ここで、偶発故障の性質を全体的に見直すために掲げたのが**図 8** である。ここでは、機器のMTTF を 10 年として、信頼度曲線に対する y 軸との交点での接線を記入してある。偶発故障の故障率 $\lambda(t)$ は、時間に無関係に一定である。また、信頼度 $R(t)$、および故障分布 $f(t)$はいずれも指数関数的に減少する曲線になる。累積故障率 $F(t)$は $1\text{-}R(t)$であるので、指数関数的に増加する曲線となる。

また偶発故障の故障率は、定義によって時間に対し一定である。このような故障形態を故障率一定型(Constant Failure Rate:CFR)とよぶ。

3.4 初期故障

工業製品には、工業製品だからこそという故障形態がある。製造工程で、一定のトルクでネジを締めるドライバーが使われるが、ネジにゴミが付着しているため、トルクは規定値に達していたが、実際にはきちんと締まらないまま終わってしまったり、ハンダ付け工程でハンダが飛び散って、基板にへばり付いたが、洗浄工程で取り去れなかったり、などで、最終工程の試験では異常が現われなかったのに、稼動開始後の振動などで、ネジがさらに緩んだり、基板に付着していたハンダが落ちたりして、これらが原因になって故障が生じる、などである。

これらの故障の性格として、製造工程で故障の原因が紛れ込んだものであるため、かなり短期間でこれらが顕在化し、早い時期に故障に至ることになることが挙げられる。このため、このような故障を「初期故障」とよんでいる。この故障の特徴は、故障率が時間とともに減少していくことで、一般に、その故障率 $\lambda(t)$は、

$$\lambda(t) = \frac{N_e}{t_e} \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_e}\right) \qquad \cdots \textbf{式 20}$$

で表される。この関数は、偶発故障の信頼度とよく似た形になっている。ただし、初期故障ではこの関数が故障率を表していることに注意が必要である。

ここで再び $R(t) = \exp\left\{-\int \lambda(t)dt\right\}$ (**式 17**)の関係から、信頼度を求めると、

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left\{-\frac{N_e}{t_e}\int \exp\left(-\frac{t}{t_e}\right)dt\right\} \\ &= \exp\left[-N_e\left\{1-\exp\left(-\frac{t}{t_e}\right)\right\}\right] \end{aligned} \qquad \cdots \textbf{式 21}$$

となる。また、故障分布 $f(t)$は、$\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ (**式 14**)から、$f(t) = \lambda(t)R(t)$ となり、

$$f(t) = \frac{N_e}{t_e} \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_e}\right) \cdot \exp\left[-N_e\left\{1-\exp\left(-\frac{t}{t_e}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{N_e}{t_e} \cdot \exp\left[-\frac{t}{t_e} - N_e \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_e} \right) \right\} \right] \quad \cdots \text{ 式 } 22$$

となる。上の式で、N_e と t_e は、それぞれ定数であるが、これらの意味するものを考えておこう。**式 20** の t_e は、**式 19** の t_0 と同様、指数曲線の減少の速さを決める定数である。また、式 21 で、変数 t が無限大の時には、$\exp(-t/t_e)$はゼロになる。したがって、$R(\infty) = \exp(-N_e)$ となる。$R(\infty)$の値を記号 R_∞ で表すことにして、この式を書き換えると $N_e = -\ln(R_\infty)$ となる。

初期故障では、故障率 $\lambda(t)$が指数曲線となり、時間とともに減少して、やがてゼロになる。このため、信頼度 $R(t)$は、他の故障のように時間とともにゼロに近づくわけではなく、一定のレベルで安定することになる。このレベルを表すのが R_∞である。見方を変えれば、全製品のうち何割が初期故障を免れられるかを表しているといえる。**式 20、21** で $N_e = -\ln(R_\infty)$の置き換えをすると、これらの式は以下のように変形できる。

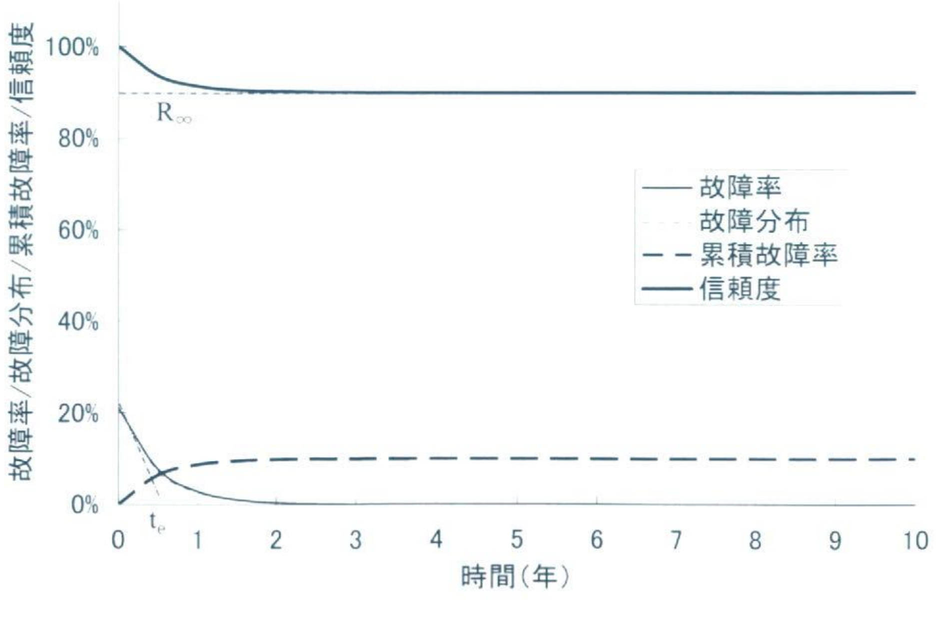
$$\lambda(t) = -\frac{\ln(R_\infty)}{t_e} \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_e} \right)$$

$$R(t) = R_\infty^{\ (1-\exp(-\frac{t}{t_e}))}$$

R_∞ を 90%、t_e を 0.5 年としたときの、初期故障の発生の様子を**図 9** に示してある。

初期故障の故障率は、時間とともに減少していく。このような故障形態を故障率減少型（Decreasing Failure Rate : DFR）とよぶ。

図 9. 初期故障の性質



4. 工業製品が寿命に到るまでの過程

工業製品が寿命に到るまでの過程を見てみると、まず製造過程で混入した要因が原因で、初期故障の生じる時期がある。初期故障の故障率は時間とともに減少するため、やがて初期故障は見られなくなる。その後、その製品に磨耗する要因が含まれていれば、磨耗故障の故障率が増加し始め、すべての製品が寿命を迎えることになる。そして、この工業製品の寿命期全体で発生する可能性があるのが、時間と無関係に発生する偶発故障ということになる。

工業製品には、初期故障、偶発故障、磨耗故障という、三種類の故障形態が存在するが、これらの故障形態が混在している工業製品の信頼度を予測する場合、時間を区切って、初期は初期故障、中期は偶発故障、後期は磨耗故障のみが発現するという訳ではなく、常に三種類の故障形態が機器が寿命に到るまでの全ての時間に独立して影響しているとして扱わなければならない。この扱い方について考えていこう。

