特性方程式に関する結果 ([5]) から、$\hat{\Psi}_{22}(0) = K_{22}$ が分解不能であれば、$\det(I - \hat{\Psi}_{22}(\lambda)) \neq 0$ が右半平面で成り立つためには、$r(\hat{\Psi}_{22}(0)) = r(K_{22}) < 1$ となることが必要十分である。この条件は (3.12) によって、$r(\hat{\Psi}_-(0)) = r(K_-) < 1$ という条件と同値である。したがって条件 (3.10)、すなわち Φ_- の可積分性は、$r(K_-) < 1$ であるとき、かつそのときのみ成立する。そこで以下の仮定を導入しよう：

仮定 3.1 非ターゲット集団の自己再生産数は 1 未満である：

$$r(K_-) = r(K_{22}) < 1. \tag{3.13}$$

条件 3.1 はターゲット集団が取り除かれれば、残りの状態別人口だけでは純再生産率は臨界以下であって、人口を維持できないことを意味している。一方、もし $r(K_-) > 1$ であれば、ターゲットではない集団 ℓ_- は、ターゲット集団 ℓ_+ が存在しなくても、滅亡することなく自己を維持できる。全体システムが分解不能という条件のもとでは、そのことは必然的に全人口の内的成長率が正であること、あるいは $r(K) > 1$ であることを意味している。このときターゲット集団の新生児は非ターゲット状態を通じて無限に子孫を再生産できるから、その再生産数は∞に発散する。

仮定 3.1 のもとでは、行列 $I - K_-$ は非負逆転可能であり、(3.9) の正の解が以下のように得られる：

$$Q_- = K_-(I - K_-)^{-1}. \tag{3.14}$$

上記の解 (3.14) を (3.8) に適用すれば、

$$M_+ = K_+(I - K_-)^{-1}. \tag{3.15}$$

M_+ の最初の ℓ 行 ℓ 列からなる $\ell \times \ell$ 首座行列を M_{+11} は、ターゲット集団 ℓ_+ の純再生産行列を与え、$r(M_{+11}) = r(M_+)$ となる。実際、M_+ は最初の ℓ_+ 行のみが非負の要素をもち、他の行はゼロだからである。したがってターゲット集団 ℓ_+ の状態別再生産数を T_+ で表せば、

$$T_+ = r(M_{+11}) = r(M_+). \tag{3.16}$$

定理 3.2 仮定 3.1 のもとで、M_{+11} が分解不能であれば、$r(K) > 1$ ならば $T_+ > 1$ であり、$r(K) = 1$ ならば $T_+ = 1$、$r(K) < 1$ であれば $T_+ < 1$ となる。

（証明）$w > 0$ を固有値 $r(K)$ に対応する K の正固有ベクトルとする。方程式 (3.16) から、以下を得る：

$$M_+(I - K) = (I - M_+)K_+ = (I - M_+)PK. \tag{3.17}$$

(3.18) を w に適用すれば、

$$(1 - r(K))M_+w = r(K)(I - M_+)Pw. \tag{3.18}$$

$M_+w \geq 0$ であり、$Pw \geq 0$ であるから、もし $1 - r(K) > 0$ であれば $I - M_+$ は非負逆転可能でなければならず、$T_+ = r(M_+) < 1$ である。次に $r(K) \geq 1$ であるとしよう。$(Pw)_+$ を ℓ 次元ベクトルで、その j 番目 $(1 \leq j \leq \ell)$ の要素が、Pw の j 番目の要素であるものとする。このとき $r(K) = 1$ であれば、$(I_{11} - M_{+11})(Pw)_+ = 0$ である。M_{+11} は分解不能なので、$(Pw)_+$ はそのフロベニウス固有ベクトルであり、$r(M_{+11}) = T_+ = 1$ である。$r(K) > 1$ であれば、$(Pw)_+ < M_{+11}(Pw)_+$ であるから、$r(M_{+11}) = T_+ > 1$ となる ([1], p. 28, (1.11) を参照)。

