

図9 年齢階級別死亡数の実績値と推計値（男性）

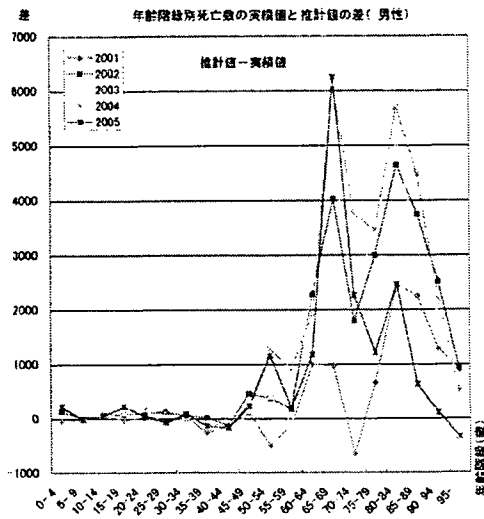


図10 年齢階級別死亡数の実績値と推計値の差（男性）

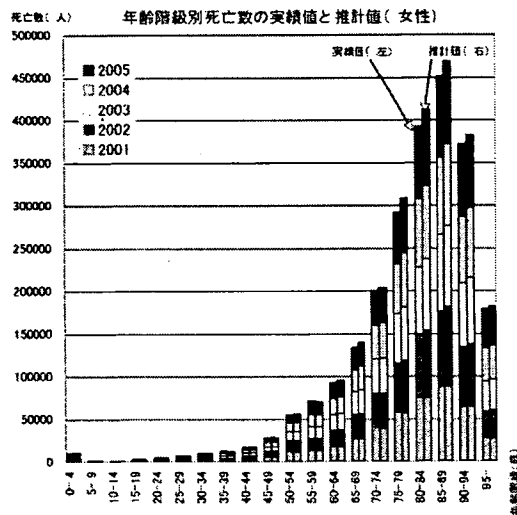


図11 年齢階級別死亡数の実績値と推計値（女性）

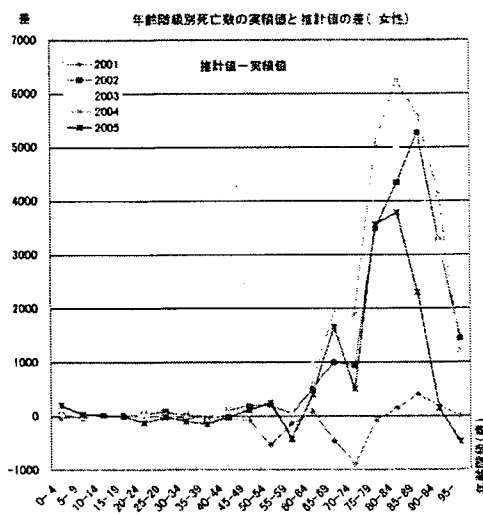


図12 年齢階級別死亡数の実績値と推計値の差（女性）

の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、年齢シフトという新たな機構を加えて死亡率の投影を行った。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線を当てはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータ（具体的には以下に詳述）を推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

このような年齢シフトを考慮した死亡率モデルとして、Bongaarts (2005) は、各国の

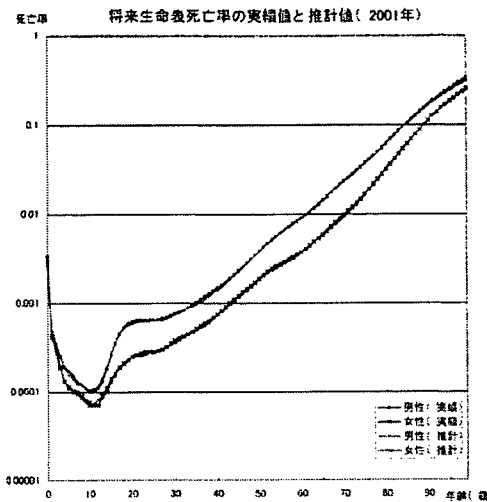


図 13 将来生命表死亡率の実績値と推計値 (2001 年)

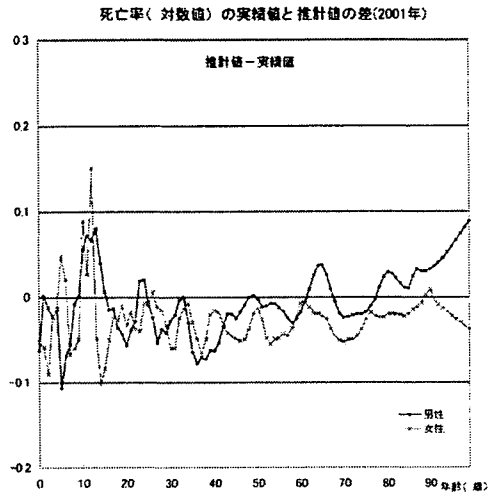


図 14 将来生命表死亡率の実績値と推計値の差 (2001 年)

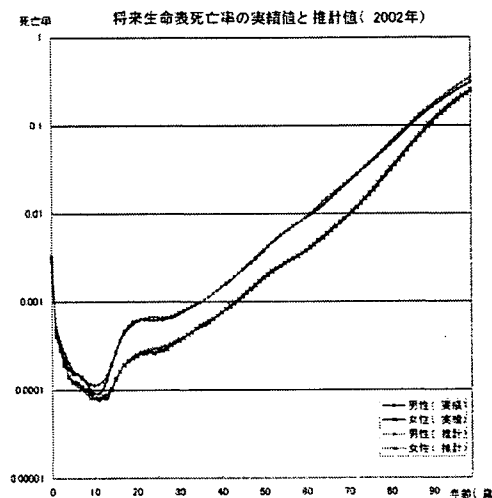


図 15 将来生命表死亡率の実績値と推計値 (2002 年)

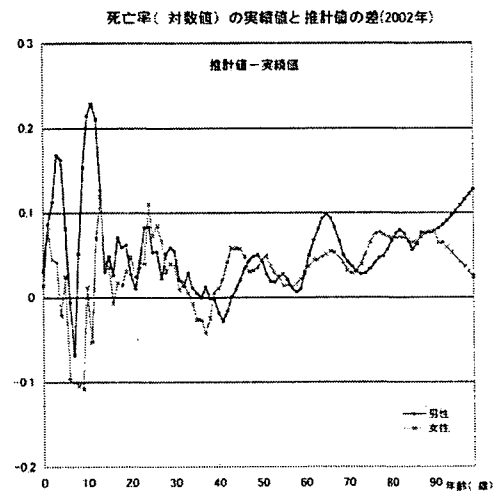


図 16 将来生命表死亡率の実績値と推計値の差 (2002 年)