4.1 寿命の期待値

まず、確率論でいう「期待値」という言葉を分かりやすく説明しておこう。

毎年、夢を買うといって、年末ジャンボ宝くじを購入する人がいる。宝くじは、300 円で 1 枚のくじを買うと、最大で 2 億円の賞金が当たる可能性がある。しかし、それはあくまでも「可能性」であって、誰にでも当たるものではない。「可能性」であるから、「夢」なのだろう。

では現実に戻って、宝くじ 1 枚当たりにいくらの賞金を期待できるのかを考えてみよう。

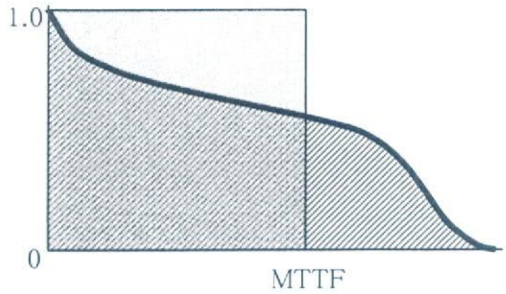
ここで、平成 18 年度の年末ジャンボ宝くじの各等級の賞金と 1 ユニット当たりの当り本数を示したものが**表 5** である。1 ユニットの賞金総額は 14 億 1,990 万円で、売り出しくじ数は 1 千万枚であるので、1 枚のくじ当たりの期待値は 141.9 円ということになる。300 円で購入して 142 円しか期待できないのである。

表 5. 宝くじの期待値

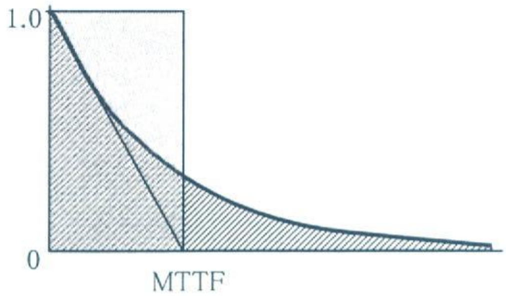
等級	当り本数（1ユニット）	賞金	賞金小計
1等	1	¥200,000,000	¥200,000,000
前後賞	2	¥50,000,000	¥100,000,000
組違い賞	99	¥100,000	¥9,900,000
2等	4	¥100,000,000	¥400,000,000
3等	100	¥100,000	¥10,000,000
4等	100,000	¥3,000	¥300,000,000
5等	1,000,000	¥300	¥300,000,000
ラッキー賞	10,000	¥10,000	¥100,000,000
売出しくじ数（1ユニット）	10,000,000	賞金総額	¥1,419,900,000

ここで、上での期待値の計算方法を考えてみよう。上に述べた計算では、「賞金小計 ＝ 賞金額×当り本数」を計算して、その総和をとり、その総和を売り出しくじ数で割って期待値とした。そこで、この方法を少し変形してみよう。「賞金額×当り本数」の総和をとってから「売り出しくじ数」で割るのではなく、「賞

図 10. 寿命期待値と MTTF の関係



(A)



(B)

金額×（当り本数/売り出しくじ数）」を計算してから、総和をとっても同じことになる。「当り本数/売り出しくじ数」は当りの確率であるから、期待値とは「賞金額×当りの確率」の総和ということができる。

一般に「期待値」とは、確率的な数（確率変数）に、平均的に期待できる値ということができ、期待値をE、確率変数（賞金額）をXその確率をPとすると、

$$E = \sum P \cdot X$$

と表せる（この表現は分かりやすくするために簡略化してある）。

ここで、機器の寿命の期待値を考えてみよう。機器の寿命の確率的分布は故障分布 $f(t)$から得られる。そして、確率変数は「寿命」であるから、「時間 t」である。したがって、寿命の期待値は、

$$\mathrm{E} = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt$$

となる。ここで、この寿命の期待値は MTTF と一致する概念である。ここで $\dfrac{dR(t)}{dt} = -f(t)$ （**式 15**）であることから、機器の MTTF は、

$$\begin{aligned}\mathrm{MTTF} &= \int_0^\infty t \cdot f(t)dt \\ &= -\int_0^\infty t\frac{dR(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

となる。ここで、この積分は部分積分の公式で解くことができ、

$$\mathrm{MTTF} = -\left[t \cdot R(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty R(t)dt$$

となる。

ここで、上の式の第 1 項は t=0 のときは、t そのもののためにゼロとなり、t=∞のときは、信頼度の性質から $R(t)$ がゼロになるため、項そのものがゼロになる。したがって、最終的に、

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt \qquad \cdots \textbf{式 23}$$

となる。これは、信頼度関数の形がどうであれ、MTTF は信頼度関数 $R(t)$に囲われた面積（**図 10** (A)、(B)の斜線部）になることを示している。特に偶発故障の場合、**式 19** から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MTTF} &= \int_0^{\infty} R(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} \exp(-\frac{t}{t_0})dt \\
&= -t_0 \cdot \left[\exp(-\frac{t}{t_0}) \right]_0^{\infty} \\
&= t_0
\end{aligned}
$$

となり、**式 19** の t_0 が MTTF に一致することが証明される。

いずれにしても、**図 10** に示したように、MTTF は $R(t)$の面積を、信頼度 1.0 を高さとする矩形で表したとき（**図 10** の灰色部分）の、時間幅ということになる。

4.2 複数の独立事象の生起確率

二つの事象があり、これらは互いに影響を受けずに、独立して発生するとしよう。たとえば、二人の人が、一人は硬貨のトスアップ、もう一人はサイコロを振る、これを同時に試みるとしよう。この二人は、互いに影響を及ぼさない状況で、試行しているとすれば、これによって生じるのは独立な事象といえる。この試行で、硬貨の表が出るか、サイコロで 5 以上の目が出る事象の確率を考えよう。ここでは、二つの条件のうち、どちらかが満たされればよいとしよう。

まず、硬貨の表が出る確率は 1/2 である。またサイコロで 5 以上の目が出る確率は、2/6 である。二人が同時に試行し、硬貨の表が出るか、サイコロの目が 5 以上である確率を求めるわけであるが、「どちらかが成立すればよい」ということから両者の確率の和をとって

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

とするのは誤りである。**表 6** にこの試行で生じうる事象をすべて掲げてある。ここで、要求されている成立条件は、表で「◎」で示したものである。表からすると、その確率は 8/12=2/3 になるはずである。この差異は、「どちらかが生じればよい」としている条件が同時に生じる場合があるために生じている。そこで同時に生じている 12 回中の 2 回を考慮し

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} - \frac{2}{12} = \frac{6+4-2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

とすると、求める答えにたどり着く。

確率論的に、確率 1/2 の事象と、確率 2/6 の二つの事象が、同時に起こる確率は

表 6. 硬貨とサイコロの試行

硬貨	表	裏	表	裏	表	裏	表	裏	表	裏	表	裏
サイコロの目	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
硬貨の条件成立	○		○		○		○		○		○	
サイコロの条件成立									○	○	○	○
どちらかの条件が成立	◎		◎		◎		◎		◎	◎	◎	◎