4 出生力の制御による人口定常化

先進諸国のような劣臨界出生力 $(R_0 < 1)$ をもつ国々では、出生力を上げて定常状態へ移行するにはどの程度出生力を上昇させるべきかが問題となる。逆に発展途上諸国では出生力は過臨界 $(R_0 > 1)$ であり、定常化のためにどの程度出生力を低下させるべきかが問われる。一国の人口を同質的な集団として一括して扱う場合

は、古典的な安定人口モデルによって臨界的な出生力水準が規定されるが、現実的な人口は人口学的パラメータが多様な多状態人口であり、人口学的政策も必ずしも全人口に一様に適用できる場合だけではなく、一般にはある部分集団にのみ適用されるケースが多い。

多状態人口の定常化の方法とその影響に関してはすでに Rogers and Willekens [11] による古典的研究があるが、これまでは全状態で一斉に出生力を変化させるという仮定が用いられてきた。たとえば、すべての状態の出生力を $(1-\epsilon)$ 倍すれば、R_0 は $(1-\epsilon)R_0$ へ変化するから、臨界的な増加ないし減少の割合は

$$\epsilon^* = 1 - \frac{1}{R_0}$$

として与えられる。あるいはすべての状態の出生コーホートの純再生産率 $\sum_{i=1}^{n} k_{ij},\ j = 1,2,..,n$ を 1 に変化させることで、R_0 は 1 となり、理論上は定常状態を達成できるが、出生状態別に純再生産率を制御することは現実的には困難である。

しかし上記の部分集団の再生産理論を用いれば、ターゲット状態の出生力だけを変化させることで、全人口の定常化を実現可能であることがわかる。たとえば、全状態を都市部と農村部に分けた場合、都市人口の自己再生産数が 1 未満であり、農村状態の自己再生産数が 1 以上であれば、農村部の出生力を低下させることで人口の定常化が可能であり、必要な農村部出生力の減少の割合が計算できる。

ここでは特殊な、しかし重要なケースとしてターゲットとなる人口がただ一種のタイプからなる場合を考えよう。一般性を失うことなく、$\ell_+ = \{1\}$ と仮定できる。このときは M_+ の $(1,1)$ 要素が状態 1 の状態別再生産数となり、以下のように計算される：

$$T_+ = \langle e, K_+(I - K_-)^{-1}e\rangle = \langle e, K(I - (I - P)K)^{-1}e\rangle, \tag{4.1}$$

ここで、$e := (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ は第 1 要素だけが 1 で他の要素がゼロであるベクトルである ([9])。

これまで述べたように T_+ が有限値になるのは第二状態以下の人口だけでは内的成長率が正にはならない、すなわち $r(K_-) < 1$ となる場合だけである。このことは第 1 状態を除いた人口システムの自己再生産数は 1 未満で、第 1 状態抜きでは人口が維持できないことを意味している。このような状況下で、全体人口の純再生産率が 1 より大きい $(T_+ > 1)$ か、あるいは全人口の純再生産率は 1 より小さい $(T_+ < 1)$ 場合に、どのように出生率を制御すれば、臨界条件 $T_+ = 1$ を導くことができるか、を考えよう。

はじめに第一状態の出生率を $1-\epsilon$ 倍したとしよう。ただし $T_+ > 1$ のときは $\epsilon > 0$ であり、$T_+ < 1$ のときは $\epsilon < 0$ である。このとき $K = (k_{ij})_{1\le i,j\le n}$ の第一行だけが、$(1-\epsilon)k_{1j}$ におきかわるから、T_+ は $(1-\epsilon)T_+$ へ変化する。したがって臨界条件は $(1-\epsilon)T_+ = 1$ であり、

$$\epsilon^* = 1 - \frac{1}{T_+} \tag{4.2}$$

とすれば、$T_+ > 1$ のときはターゲット状態の出生率を ϵ^* の割合で削減すれば、システムを定常状態へ導ける。逆に $T_+ < 1$ の場合は $-\epsilon^*$ の割合だけ出生率を増加させればシステムは臨界条件を達して定常化する。これを行制御とよぶ。

一方、列和 $\sum_{i=1}^{n} k_{i1}$ はターゲット状態 1 に生まれた人口が生涯に生む子供数を与えている。そこで、ターゲット状態に生まれた人の出生数を $(1-\epsilon)$ 倍にしたと仮定しよう。このときも T_+ は $(1-\epsilon)T_+$ へ変化することが容易に示される ([2])。これを列制御とよぼう。

例題 4.1 以上のことを 2 状態モデルで具体的に考えてみよう。例として Rogers の都市・農村モデル ([12], p.