データからロジスティック曲線における勾配パラメータが時系列的に概ね一定であるとの観察に基づき、死亡率曲線をロジスティック曲線に年齢シフトを組み合わせた shifting logistic model というモデルで表すことを提案している。本研究では、この shifting logistic model で提案されたシフト量の考え方をリー・カーター・モデルに応用することにより年齢シフトの考慮を行ったモデルを開発した。以下、この年齢シフトモデルの考え

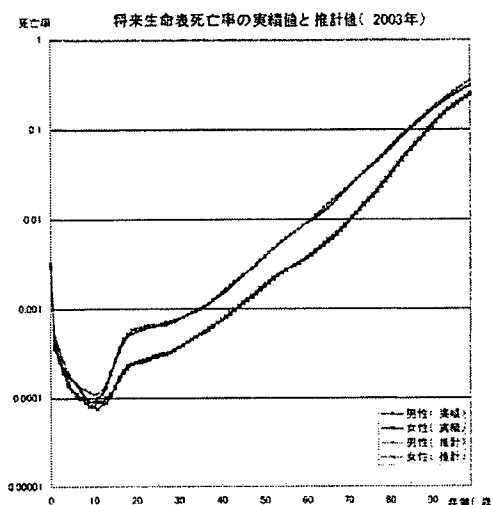


図 17 将来生命表死亡率の
実績値と推計値 (2003年)

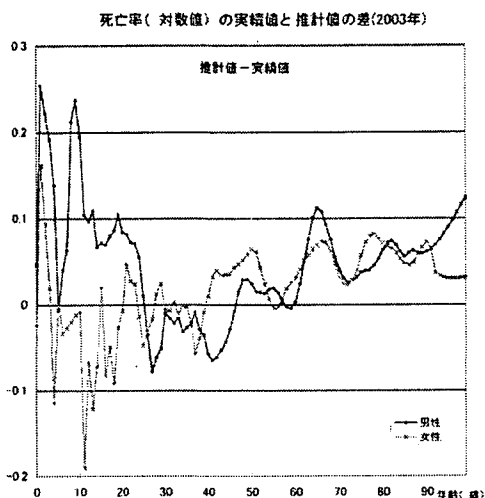


図 18 将来生命表死亡率の
実績値と推計値の差 (2003
年)

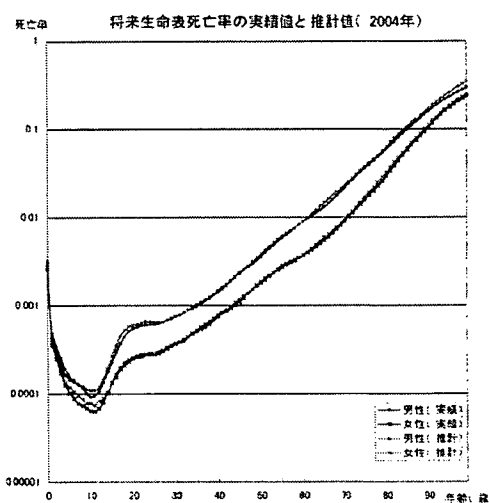


図 19 将来生命表死亡率の
実績値と推計値 (2004年)

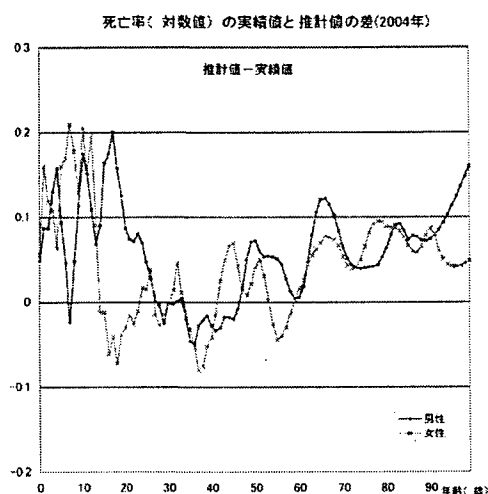


図 20 将来生命表死亡率の
実績値と推計値の差 (2004
年)

方を述べる。

まず、実績生命表に基づく 25 歳以上の死力について、3 パラメータロジスティック曲線

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t \exp(\beta_t x)}{1 + \alpha_t \exp(\beta_t x)} + \gamma_t$$

をあてはめ、年齢シフト量を決めるパラメータ $S_t = -\frac{\ln(\alpha_t)}{\beta_t}$ と、曲線の勾配を表すパラ

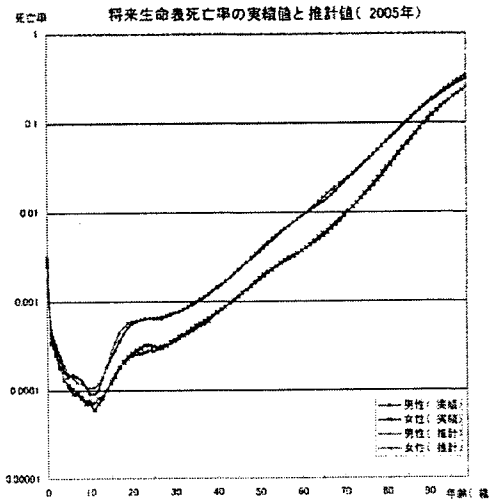


図 21 将来生命表死亡率の実績値と推計値 (2005 年)

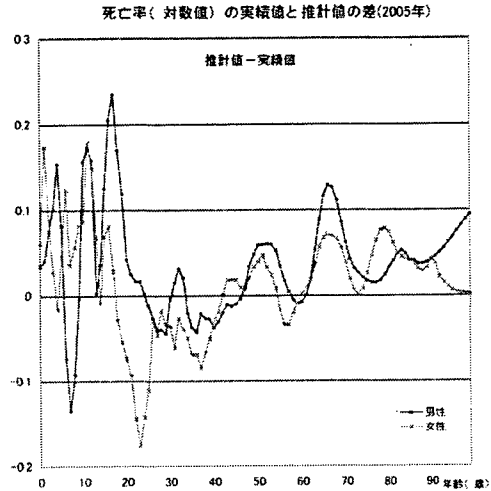


図 22 将来生命表死亡率の実績値と推計値の差 (2005 年)