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{12}$$

として計算できる。

二つの事象 A,B が独立事象の場合、どちらかが起こる確率 P は、それぞれが起こる確率 P_A 、P_B の和から、両者が同時に起こる確率、すなわち $P_A \cdot P_B$ を引いたものとなる。すなわち

$$P = P_A + P_B - P_A \cdot P_B$$

となる。これは、事象が二つ以上に増えても、適用できる。

また、二つの事象 A、B が同時に起こらない(両事象が独立でない)場合には、どちらかが生じる確率は、P_A、P_B の和から求められる。

4.3 複数の要素を含む信頼性の扱い

初期故障、偶発故障、磨耗故障という、三種類の故障形態を有する工業製品の総合的信頼度を考えてみよう。これまで、故障を生じる確率を表す量として、「故障率」と「累積故障率」の二つを扱ってきたが、故障率は「単位時間内に故障する確率」であり、製品自身が故障するかしないかを表す確率は、累積故障率である。したがって、上記の故障形態のうち、二つによって、製品が故障する確率を F_A 、F_B とすると、これらが独立に生じる場合の総合的確率 F は、

$$F = F_A + F_B - F_A \cdot F_B$$

となる。これに対し信頼度 R は、

$$\begin{aligned} R &= 1 - F \\ &= 1 - (F_A + F_B - F_A \cdot F_B) \\ &= (1 - F_A)(1 - F_B) \\ &= R_A R_B \end{aligned}$$

となり、各々の信頼度の積となる。この概念は故障形態が 3 種類の場合にも容易に拡張できる。

したがって、工業製品の総合的信頼度 R は、初期故障の信頼度を R_e、偶発故障の信頼度を R_r、磨耗故障の信頼度を R_w すると、これらの積から求められることになる。

$$R(t) = R_e(t) \cdot R_r(t) \cdot R_w(t) \qquad \cdots \textbf{式 24}$$

では、このとき、総合的故障率 $\lambda(t)$はどうなるかというと、初期故障の故障率を λ_e、偶発故障の故障率を λ_r、磨耗故障の故障率を λ_w すると、**式 17** から $R(t) = \exp\left\{-\int \lambda(t)dt\right\}$ であるから、

$$\begin{aligned} R(t) &= R_e(t) \cdot R_r(t) \cdot R_w(t) \\ &= \exp\left\{-\int \lambda_e(t)dt\right\} \cdot \exp\left\{-\int \lambda_r(t)dt\right\} \cdot \exp\left\{-\int \lambda_w(t)dt\right\} \\ &= \exp\left\{-\int \lambda_e(t)dt - \int \lambda_r(t)dt - \int \lambda_w(t)dt\right\} \\ &= \exp\left[-\int \left\{\lambda_e(t) + \lambda_r(t) + \lambda_w(t)\right\}dt\right] \\ &= \exp\left\{-\int \lambda(t)dt\right\} \end{aligned}$$

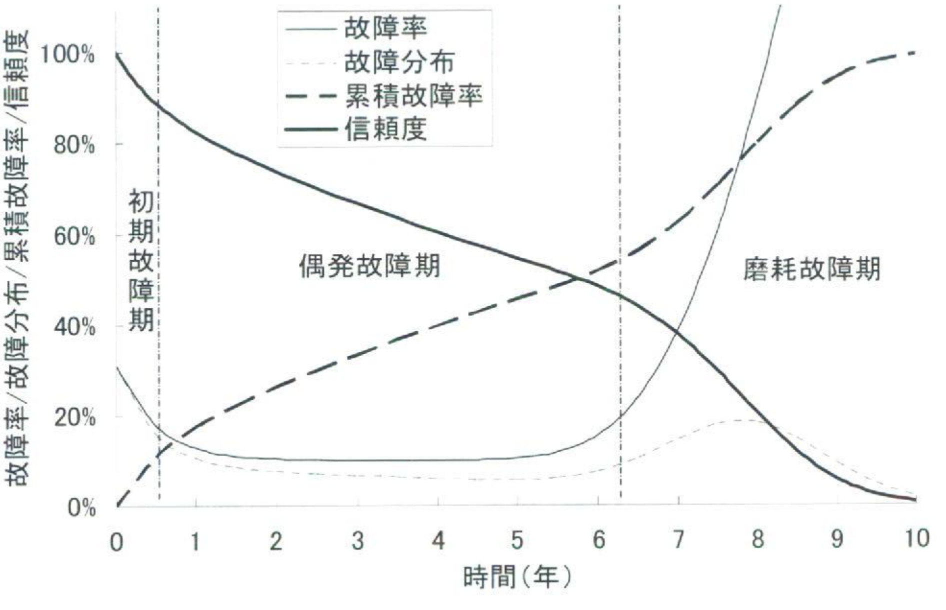
$$\therefore \lambda(t) = \lambda_e(t) + \lambda_r(t) + \lambda_w(t) \qquad \cdots \text{式 25}$$

となって、それぞれの故障率の和になる。

そこで、初期故障、偶発故障、磨耗故障のすべて故障形態を取り入れた、工業製品の総合的信頼度の様子を**図 11** に示した。各々の故障形態の様子は、これまで個別に取り上げたものと同一である。工業製品の総合的信頼度は、どの故障形態が優位であるかによって、寿命時期を「初期故障期」、「偶発故障期」、「磨耗故障期」の 3 期に分けられる。

また、このグラフの故障率の曲線の形は、西洋の浴槽の形に似ていることから、一般に「バスタブ(bath-tub)曲線」とよばれている。

図 11. 工業製品の総合的信頼度の例



5. 信頼度の算出法

これまでは、典型的な性格をもつ故障形態のモデルを導入して、それぞれの故障形態の性質を見てきた。しかし、市場に出荷された後の製品の信頼度がどのようになっているかを確認しなければ、真に高信頼性を謳うような製品を作ることはできない。そこで、ここでは実際に故障が生じた際の数学的な扱い方を考えながら、実際にフィールドから報告されてくる故障のデータから、自分たちの製品の信頼度を分析する方法を導いてみることにする。

5.1 MTTF と平均故障率の計算

平均寿命(MTTF)は**式 4** で定義したように、それぞれの機器の寿命の平均である。ある製品を出荷した後の信頼性データを収集したところ、最初に 6,000 時間と 7,000 時間で寿命に至ったものが報告されてきた。この時点でのその製品の MTTF は 6,500hr と推定できる。その後、さらに 8,000 時間と 4,000 時間で寿命が尽きたものの報告が入ってきた。新たに推定される MTTF としては、全ての寿命の平均から 6,250hrが得られる。

表 7. MTTF と故障率の平均

	寿命時間	故障率 (%/1000hr)
装置 A	6,000	16.7
装置 B	7,000	14.3
装置 C	8,000	12.5
装置 D	4,000	25.0
平均	6,250	17.1
逆数	—	5,843