128) を用いる：

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

このき 1-状態は都市地域、2-状態は農村地域を示し、都市出身者の純再生産率は 1 であるが、農村出身者のそれは 1.5 であり、全体の基本再生産数は

$$R_0 = r(K) = \frac{1}{2}\left[k_{11} + k_{22} + \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}}\right] = \frac{5}{4} > 1$$

である。都市の自己再生産数は 1 未満であるから、農村部の状態別再生産数が計算できる：

$$T_+ = k_{22} + \frac{k_{12}k_{21}}{1 - k_{11}} = \frac{3}{2}$$

したがって、$\epsilon^* = 1/3$ であり、農村部の出生力あるいは農村出身者の出生力を 33 パーセント削減すれば定常状態へ至る。一方 $R_0 = 5/4$ から明らかなように、全ての人口の出生力を 20 パーセント削減すれば定常化される。

ただし上記の例において、より長期的に考えれば、農村部の出生力の変化は人口サイズを変化させ、都市・農村間人口移動量を変化させる可能性がある。すなわち k_{ij} の一部の要素の変化は他の要素の変化を導く可能性があることに注意しなければならない。そのような間接作用まで考慮すれば、臨界水準は (4.2) のような単純な公式では与えられないであろう。

例題 4.2 女性人口を未婚 (1) と初婚有配偶 (2) にわけ、女性は未婚と初婚状態においてのみ再生産可能であると仮定する。1 女性が生涯において未婚状態で生む平均女児数を k_{11}, 初婚有配偶で生む平均女児数を k_{22}, 生涯の初婚確率を p とする。未婚と初婚有配偶の 2-状態モデルにおける純再生産行列は

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

となる。出生状態は未婚状態だけであるから、この行列は次世代行列ではなく、その正固有値は基本再生産数にはならない。この場合の女子の基本再生産数 R_0 は 1-状態の状態別再生産数であって、それを T_{+1} と書けば、

$$R_0 = T_{+1} = k_{11} + pk_{12}$$

であり、これは確かに 1 女性が生涯に生むと期待される平均女児数になっている。一方、もし $k_{11} < 1$ であれば有配偶状態の状態別再生産数 T_{+2} が以下のように計算される：

$$T_{+2} = \frac{pk_{12}}{1 - k_{11}}$$

新生児のうちで未婚の母から生まれる子供の割合を $\theta = k_{11}/R_0$ とおけば、

$$T_{+2} = \frac{(1-\theta)R_0}{1 - \theta R_0} \tag{4.3}$$

を得る。日本人女性を想定して $\theta = 0.05$, $R_0 = 0.65$ とすれば、$T_{+2} = 0.638$ となる。T_{+2} は初婚有配偶状態の 1 女性が再生産する次世代の初婚有配偶状態の平均女性数である。

有配偶状態での再生産率の上昇によって定常化を果たすためには $1/T_{+2} - 1 = 0.566$ であるから、57 パーセント程度の増加が必要である。T_{+2} の増加は p の増加（初婚率の上昇）または k_{12} の上昇（有配偶出生率の上昇）によって直接的には引き起こされるが、未婚者の自己再生産率 k_{11} の上昇によっても間接的に引き起こされることは注意すべきである。

参考文献

[1] A. Berman and R. J. Plemmons (1979), *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York.

[2] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts (2007), The type-reproduction number T in models for infectious disease control, *Math. Biosci.* 206: 3-10.