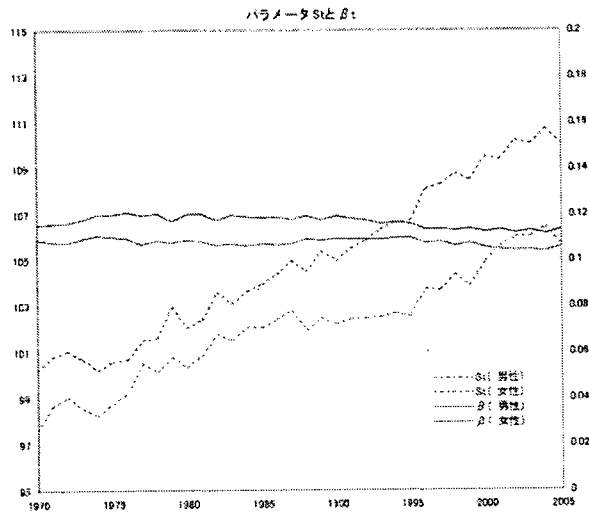


図 23 パラメータ S_t と β_t

メータ β_t を推定する (図 23)。次に、各年次のパラメータ S_t の基準時点 $t = t_0 (= 2005)$ (平成 17(2005) 年) との差 $S_{t_0} - S_t$ を年齢シフト量 (切片) とし、各年次の勾配 β_t の基準時点との比を傾きとする線形変換を考え、中央死亡率 $m_{x,t}$ に年齢シフトを行った。なお、基準時点で $x = 25 (= B_1)$ 歳未満の層については年齢シフトを行わず、 $x = 50 (= B_2)$ 歳以上では完全な年齢シフトを行うこととし、その間の年齢層では補間により年齢シフトを行った。具体的には以下の式により変換を行っている。まず、死亡率のオリジナルの年齢

座標を x 、年齢シフト後の座標を y とし、 $x = f(y)$ を以下の関係により定義する。

$$f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y & (y \leq B_1) \\ \left\{ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (B_2 - S_{t_0}) + S_t - B_1 \right\} \frac{y - B_1}{B_2 - B_1} + B_1 & (B_1 \leq y \leq B_2) \\ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (y - S_{t_0}) + S_t & (B_2 \leq y \leq S_{t_0}) \\ y - S_{t_0} + S_t & (S_{t_0} \leq y) \end{cases}$$

そして、

$$\hat{m}_{y,t} \stackrel{\text{def}}{=} m_{f(y),t}$$

とし、年齢シフト後の $\hat{m}_{y,t}$ の対数値についてリー・カーター・モデルを適用した。なお、年齢シフト前後での死亡率曲線の変化について、男性の例を図 24、図 25 に示した。リー・カーター・モデルにおける a_x としては直近 5 年間の平均値を取り、行列 $\ln(\hat{m}_{y,t}) - a_x$ に特異値分解を施すことによってパラメータ b_x 、 k_t を推定した (図 26)。

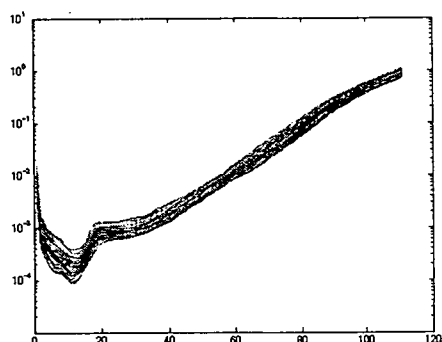


図 24 年齢シフト前の中央死亡率 (対数値・男性)

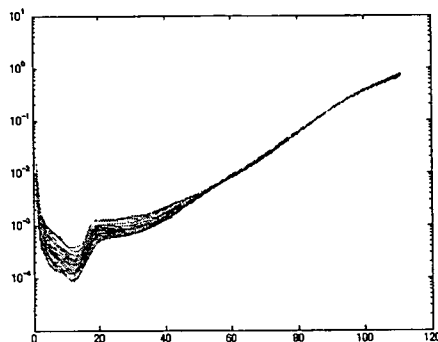


図 25 年齢シフト後の中央死亡率 (対数値・男性)

死亡指数 k_t の将来推計にあたっては、近年、徐々に緩やかになっている死亡水準の変化を反映させるために、関数あてはめを行って補外することにより推計を行った。推計のための関数としては、前回推計で用いられた関数 (指数関数と対数関数の平均^{*3}) がわが国の死亡指数の推移をよく表現しているとの観察に基づき同じ関数を用いた。

ただし、今回の推計では男女の死亡率をより整合的に推計する観点から、男女の死亡指数を組み合わせた行列に特異値分解を行い、第一特異値に対応する項の時系列変化に対し

^{*3} 指数関数は $k_t = \alpha_1 \exp(\alpha_2 t) + \alpha_3$ 、対数関数は $k_t = \beta_1 \ln(t + \beta_2) + \beta_3$ として当てはめた。ここで、 α_n と β_n は定数である

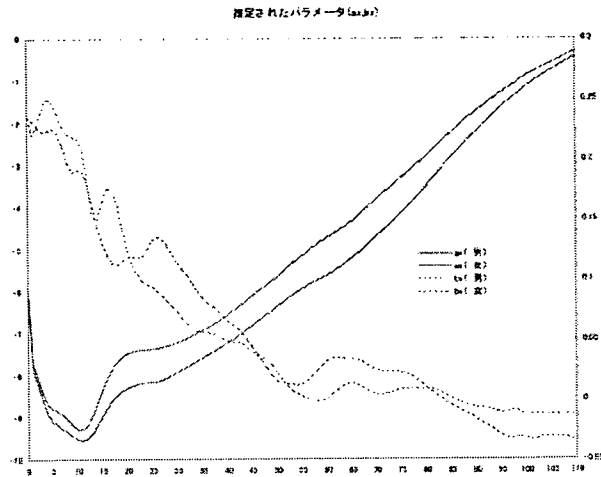


図 26 推定されたパラメータ (a_x, b_x)

て関数あてはめを行った後、男女別の死亡指数を推計した(図 27)。また、 S_t については過去 10 年間の死亡指数 k_t との線形関係を用いて将来推計し、勾配 β_t については直近の平均値(男性 10 年分、女性 15 年分)を将来に向けて固定した(図 28)。

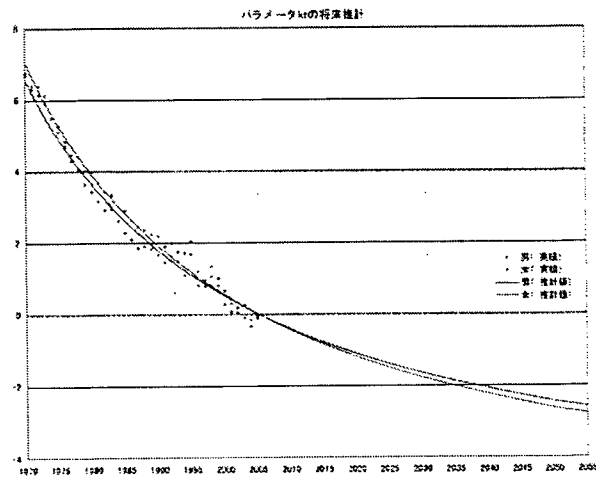


図 27 パラメータ k_t の将来推計

なお今回の推計では、近年の死亡水準の改善が従来の理論の想定を超えた動向を示しつつあることから、今後の死亡率推移ならびに到達水準については不確実性が高いものと判断し、複数の仮定を与えることによって一定の幅による推計を行うものとした。すなわち、標準となる死亡率推移の死亡指数パラメータ k_t の分散をブートストラップ法により求めて 99% 信頼区間を推定し、死亡指数 k_t が信頼区間の上限を推移する高死亡率推計である「死亡高位」仮定、下限を推移する低死亡率推計である「死亡低位」仮定を付加した