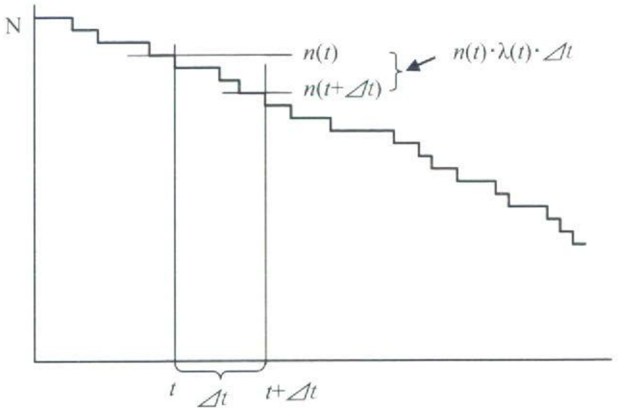
さて、MTTF の逆数から故障率が求められると述べた。そこで、毎回報告されてきた寿命を、故障率に変換して記録していたとしよう。この故障率の平均を全体の故障率とみなしてよいのだろうか？回答は「否」である。その理由を、**表 7** に示してある。故障率の平均を求め、その逆数をとって MTTF に変換すると、実際の寿命から求めた MTTF と値が異なってしまうのである。

この場合、故障率の平均を計算するためには、「算術(相加)平均」ではなく、「調和平均」を用いなければならないのだ。調和平均とは「逆数の相加平均の逆数」である。故障率の逆数はMTTFそのものであるため、この場合故障率はMTTFの平均の逆数から計算しなければならない。それならば、信頼性を扱う上では、常にMTTFを計算することにしておいた方が合理的だろう。

調和平均を十分に理解している読者は上記の説明で十分であろうが、よく理解していない読者のために調和平均を用いなければならない、身近な例を紹介しておこう。

仮に、72km の道程を、自動車で 1 時間 48 分(1.8 時間)で走りきったとしよう。この場合誰もが、72/1.8 = 40km/hr として平均速度を計算することだろう。しかし、走行状況を少し細かく見ると、72km のうち、最初の 24km は時速 30km で、次の 24km は時速 60km で、そして最後の 24km は時速 40km で走っていたとしよう。最初の区間を走るのに要した時間は 24/30 = 0.8hr、次の区間の所要時間は 24/60 = 0.4hr、そして最後の区間は 24/40 = 0.6hr となり、総所要時間が 1.8hr となって、上で述べた状況と矛盾はない。そこで、時速の平均から平均速度を求めると、(30+60+40)/3 = 43.3km/hr となって、計算が合わなくなる。これを調和平均で求めると 40km/hr になることは各自で

図 12. 故障率の算出(1)



確認して頂きたい。

調和平均とは、単位に逆数が入るような量の平均を求めるときに使うものである。故障率、速度などは単位に時間の逆数が含まれているので、調和平均を使用しなければならないのである。

上記は、MTTF が寿命の平均で定義されており、故障率はその逆数として定義されているのだから、常に MTTF を計算してから故障率を計算しなければならない、と解釈しても問題はない。

5.2 故障率の求め方

N 台の機器の信頼性試験を始めてから、時間 t が経過したとしよう。現在稼動している機器の台数を $n(t)$とする。この状態で時間がさらに Δt だけ経過した $t+\Delta t$ の時間での機器の稼動台数は $n(t+\Delta t)$で表されることになる。ここで、故障率を $\lambda(t)$ とすると、これは単位時間当たりの故障する確率であるから、Δt の時間の間の故障確率は、$\lambda(t)\cdot\Delta t$ であり、故障台数は $n(t)\cdot\lambda(t)\cdot\Delta t$ と見積もれる(**図 12**)。したがって、

$$n(t+\Delta t)=n(t)-n(t)\cdot\lambda(t)\cdot\Delta t \qquad \cdots \textbf{式 26}$$

が成り立つ。この式を整理すると、

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{\Delta t}=-n(t)\cdot\lambda(t)$$

となる。ここで Δt をゼロに近付けていく操作($\Delta t\to 0$)を行うと、これは微分の定義である。

したがって、上の式は

$$\frac{dn(t)}{dt}=-n(t)\cdot\lambda(t)$$

となる。ここで両辺を N で割ると、

$$\frac{d\dfrac{n(t)}{N}}{dt}=-\frac{n(t)}{N}\cdot\lambda(t)$$

となるが、$\dfrac{n(t)}{N}$ は信頼度 $R(t)$に一致するため、結局、

$$\lambda(\mathrm{t})=-\frac{\dfrac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$$

となり、**式 16** が導かれることになる。

図 13. 故障率の算出(2)

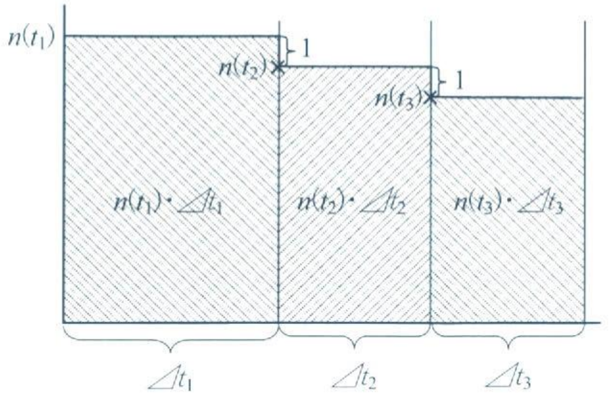
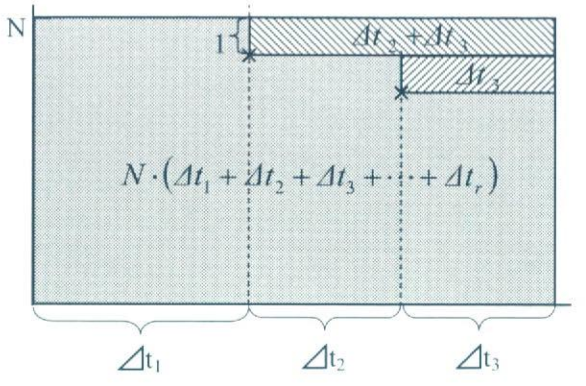


図 14. 故障率の算出(3)



ここで、再び**式 26** について考えてみよう。これは、

$$n(t)-n(t+\Delta t)=n(t)\cdot\lambda(t)\cdot\Delta t$$

のように変形できる。この左辺 $n(t)-n(t+\Delta t)$ は時間 Δt 内で故障した機器の台数 $r(t)$そのものである。したがって、

$$r(t)=n(t)\cdot\lambda(t)\cdot\Delta t$$

となり、これを変形すると、

$$\lambda(t)=\frac{r(t)}{n(t)\cdot\Delta t} \qquad \cdots \textbf{式 27}$$

が得られる。この式は、故障率 $\lambda(t)$の算出法を示しており、故障率は、稼動台数 $n(t)$ と故障発生までの時間 Δt の積で故障した台数を割って算出することを示している。より分かりやすくするため、機器が 1 台故障するまでのことを考えることにしよう。この場合 $r(t)$が 1 になるため、

$$\lambda(t)=\frac{1}{n(t)\cdot\Delta t}$$

となる。故障数が r 台になった場合場合は、1 台毎に求めた故障率の平均を求めることになるが、その平均は調和平均でなければならない。したがって、r 台が故障した時点での平均故障率 λ は、

$$\lambda=\frac{1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{r}n(t_i)\cdot\Delta t_i}{r}}=\frac{r}{\sum_{i=1}^{r}n(t_i)\cdot\Delta t_i} \qquad \cdots \textbf{式 28}$$