[3] M. Iannelli (1995), *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*, Giardini Editori e Stampatori in Pisa.

[4] 稲葉 寿 (1987), 多次元安定人口理論の数学的基礎 I ：古典論, 「人口問題研究」 184: 52-77.

[5] H. Inaba (1988), A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process, *Math. Popul. Studies* 1(1): 49-77.

[6] 稲葉 寿 (2002), 「数理人口学」, 東京大学出版会, 東京.

[7] 稲葉 寿（編著） (2008), 「感染症の数理モデル」, 培風館, 東京.

[8] H. Inaba and H. Nishiura (2008), The state-reproduction number for a multistate class age structured epidemic system and its application to the asymptomatic transmission model, *Math. Biosci.* 216: 77-89.

[9] M. G. Roberts and J. A. P. Heesterbeek (2003), A new method for estimating the effort required to control an infectious disease, *Proc. R. Soc. Lond.* B 270: 1359-1364.

[10] A. Rogers (1975), *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley: New York.

[11] A. Rogers and F. Willekens (1978), The spatial reproductive value and the spatial momentum of zero population growth, *Environment and Planning* A 10: 503-518.

[12] A. Rogers (1995), *Multiregional Demography: Principles, Methods and Extensions*, Wiley, New York.

2　年齢シフトモデルの応用・発展に関する研究

石井　太

はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成18年12月推計）」(国立社会保障・人口問題研究所 2007) の将来生命表作成にあたっては、現在国際的に標準的な方法とされ、平成14年1月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えたモデル（以下、「年齢シフトモデル」と呼ぶ）により死亡率の投影を行った。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線を当てはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

本研究は、この年齢シフトモデルについて、より幅広い観点から有効性を再検証するとともに、さらなる応用・発展の可能性を検討するものである。

1. ロジスティックモデルと年齢変換

「日本の将来推計人口（平成18年12月推計）」の将来生命表の推計において採用された年齢シフトモデルは、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線を当てはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これらのパラメータを利用して死亡率に年齢軸上の変換を施した上でリー・カーター・モデルを適用するものである (石井 2008a)。ここでは、まず、その理論的根拠となっているロジスティックモデルの性質と、死亡率に対する年齢軸上の変換との関係について簡単に整理を行う。

年齢シフトモデルにおいてパラメータ推定に用いられている3パラメータロジスティックモデルは、

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)} + \gamma_t$$

で表される。Bongaarts (2005) では、第1項を senescent mortality ($\mu^s_{x,t}$) , 第2項を background mortality (μ^b_x) と呼んでいる。高齢部においては senescent mortality の影響が大きいものとなるので、まずこれに着目する。

$\mu^s_{x,t}$ は S_t という新たなパラメータを用いて以下のように書き変えることができる。

$$\begin{aligned}\mu^s_{x,t} &= \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1+\alpha_t \exp(\beta_t x)} \\ &= \frac{\exp(\log\alpha_t + \beta_t x)}{1+\exp(\log\alpha_t + \beta_t x)} \\ &= \frac{\exp(\beta_t(x-(-\frac{\log\alpha_t}{\beta_t})))}{1+\exp(\beta_t(x-(-\frac{\log\alpha_t}{\beta_t})))} \\ &= \frac{\exp(\beta_t(x-S_t))}{1+\exp(\beta_t(x-S_t))}\end{aligned}$$

ここで $S_t = -\frac{\log\alpha_t}{\beta_t}$ である。この表現は、任意の時刻 t における senescent mortality の死力関数は、ある基準時刻 t_0 の死力関数に年齢軸上の線形変換を施すことによって得られることを示している。そこで、本稿ではこのような年齢軸上の変換を年齢変換 (age-transformation) と呼ぶこととし、上記のロジスティックモデルの性質を年齢変換の概念を用いて表してみよう。

まず、年齢変換について、以下のように定義しておく。

定義 1 $x, y \in [0,\infty)$ を、ともに年齢を表す座標とする。$f_t : y \to x$ という連続な狭義単調増加関数によってこれらの座標間の一対一対応関係が示されたとき、f_t を時刻 t における x から y への年齢変換と呼ぶ。