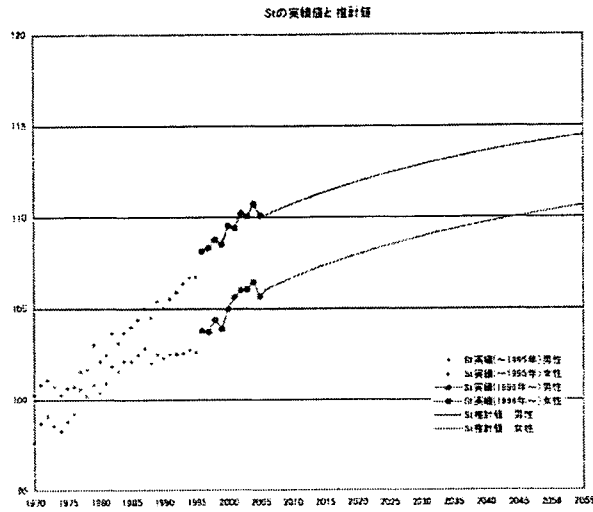


図 28 S_t の実績値と推計値

(図 29)。

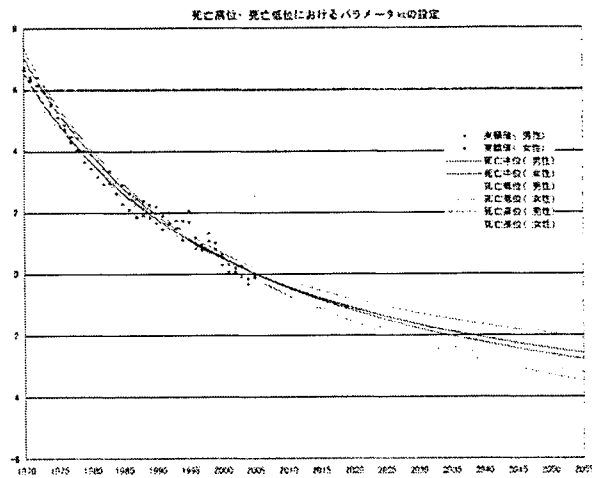


図 29 死亡高位・死亡低位におけるパラメータ k_t の設定

以上の手続きにより求められたパラメータと変数から最終的に平成 67 (2055) 年までの死亡率を男女別各歳別で算出し、将来生命表を推計した。

4. 年齢シフトモデルによる推計結果と評価

4.1 年齢シフトモデルによる推計結果

将来生命表に基づく男女別平均寿命の推移を図 30 に示した。

死亡中位の仮定による標準的な将来生命表に基づくと、平成 17(2005) 年に男性 78.53 年、女性 85.49 年であった平均寿命は、平成 22 (2010) 年には男性 79.51 年、女性 86.41 年、平成 42 (2030) 年には男性 81.88 年、女性 88.66 年、平成 67 (2055) 年には男性 83.67 年、女性 90.34 年となる。

死亡高位の仮定では、中位仮定に比べて死亡率が高めに、したがって平均寿命は低めに推移する。その結果、この仮定においては、平成 67(2055) 年の平均寿命は男性 82.41 年、女性 89.17 年となる。

死亡低位の仮定では、中位仮定に比べて死亡率が低めに、したがって平均寿命は高めに推移する。その結果、この仮定においては、平成 67(2055) 年の平均寿命は男性 84.93 年、女性 91.51 年となる。

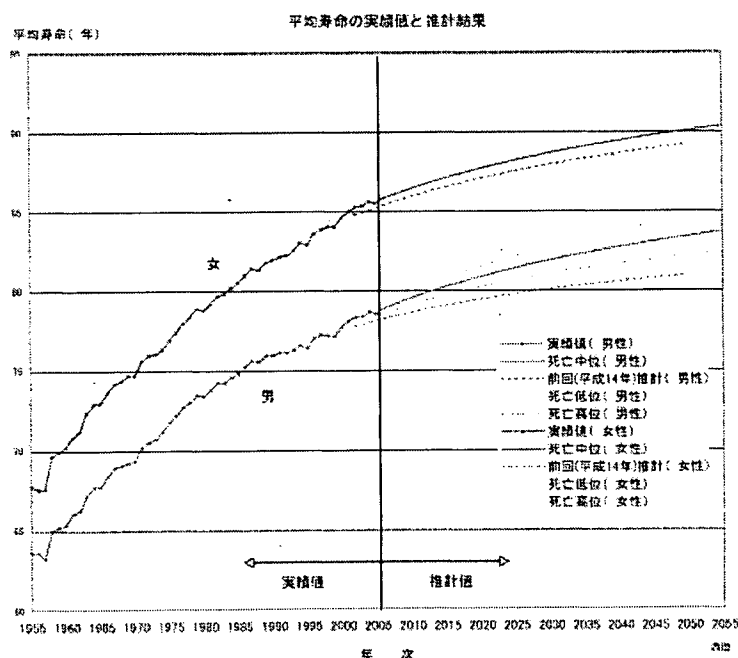


図 30 平均寿命の実績値と推計結果

平成 14 年 1 月推計においては、2050 年の平均寿命は男性 80.95 年、女性 89.22 年であったことから、2050 年で比較すると今回のモデルによる推計結果の差は男性では死亡中位で +2.42 年、死亡高位で +1.23 年、死亡低位で +3.62 年、女性では死亡中位で +0.85

年、死亡高位で-0.26年、死亡低位で+1.95年となっている。また、これらに対応し、平成14年1月推計においては2050年に向けて8.27年まで拡大していくことが見込まれていた平均寿命の男女差は、今回のモデルでは、最終年度である2055年においても死亡中位で6.67年、死亡高位で6.77年、死亡低位で6.58年とほぼ現状程度で推移する見込みとなった。

「平成14年1月推計のモデルとその評価」で見たように、前回推計以降に判明した2001年以降の実績値については、男性の実績値との乖離の方が女性よりも大きく、特に男性の死亡率改善が進んできたことが観察されていた。これにより、今回推計では、前回推計以降の死亡率改善、特に、男性の死亡率改善が将来投影に反映されている。