となる。これは、故障率は、故障が発生した時点で稼動していた機器の台数 $n(t)$と故障発生までの時間 Δt の積の総和で故障した台数 r を割って算出することを示している(**図 13**)。

ここで最初に N 台の機器が稼動し始め、そこから 1 台、2 台、…、と故障して r 台が故障した時点までの**式 28** の分母を展開してみよう。最初の 1 台が故障するまでの時間が、Δt_1 とすれば、最初の項は $N\cdot\Delta t_1$ であり、2 台目の故障がそれから Δt_2 時間後に生じたとすると、そのときの稼働台数はすでに 1 台故障しているため $N-1$ 台であるから、2 番目の項は $(N-1)\cdot\Delta t_2$ となる。したがって、**式 28** の分母を展開は、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} n(t_i) \cdot \Delta t_i &= N \cdot \Delta t_1 + (N-1) \cdot \Delta t_2 + (N-2) \cdot \Delta t_3 + \cdots + \{N-(r-1)\} \cdot \Delta t_r \\
&= N \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_r) - \Delta t_2 - 2 \cdot \Delta t_3 - \cdots - (r-1) \cdot \Delta t_r \\
&= N \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_r) - (\Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_r) - (\Delta t_3 + \\
&\quad \Delta t_4 + \cdots + \Delta t_r) - \cdots - (\Delta t_{r-1} + \Delta t_r) - \Delta t_r
\end{aligned}
$$

となる。この式の $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_r$ は、r 台が故障するまでの時間である。これと N との積は、**図 14** の長方形の面積に等しい。次の $\Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_r$ は 1 台目が故障した後の時間で、これを最初の長方形から引くことを意味する。また、さらに 2 台目が故障した場合にも、その後の時間を引くことになる。すなわち1台故障するたびに、長方形からその機器の故障の後の時間を削り取っていくわけである。

したがって、逆の見方をすると、1台故障する度に、その稼働時間の和を取って行き、その時点で稼動している台数と経過時間の積を加え(これを「総稼働時間」という)、これで故障数rを割ればよいことになる。これが**式 28** が示している内容である。

5.3 不完全なデータの取り扱い

これまでの故障率の計算では、信頼性試験をした機器すべての経過が把握されているという前提で考えてきた。しかし、実際にはこれは特殊な場合ということができる。

どのような信頼性試験を計画しても、一定時間稼動した機器が、時間とともにどのような特性変化を示すかを知りたいがために、定期的に試験サンプルからいくつかの機器を抜き出して、特性試験を行ってみたい場合もあろう。これをすると、抜き出された機器は、別の用途に使われたため、信頼性試験には使えなくなる。しかし、抜き取り時点まで稼動していたことは事実であっても、どの時点で故障することになったかは不明になってしまう。また、フィールドからのデータでは、ある時点以降、追跡観察ができなくなる例も生じるだろう。このようなものを脱落例という。また、フィールドで動作している機器の信頼性データを集めるときには、全ての機器が同時に稼動開始する訳ではない。したがって、ある時点で信頼度を求めようとすると、まだ故障していないが、稼働時間がまちまちの機器が存在することになる(**図 17 参照**)。これらは打ち切り例とよばれる。

ここでは、これらの脱落、打ち切り例のデータを合理的に活かす方法について考えることにする。通常、信頼性工学では、一見独自のり信頼性工学では、一見独自の方法でこれらについて解説されているが、その基本になっている概念は、医学・疫学系で使われている人の生存率を推定する、Actuarial(生命保険数理)法または Life table(生命表)法とよばれる方法、あるいは Kaplan-Meier 法とよばれている方法と全く変わることはない。したがって、ここではこれらの方法によって解説する。

以下に述べる説明では、厳密にいうとこれまで述べてきた理論と若干異なっているように見える点がある。その理由は、以下での説明では、故障を観察する各期間で、着目している期間と、その隣を関連付けながら、期間ごとの信頼性を推定しなければならないことにある。

信頼性試験で、故障台数を観察する時間間隔を一定としよう。その i 番目の期間に入った時点で稼動していた台数を n_{i-1}、その期間内に故障した台数 r_i をする。もし i 番目の期間内に、打ち切り、

脱落例がある場合、その両者の合計台数を w_i とする。この場合、打ち切り、脱落例はその期間の半分は稼動していたとみなすことにし、それらはいずれも、その期間内の故障率と同じ確率で故障した可能性があったと考える。

さて、信頼性試験での故障率 λ の定義式(**式 9**)を思い出すと、

$$\lambda = \frac{r}{N - \sum r} \qquad \cdots \text{ 式 29}$$

である。ここで分母は最初に稼動させた台数 N から各期間での故障数の総和を引いたもの、すなわち残存数であり、上記の n_{i-1} でに一致する。また、故障数に上記の補正を行うと、故障率 λ は結局次のようになる。

$$\lambda_i = \frac{r_i + \frac{1}{2}\lambda_i w_i}{n_{i-1}}$$

そこでこの式を整理すると、

$$\lambda_i = \frac{r_i}{n_{i-1} - \frac{1}{2}w_i} \qquad \cdots \text{ 式 30}$$

となり、打ち切りや脱落例を含んでいる場合の故障率の推定値が得られる。これが Actuarial(生命保険数理)法あるいは Life table(生命表)法とよばれる方法である。

打ち切りや脱落データを扱うもう1つの方法の Kaplan-Meier 法では、観察期間を一定期間で区切るが、実際の故障率の推定は故障が生じた期間内でのみ行う。また、この方法では期間内に打ち切り、脱落例があっても、それらは全て、その期間内は残存していたとして扱う。これによって、故障が発生した期間だけに注目し、その期間に入った時点での稼動台数を n_i、その期間に故障した台数 r_i として、単純に

$$\lambda_i = \frac{r_i}{n_i} \qquad \cdots \text{ 式 31}$$

を、その期間の故障率の推定値とするものである。

さて、どちらかの方法で、故障率の推定値が得られれば、後はこの故障率から、どのようにして信頼度を求めることができるかを考えなければならない。そこで、再び**式 29** に戻り、各期間の値を明確にするため i 番目の期間に属する変数に添え字 i を付けることとし、分母の残存数として、その期間入った時点での値を使用することにすると、残存数は 1 つ前の期間の残存数となり、

$$\lambda_i = \frac{r_i}{N - \sum_{k=1}^{i-1} r_k}$$

となる。

これから、$1-\lambda_i$ を求めてみると、

$$1-\lambda_i = 1-\frac{r_i}{N-\sum_{k=1}^{i-1} r_k}$$

$$= \frac{N-\sum_{k=1}^{i-1} r_k - r_i}{N-\sum_{k=1}^{i-1} r_k}$$

ここで分子は、i 番目の期間に入った時点での残存数から、その期間内の故障数が引かれるため、その期間での残存数となっていることに注意する、したがって、

$$1-\lambda_i = \frac{N-\sum_{k=1}^{i} r_k}{N-\sum_{k=1}^{i-1} r_k}$$

となる。この分母、分子を N で割ると、

$$1-\lambda_i = \frac{\dfrac{N-\sum_{k=1}^{i} r_k}{N}}{\dfrac{N-\sum_{k=1}^{i-1} r_k}{N}}$$