一般に、年齢座標 x において、年齢と時間の関数 $m_{x,t}$ が定義されているとき、年齢変換 f_t により、年齢座標 y における関数 $\tilde{m}_{y,t}$ が、

$$\tilde{m}_{y,t} \underset{\text{def}}{=} m_{f_t(y),t}$$

により定義される。

次に、先のロジスティックモデルの性質を年齢変換を用いて表すこととする。x : 変換前の年齢座標、 y : 変換後の年齢座標とし、 $f_t : y \to x$: 時刻 t における線形な年齢変換を以下で定義する。

$$x = f_t(y) \underset{\text{def}}{=} \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t}(y - S_{t_0}) + S_t$$

さらに、変換後の年齢座標における死力関数を、$\tilde{\mu}^s_{y,t} \underset{\text{def}}{=} \mu^s_{f_t(y),t}$ により定義すれば、以下の命題により変換後座標における死力関数は不変であることがわかる。

命題 1

$$\tilde{\mu}^s_{y,t} = \tilde{\mu}^s_{y,t_0}$$

Bongaarts (2005) はパラメータ β_t の時系列変化が概ね一定であることに着目し、シフティング・ロジスティックモデルを提案した。これは、移動量が $S_t - S_{t_0}$ である年齢軸上の平行移動という、年齢変換の特別なケースであると見ることができる。

次の二つの命題は、S_t と β_t の性質を述べたものである。

命題 2

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu_{x,t}\right|_{x=S_t} = 0$$

命題 3

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\log\mu_{x,t}\right|_{x=S_t} = \frac{1}{2+\gamma_t}\beta_t$$

命題 2 は死力関数の傾きが年齢 S_t を境に逓減を始めるポイントであることを意味する。一方、命題 3 は、$\gamma_t \ll 2$ が近年の先進諸国のデータで成立することから、年齢 S_t における死力関数の対数が概ね $\frac{\beta_t}{2}$ に近いことを示す。ここから、パラメータ S_t と β_t を次のように解釈することが可能である。すなわち、S_t の近傍においては、ロジスティック曲線は S_t を基点とした横方向への動きと、β_t で表される曲線の勾配の変化によって特徴づけられており、β_t が一定で S_t が増加する場合には高齢方向へのシフティングが起きており、S_t が一定で β_t が増加する場合には矩形化が起きていると解釈することができる。

そこで、これら S_t、β_t を実データに基づき観察することとする。ここでは、基礎データとして Human Mortality Database の m_x を用い、グレビルの式により平滑化した m_x を $\mu_{x+0.5}$ の近似として 3 パラメータロジスティック曲線に当てはめることによりパラメータ S_t、β_t を推定した。パラメータ推定にあたっては、より高齢死亡率に焦点を当てる方法を試みることとした。すなわち、石井 (2008a) では Bongaarts (2005) を参考として、25 歳以上の対数死亡率に対して最小二乗法を用いてパラメータ推定を行ったが、本稿においては 50 歳以上の死亡率に限定し、対数を取る前の死亡率に対して最小二乗法を適用した。

図 1、2 は、日本のデータによる S_t と β_t の推計値である。図 3、4 は、1950、1975、2000 年における $\log(m_x)$（実線）に、S_t（点）と S_t における接線（破線）を示したものである。また、図 5〜8 は、米国のデータに対して同様に示したものである。両者の主な違いは、わが国に関してはこの間、S_t が大きく増加してきているのに対し、米国では S_t の変化がそれほど大きいものではないという点である。したがって、先のパラメータの解釈に基づけば、この観察期間において、日本では高齢方向へのシフティングから高齢死亡率改善が起きてきた傾向が強いと考えられる一方、米国では矩形化により高齢死亡率改善が起きてきた傾向が強いのではないかと考えられることになる。

このように、S_t と β_t を用いることにより、高齢部の死亡率を年齢変換により表現することができ、死亡率のモデリングに関する手がかりを得ることができる。しかしながら一