同時に、「近年の死亡動向」において見た通り、我が国の死亡率改善は男女とも特に高齢部で著しく、このうち、1990年代には男性の改善度が女性を下回る傾向が見られたが、直近である2000年以降については、男女差がそれほど大きく拡大しなくなるという傾向の変化が見られるようになってきている。

今回の推計では、このようなこの5年間に新たに観察された男性の平均寿命のキャッチアップや、寿命の男女差の動向が将来投影に織り込まれることとなったことから、男女差がほぼ現状と同程度となるとともに、前回推計と比較した場合、女性に比べて男性の平均寿命の伸びが大きくなるという推計結果になったものと考えられる。

4.2 リー・カーター・モデルと年齢シフトモデルとの比較

本研究で述べた年齢シフトモデルはリー・カーター・モデルの一種であるが、ここでは、年齢シフトを行わない通常のリー・カーター・モデルと年齢シフトモデルによる死亡率推計に関して比較を行い、両モデルの特性について検討を行うこととする。この目的のため、年齢シフトモデルと同様の基礎データ及び構造を持ちつつ、年齢シフトを行わないモデルを考えて将来生命表の試算を行い、これを通常のリー・カーター・モデルによる試算結果として比較に用いることとした。なお、以後、本節においては年齢シフトを行わない通常のリー・カーター・モデルを単にリー・カーター・モデルと呼ぶこととする。

最初に、実績値の再現テストにより両モデルの特性を評価してみることとしよう。図31は、推計の基礎とした1970～2005年について、リー・カーター・モデルと年齢シフトモデルの両モデルによる平均寿命と実績値とを比較したものである。平均寿命で見た場合、両モデルとも比較的実績への当てはまりはよいことが観察されるが、特に女性についてはやや年齢シフトモデルによる平均寿命の再現性が高いことが見て取れる。

さらに詳細に観察するため、1970、1980、1990、2000、2005年の5点について、両モデルによる実績死亡率の再現値と実績値を比較することとした。図32は、年齢シフトモデルに基づく死亡率曲線（グラフの赤線）と実績値（グラフの黒線）との比較である。図33に60歳以上の部分のみを拡大して示している。

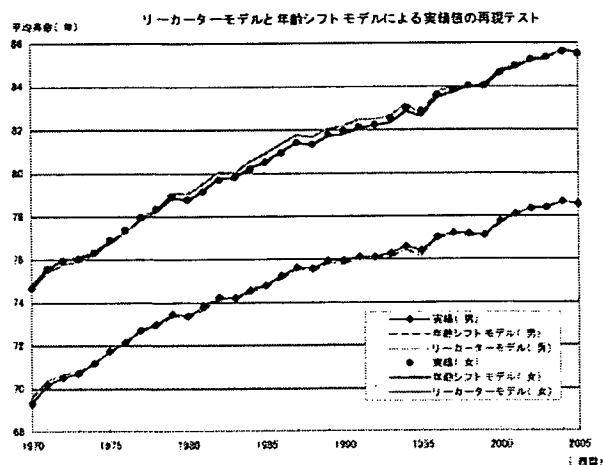


図 31 リー・カーター・モデルと年齢シフトモデルによる実績値の再現テスト

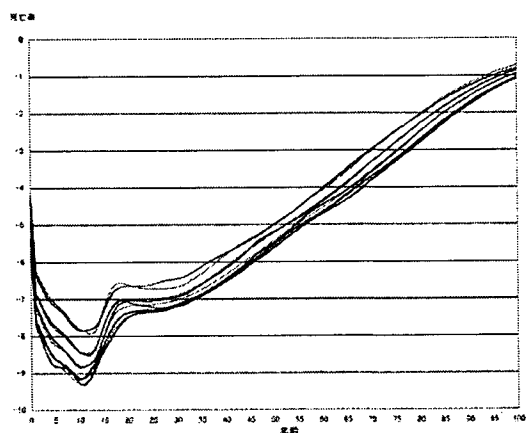


図 32 年齢シフトモデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・男性)

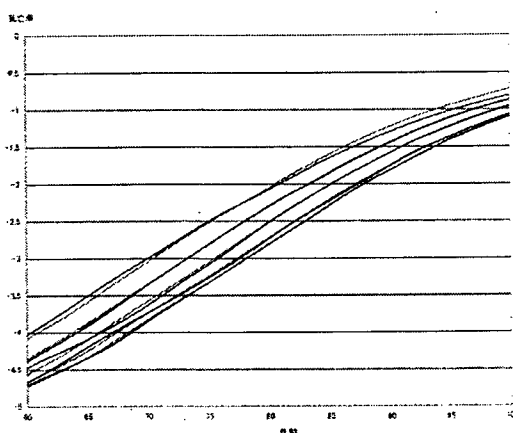


図 33 年齢シフトモデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・高齢部分・男性)

一方、図 34、図 35 は、リー・カーター・モデルに基づく死亡率曲線（グラフの赤線）と実績値（グラフの黒線）との比較である。両者を比較してみると、特に高齢部分については、年齢シフトモデルによる死亡率曲線の再現性が高いことが観察できる。

図 36～図 39 は女性について同様のものを示したものであるが、特に、図 37 と図 39 からは、年齢シフトモデルの実績値への当てはまりがリー・カーター・モデルを上回っていることが確認される。

このように、両モデルとも実績死亡率の再現性は高いものと考えられ、男性では平均寿命の再現性については両者は同じ程度であると考えられたが、より詳細に年齢パターンの再現性まで見た場合には、年齢シフトモデルの方が高齢死亡率における再現性は高いもの

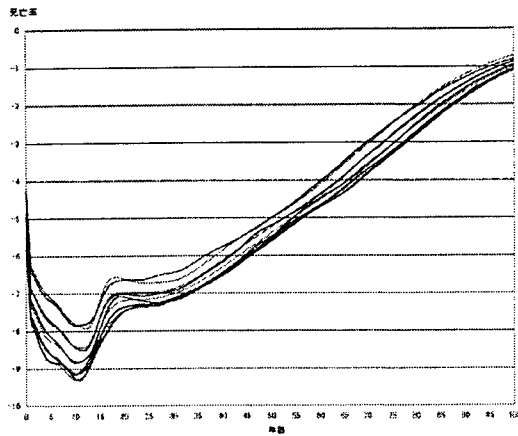


図 34 リー・カーター・モデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・男性)