となり、信頼度の定義(**式 8**)を見ると、分子はその期間の、分母は1つ前の期間の信頼度となっている。したがって、

$$1-\lambda_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}$$

$$\therefore R_i = (1-\lambda_i)R_{i-1} \qquad \cdots \textbf{ 式 32}$$

これは、i 番目の期間の信頼度 R_i は、その1つ前の期間の信頼度 R_{i-1} に $1-\lambda_i$ を掛ければ求められることを示している。この方法は、Actuarial 法、Kaplan-Meier 法の両方で共通して使える取扱いになる。これら両者の違いは、対象が少数である場合は、Kaplan-Meier 法が適しているとされている。

5.4 信頼度データの取扱い例

ここで、実際のデータから、信頼度を求めてみよう。データは**表 8** のようなものとする。このデータを時系列的に示したものが**図 15**、稼動開始時期を合わせた形で時系列的に示したものが**図 16** である。

ここでは、フィールドから 31 台の機器の 1978 年 1 月 1 日から 1980 年 12 月 31 日までのデータが掲げられている。これらの機器のうち、機器番号 1 だけが脱落例で、また、1980 年 12 月 31 日現在、稼動している機器はすべて打ち切り例になる。また、故障は機器番号 4、7、8、9、12、14、24、27 の 8 台の機器で生じている。

表 9 の Actuarial 法による信頼度の算出法では、機器の稼働時間を 6 ヶ月目までは 2 ヵ月毎、

表 8. 信頼度算出例のデータ

機器番号	稼動開始年月日	脱落年月日	故障年月日	稼動期間（月）	追跡期間（月）
1	1978/1/11	1978/4/8			2.9
2	1978/1/18				23.4
3	1978/1/29				23.1
4	1978/4/4		1978/4/24	0.7	
5	1978/4/19				20.4
6	1978/5/10				19.7
7	1978/5/14		1978/8/28	3.5	
8	1978/5/21		1978/11/2	5.4	
9	1978/6/6		1978/11/5	17.3	
10	1978/6/17				18.5
11	1978/6/21				18.3
12	1978/7/22		1978/11/7	3.5	
13	1978/9/27				15.1
14	1978/10/5		1979/1/20	3.5	
15	1978/10/22				14.3
16	1978/11/15				13.5
１７	1978/12/6				12.8
18	1978/12/12				12.6
19	1979/2/1				11.0
20	1979/2/16				10.5
21	1979/4/8				8.8
22	1979/4/11				8.7
23	1979/4/18				8.4
24	1979/6/26		1979/8/4	1.3	
25	1979/7/3				5.9
26	1979/7/12				5.6
27	1979/7/18		1979/8/1	0.4	
28	1979/8/23				4.3
29	1979/10/16				2.5
30	1979/12/12				0.6
31	1979/12/24				0.2

図 15. 信頼度推定例のデータの時系列表示(1)

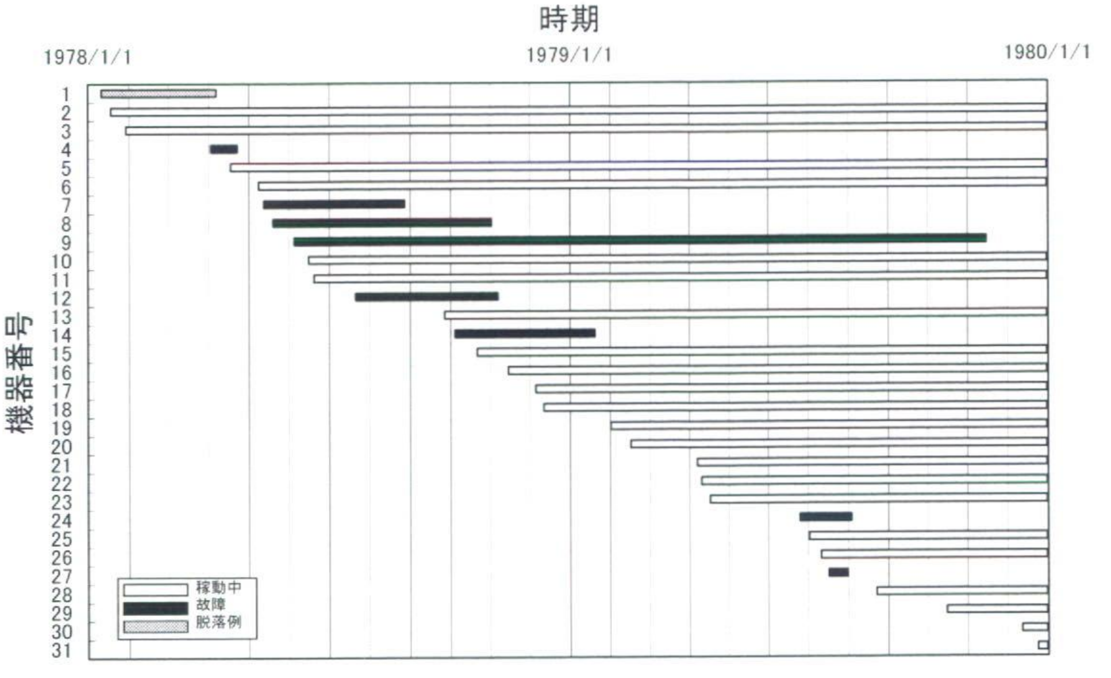
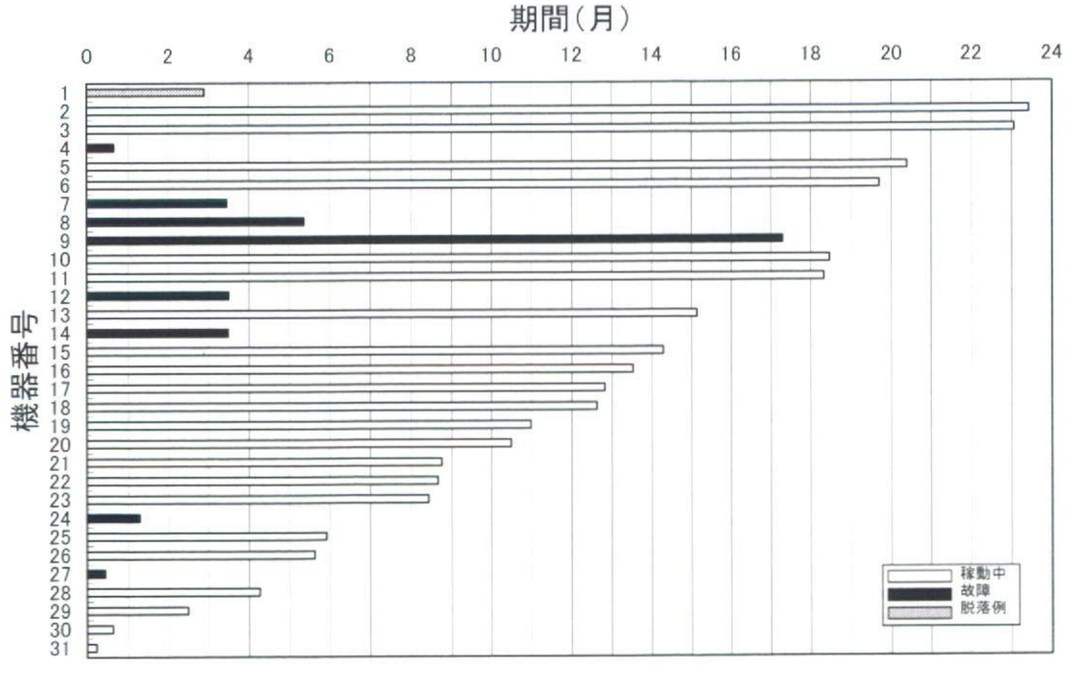


図 16. 信頼度推定例のデータの時系列表示(2)



その後3ヶ月毎に区切っている。これにより、各期間の入り口での残存数、各期間内での故障数および、打ち切り、脱落数を求めて、**式 30** にしたがって故障率を求め、その後「1-故障率」を求め、最後に**式 32** に従って各期間での信頼度を求めている。

表 10 の Kaplan-Meier 法では、機器の稼働時間を1ヶ月毎に区切っているが、実際に故障が生じた期間のみに着目している。これにより、故障を生じた各期間の入り口での残存数を求めるが、その期間内に打ち切り例、脱落があっても、それらはその期間に存在していたものとして扱う。さらにその期間での故障数を求め、**式 31** にしたがって故障率を求める。その後「1-故障率」を求め、最後に**式 32** に従って各期間での信頼度を求めるのは、Actuarial 法と同様である。

得られた結果をグラフにしたものが、**図 17** であるが、18ヶ月以降に若干の相違が認められるが、両者ともほぼ同じ結果に至っている。

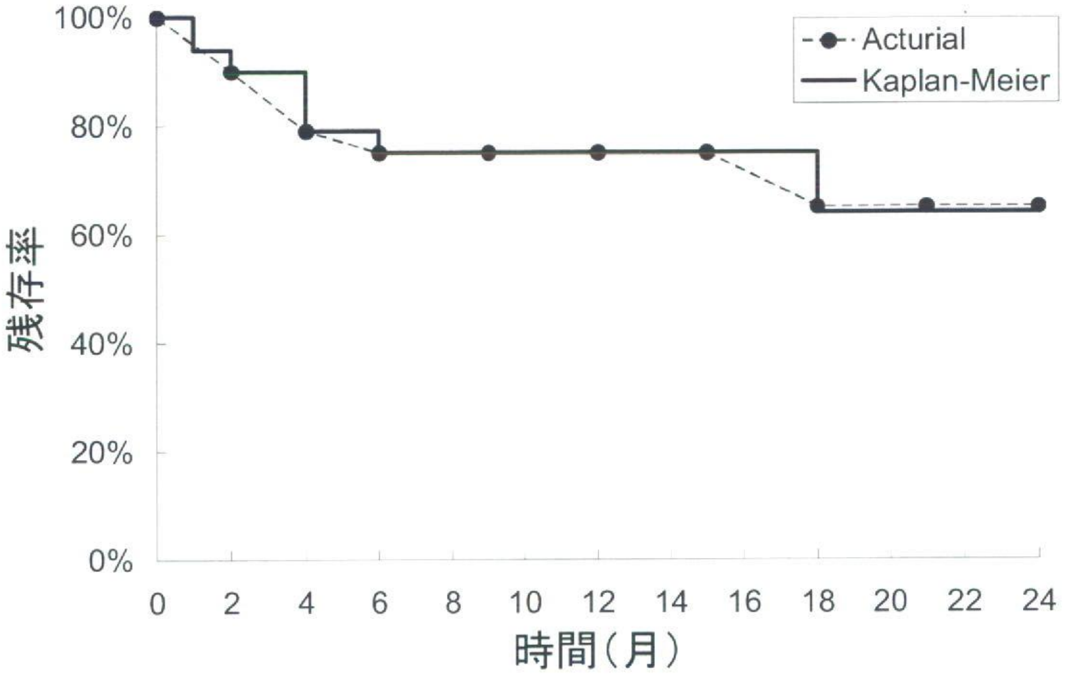
表 9. Actuarial 法による信頼度の算出法

期間（月）	残存数	故障数	打切り脱落数	故障率	1-故障率	残存率
0～2	31	3	2	3/[31-(2/2)]=0.10	1-0.1=0.90	1×0.90＝0.90
2～4	26	3	2	3/[26-(2/2)]=0.12	1-0.12=0.88	0.90×0.88 = 0.79
4～6	21	1	3	1/[21-(3/2)]=0.5	1-0.5=0.95	0.79×0.95 = 0.75
6～9	17	0	3	0/[17-(3/2)]=0	1-0=1.00	0.75×1.00 = 0.75
9～12	14	0	2	0/[14-(2/2)]=0	1-0=1.00	0.75×1.00 = 0.75
12～15	12	0	4	0/[12-(4/2)]=0	1-0=1.00	0.75×1.00 = 0.75
15～18	8	1	1	1/[8-(1/2)]=0.13	1-0.13=0.87	0.75×0.87 = 0.65
18～21	6	0	4	0/[6-(4/2)]=0	1-0=1.00	0.65×1.00 = 0.65
21～24	2	0	2	0/[2-(2/2)]=0	1-0=1.00	0.65×1.00 = 0.65

表 10. Kaplan-Meier 法による信頼度の算出法

期間（月）	残存数	故障数	故障率	1-故障率	残存率
1	31	2	2/31=0.06	1-0.06=0.94	1×0.94＝0.94
2	27	1	1/27=0.04	1-0.04=0.96	0.94×0.96 = 0.90
4	24	3	3/24=0.13	1-0.13=0.87	0.90×0.87 = 0.79
6	20	1	1/20=0.05	1-0.05=0.95	0.79×0.95 = 0.75
18	7	1	1/7=0.14	1-0.14=0.86	0.75×0.86 = 0.64

図 17. 信頼度推定結果の比較



6. 信頼度の分析法

さて、これまでの節では、信頼性の基礎概念を理解し、その理論に沿って、信頼性試験あるいは実際のフィールドからのデータから信頼性を求める手法について述べてきた。しかし、信頼性のデータが得られても、それが何を語ってくれているのかが理解できないと、何にもならない。ここでは、信頼性のデータをどのように分析すべきかについて述べることにする。

6.1 ワイブル関数

これまでに述べたさまざまな故障形態の信頼度を表す、典型的な理論関数は、初期故障の故障率の指数関数、偶発故障の信頼度を表す指数関数、磨耗故障の故障分布を表す正規分布の確率密度関数など、いろいろあった。しかもこれらは、時期を区切って機器に作用して故障を生じるわけではなく、全ての要因が機器が寿命に到るまでの全ての時間に独立して作用していることは既に述べたとおりである。これに対し、故障分布の性質を知るためには、磨耗故障のところで使用した、正規確率紙のような方法が便利である。しかし、この方法が使えるのは磨耗故障のみである。そこで、機器の寿命までの信頼性の諸量の理論関数を1つでまかなえ、正規確率紙と同様の分析法が使える便利な関数として、ワイブル分布を紹介しておく。この分布は、故障率 $\lambda(t)$ が、

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \qquad \cdots \textbf{式 33}$$