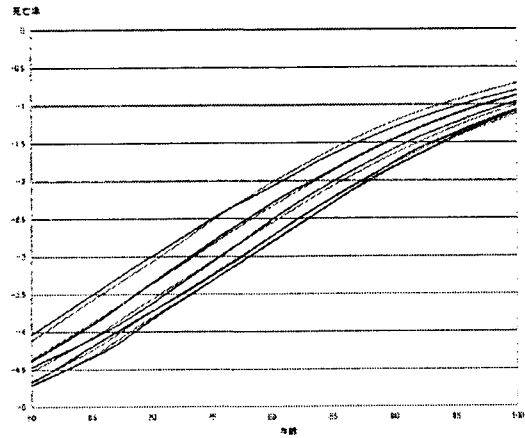


図 35 リー・カーター・モデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・高齢部分・男性)

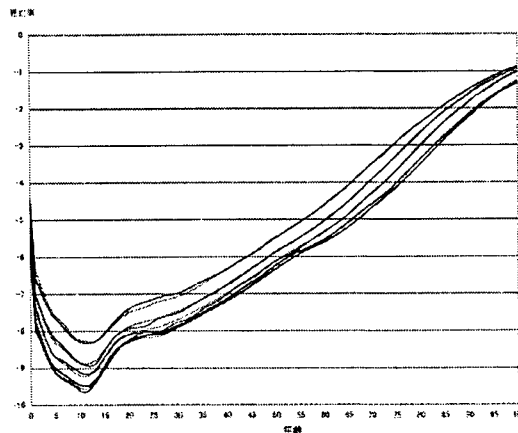


図 36 年齢シフトモデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・女性)

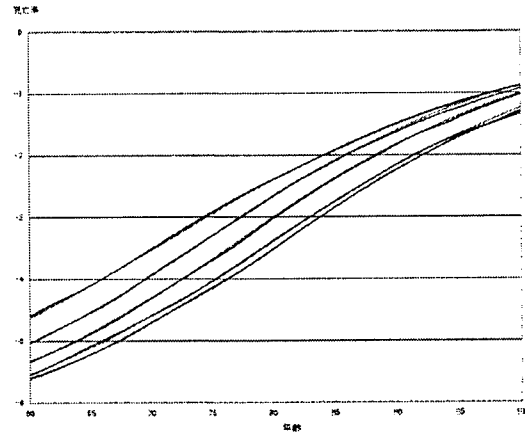


図 37 年齢シフトモデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・高齢部分・女性)

と考えられる。また、女性については平均寿命、年齢パターンの再現性とも年齢シフトモデルの方が高いことが観察された。

次に、両モデルによる将来生命表の生命関数の違いを比較してみよう。ここでは、年齢シフトモデルによる死亡中位・死亡高位・死亡低位結果、リー・カーター・モデルによる試算値に、同じくリー・カーター・モデルに基づく平成 14 年 1 月推計結果を加えて比較を行った。図 40、図 41 は死亡率曲線の将来推計値を比較したものである。これを見ると、リー・カーター・モデルによる試算値、平成 14 年推計値とも、年齢シフトモデルに

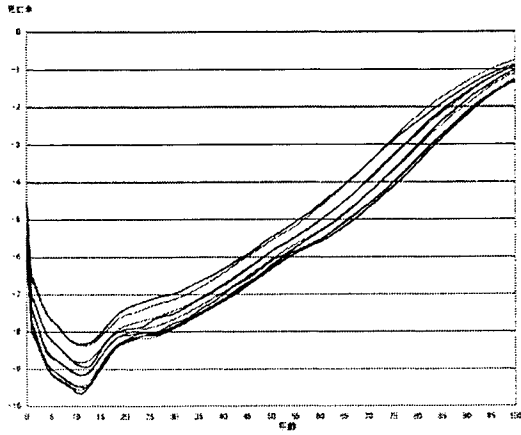


図 38 リー・カーター・モデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・女性)

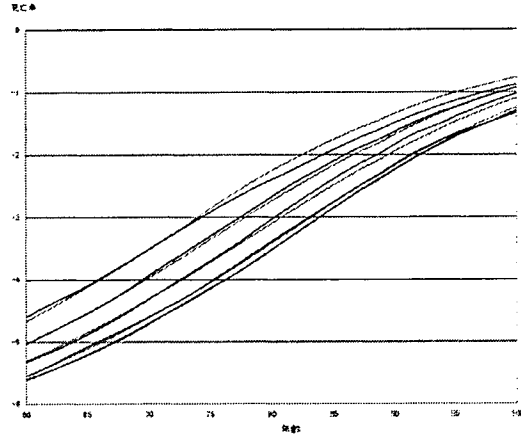


図 39 リー・カーター・モデルによる実績死亡率 (1970,80,90,2000,2005 年) (対数値・高齢部分・女性)

比べてやや高齢部分での死亡率曲線の勾配が大きくなっていることが見られる。特に、女性のリー・カーター・モデルによる試算値では 60～70 歳代でやや死亡率が低くなった後、80 歳以降の高齢部分で年齢シフトモデルの中位推計と同レベルまで高くなっていく傾向があることがわかる。

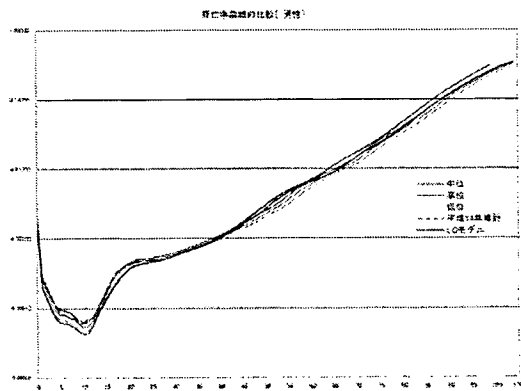


図 40 死亡率曲線の比較 (2050 年・男性)

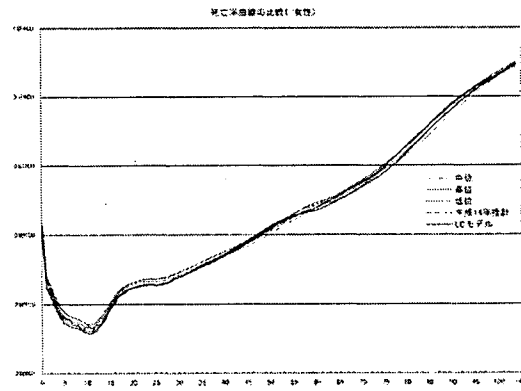


図 41 死亡率曲線の比較 (2050 年・女性)

図 42、図 43 は生存数曲線の将来推計値を比較したものであるが、死亡率曲線に見られた高齢での勾配の違いの影響により、生存数曲線はリー・カーター・モデルによる曲線の方が年齢シフトモデルに比べ矩形化の傾向がやや強くなっているように見受けられる。また、年齢シフトモデルの中位・高位・低位の比較からは、年齢シフトモデルにおける死亡率低下は、生存数曲線の矩形化の動きとして現れるというよりも、生存数曲線自体が右方向へシフトするという動きとして現れてくることが観察でき、近年の死亡率改善を年齢シ

フトという動きとして捉えられる点とも整合的なモデルであることが理解される。

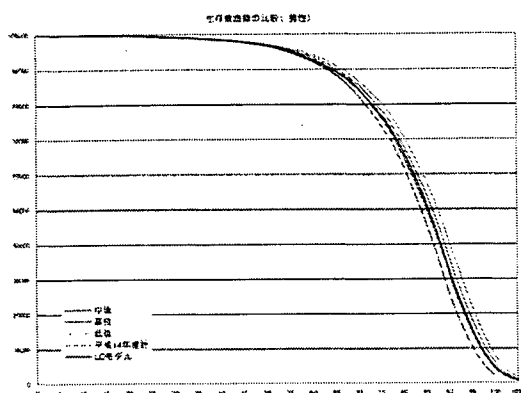


図 42 生存数曲線の比較 (2050 年・男性)

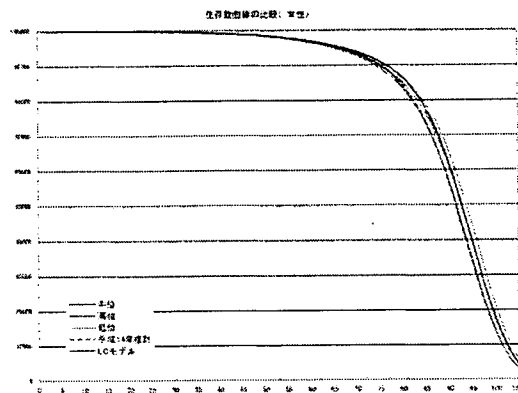


図 43 生存数曲線の比較 (2050 年・女性)

おわりに

本研究においては、近年の死亡動向・平成 14 年 1 月推計の評価等を通じてモデル改善に関する視点を検討し、年齢シフト構造を持つリー・カーター・モデルの開発を行って、死亡率推計モデルに関する検討を行った。本研究によって開発された年齢シフトモデルは、リー・カーター・モデルの簡明性を保ちつつ、年齢シフトというわが国の死亡動向をよりよく表現するものである。また、通常のリー・カーター・モデルによる試算等との比較を通じ、年齢シフトモデルによる死亡率推計値は実績値の再現性に優れるとともに、それに基づく将来死亡年齢パターンについて、近年の死亡率改善が年齢シフトという動きとして捉えられる点と整合的なものであるとの特性が明らかとなった。

参考文献

- Bongaarts, J. (2005) "Long-range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods", *Demography*, Vol. 42, No. 1, pp. 23–49.
- 石井太 (2006) 「わが国の平均寿命の動向と死亡率推計モデルの検討」, 『人口問題研究』, 第 62 巻, 第 3 号, pp.21–30.
- 小松隆一 (2002) 「リレーショナル・モデルによる日本の将来生命表作成の試み」, 『人口問題研究』, 第 58 巻, 第 3 号, pp.3–14, 9 月.
- Lee, R. and L. Carter (1992) "Modeling and Forecasting U.S. Mortality", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, No. 419, pp. 659–675, September.
- Lee, R. and T. Miller (2001) "Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality", *Demography*, Vol. 38, No. 4, pp. 537–549, November.

(5) 年齢シフトモデルによる将来生命表の特性評価について

石井 太

はじめに

国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口（平成 18 年 12 月推計）」(国立社会保障・人口問題研究所 2007) では、推計手法としてコーホート要因法が用いられている。死亡による人口の変動を推計するためには将来の生残率が必要となるため、将来人口推計を実行するためには将来の死亡率推計が必要となる。

平成 18 年 12 月推計では、現在国際的に標準的な方法とされ、平成 14 年 1 月推計でも用いたリー・カーター・モデルを採用しつつ、これに対して世界の最高水準の平均寿命を示すわが国の死亡動向の特徴に適合させるため、新たな機構を加えたモデル（以下、「年齢シフトモデル」と呼ぶ）により死亡率の投影を行った。具体的には、過去の死亡率曲線にロジスティック曲線を当てはめて、その年齢シフト量と勾配に関するパラメータを推定し、これによる高齢死亡率の年齢シフトを考慮した上でリー・カーター・モデルを適用することによって、死亡率改善の著しいわが国の死亡状況に適合させるものである。

昨年度においては、この年齢シフトモデルの開発を中心に研究を行った。その中で、従来のリー・カーター・モデルとの比較についても検討を行ったところであるが、本年度は、年齢シフトモデルによって導かれる将来生命関数の特性を、生存数曲線の矩形化の観点を中心としてより詳細に観察し、本モデルの評価を行うことを目的とする研究を行った。

1. 寿命の限界論と生存数曲線の矩形化

寿命がどこまで延びるのかについて、かつて専門家の間では寿命には一定の限界があり平均寿命もやがてその限界に近づいていくため延びが鈍っていくという議論が有力であった。もしこのように寿命に限界があるとするならば、若い年齢層での生存割合が上昇する一方で高齢層での生存割合が急激に降下することとなるため、生存数曲線は徐々に長方形に近づいていくこととなる。このことを生存数曲線の「矩形化」と呼ぶ。図 1 はわが国の女子の生存数曲線の推移を見たものであるが、生存数曲線が次第に矩形化していくプロセスを経ながら平均寿命を延ばしてきた様子が見られる。しかしながら、近年の生存数曲線の動きを見ると、高齢層で生存割合が急激に降下する動きよりも、生存数曲線自体がそのまま高齢の方へシフトするような、死亡の遅延とでも呼ぶべき現象が観察されることがわかる。これは、寿命に限界があるという説に対し、そのような限界を考えることができないとするものや、存在したとしても非常に高い年齢であると考えられる説に寄与するものである。