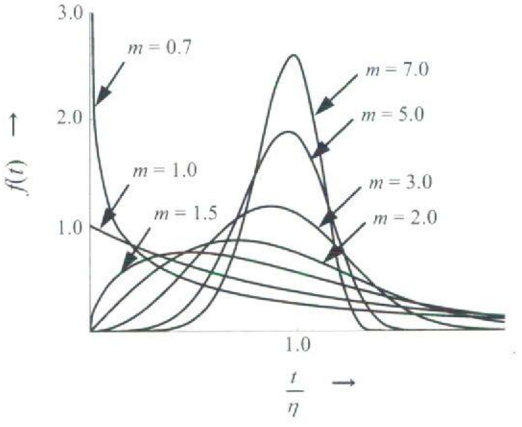
で表わされるものである。したがって、$R(t) = \exp\left\{-\int \lambda(t)dt\right\}$（**式 17**）から、

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left\{-\frac{m}{\eta}\int\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} dt\right\} \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \end{aligned} \qquad \cdots \textbf{式 34}$$

となり、$\dfrac{dR(t)}{dt} = -f(t)$（**式 15**）から、

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{dR(t)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \\ &= \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \end{aligned} \qquad \cdots \textbf{式 35}$$

図 18. ワイブル分布



となる。

これらの式で η は、**式 19** の t_e や**式 20** の t_e のように、時間に対する関数の変化の速さを表すもので「尺度のパラメータ」と呼ばれる。

そこで、時間軸を $\frac{t}{\eta}$ として、η で正規化し、ワイブル分布のもう 1 つのパラメータ m を変化させたときの故障分布 $f(t)$ の様子を見たものが**図 18** である。

ワイブル分布で m=1.0 のときは、**式 35** から分かるように、

$$f(t) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^0 \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^1\right\}$$
$$= \frac{m}{\eta}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)\right\}$$

となって、完全に指数関数となり、m が 3 以上になると正規分布様になる。また、m が 1 より小さいときは指数関数より早くゼロに近付く。これにより、ワイブル分布では m<1.0 で初期故障を、m≒1 で偶発故障を、m>3.0 で磨耗故障を、と 1 つの関数で信頼性の全ての故障形態を表現できるものとなっていることが分かる。このため、m を形状「パラメータ」とよんでいる。

6.2 ワイブル確率紙

ワイブル分布の信頼度は**式 34** から、

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}$$

となる。そこでこの式の両辺の対数をとると、

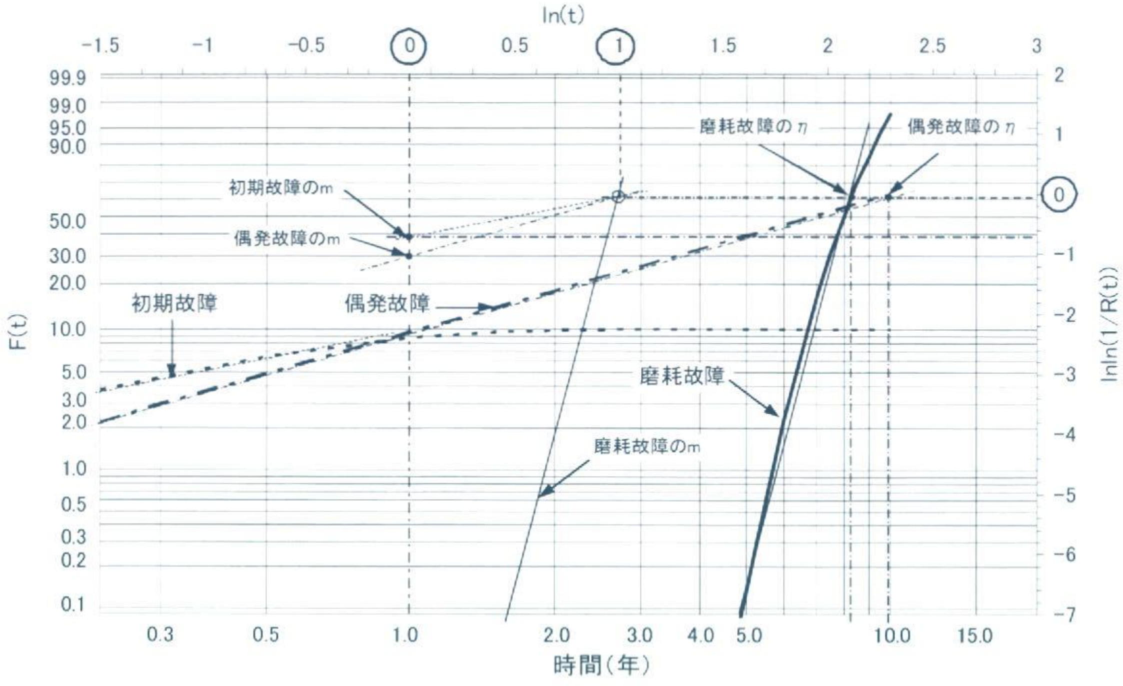
$$\ln R(t) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^m$$

上式の両辺の対数をもう一度とると、

$$\ln\ln\frac{1}{R(t)} = \ln\left(\frac{t}{\eta}\right)^m$$
$$= m\ln t - m\ln\eta \qquad \cdots\textbf{式 36}$$

となる。右辺第 2 項は m も η も定数であることから定数項となる。したがって、上の式は縦軸を ln ln

図 19. ワイブル確率紙上の初期、偶発、磨耗故障の信頼度



$1/R(t)$で目盛り、横軸を $\ln t$ で目盛ると、データは傾斜 m、$\ln t$=0 での値が、定数 $\ln\eta^m$ となる直線になることを示している。そこで、正規確率紙が、正規分布の確率分布関数を直線で示したように、縦軸を $\ln\ln 1/R(t)$で目盛り、横軸を $\ln t$ で目盛ったグラフ用紙は、ワイブル分布の信頼度関数を直線で示すことになる。これを「ワイブル確率紙」という。

図 19 は **3.4** で述べた初期故障、**3.3** の偶発故障、**3.2** の磨耗故障の曲線をワイブル確率紙に記入してみたものである。初期故障は時間経過と共に、信頼度が一定値に達するため、ワイブル確率紙上でも同様の軌跡を描く。初期故障が変化している部分に近似直線を当てはめ、その傾斜から m を求めてみよう。当てはめた近似直線が、確率紙の上の横軸($\ln(t)$軸)の「1」と、右の縦軸($\ln\ln(1/R(t))$軸)の「0」の交点を通るように平行移動する。そしてこの直線が $\ln(t)$軸の「0」と交わる点の $\ln\ln(1/R(t))$軸の値を読んで符号を反転すれば m が求められる。この場合 0.7 程度で、1 より小さい値であることが分かる。

また、偶発故障は確率紙上で直線になっており、上記の手順で m を求めてみると、ちょうど 1 になることがわかる。磨耗故障はやや曲線となるが、その m は 3 以上(この場合約 30)になっている。

ワイブル分布の式を決めるには、η も求めなければならないが、この求め方は**式 36** が、

$$\ln\ln\frac{1}{R(t)} = m\ln t - m\ln\eta$$

であることから、$\ln\ln\dfrac{1}{R(t)} = 0$ とすると、

$$0 = m\ln t - m\ln\eta$$

$$\therefore \eta = t$$