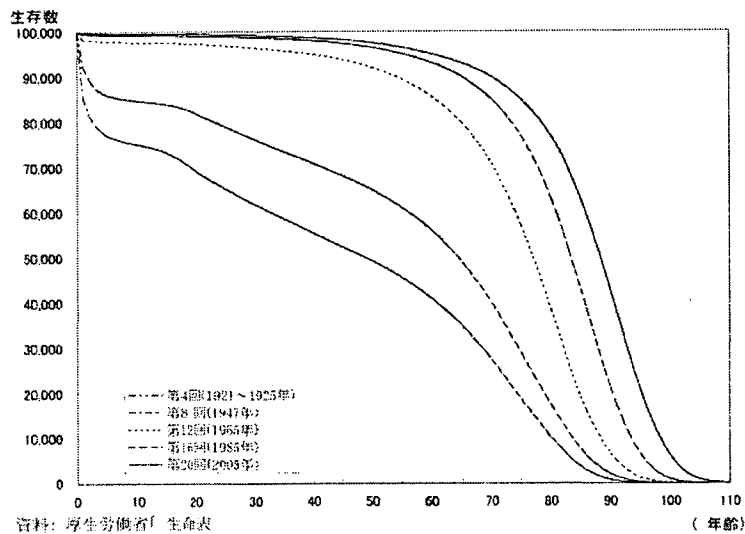


図1 生存数曲線（女子）の推移

Wilmoth and Horiuchi (1999) は、このような生存数曲線の矩形化について、定量的な指標に基づいて分析を行う研究を行った。彼らは、生存数曲線の矩形化の度合いを表す様々な定量的指標を比較検討するとともに、特に、死亡年齢の四分位偏差 (Interquartile range of age at death) に着目し、日本、アメリカ、スウェーデンの比較を行うとともに、四分位偏差の変化の要因分解を行って、比較研究を行っている。

本研究では、以下、Wilmoth and Horiuchi (1999) によって検討された指標を、わが国の実績生命表及び将来推計における生命表に適用し、年齢シフトモデルによる将来生命関数の特性を評価を行うこととする。

2. 矩形化に関する指標とその動向

Wilmoth and Horiuchi (1999) は、生存数曲線の矩形化を示す定量的指標として、以下の十指標の比較・検討を行っている。

1. Fixed Rectangle
2. Moving Rectangle
3. Fastest decline
4. Sharpest corner
5. Quickest plateau
6. Prolate index
7. Interquartile range
8. Standard deviation

9. Gini Coefficient

10. Keyfit's H

本研究ではこれらのうち、1.Fixed Rectangle, 3.Fastest decline, 4.Sharpest corner, 5.Quickest plateau, 6.Prolate index, 7.Interquartile range の六指標を取り上げ、検討を行うこととする。

最初に、これらの指標の定義に加え、わが国の実績値における動向を観察するため、完全生命表を用いて各指標を評価してみることにする。

2.1 Fixed Rectangle

Fixed Rectangle とは、基数を $1(l_0 = 1)$ とした生存数曲線において、高さが 1、右の端点が固定されたある年齢 (例えば 100 歳) の長方形を考え、この長方形における生存数曲線の下側の面積の割合を計算したものである。生存数曲線の矩形化に伴い、この指標は増加することとなる。具体的には、固定年齢を ϕ 、生存数曲線を $S(x)$ とした場合、FR:Fixed Rectangle は、

$$FR = \frac{\int_0^{\phi} S(x) dx}{\phi}$$

で表される。本研究では $\phi = 100$ とした。

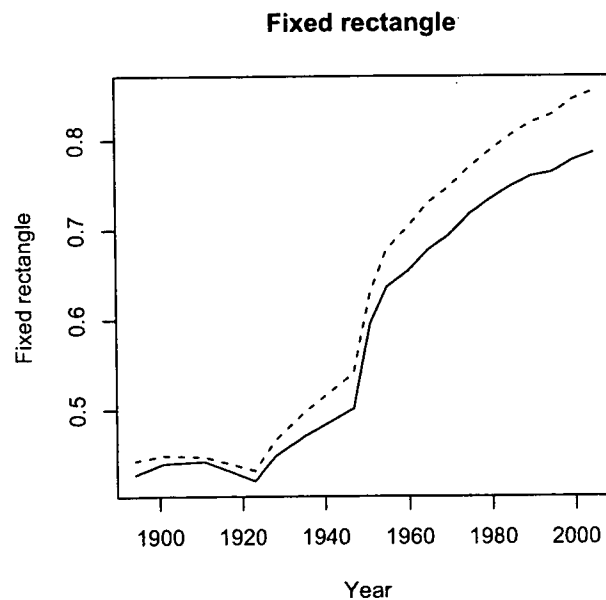


図2 FR(Fixed Rectangle)の推移

FRを実績値（完全生命表）を用いて評価したものが、図2である。FRは概ね平均寿命と近い動きをするため、単調に増加する結果となっていることがわかる。

2.2 Fastest decline

Fastest decline とは、乳幼児期を除いた成人年齢の範囲内で、最も生存数曲線の減少速度が速い年齢における生存数曲線の導関数の絶対値を測定したものである。生存数曲線の矩形化に伴い、この指標は増加することとなる。具体的には、例えば成人年齢の範囲を $x \geq 20$ として、

$$FD = \max_x \{-S'(x)\} \quad x \geq 20$$

で表される。

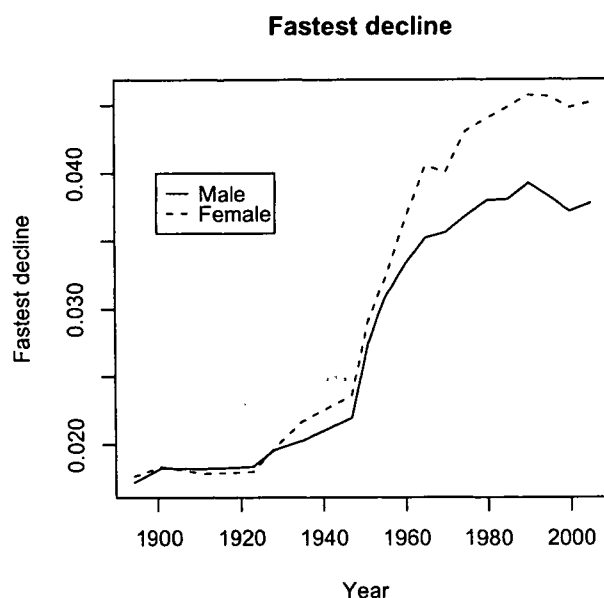


図3 FD(Fastest decline)の推移

FDを実績値（完全生命表）を用いて評価したものが、図3である。なお、FDの評価には生存数曲線の導関数が必要となる。本研究における評価に当たっては、各年次における評価を同一に行う観点から、各完全生命表の生存数実績値を基礎とし、これをスプライン補間した後、数値的に導関数を求めている。FDはFRと異なり、1990年以降あまり増加していない特徴がある。数値がやや増減を繰り返しながら推移している点については、数値微分による導関数の評価も影響を与えているものと考えられる。

2.3 Sharpest corner

Sharpest corner とは、成人年齢の範囲内で、生存数曲線の二次導関数が最小（負で絶対値が最大）となる年齢における、その二次導関数の絶対値を測定したものである。生存数曲線の矩形化に伴い、この指標は増加することとなる。具体的には、

$$SC = \max_x \{-S''(x)\} \quad x \geq 20$$

で表される。

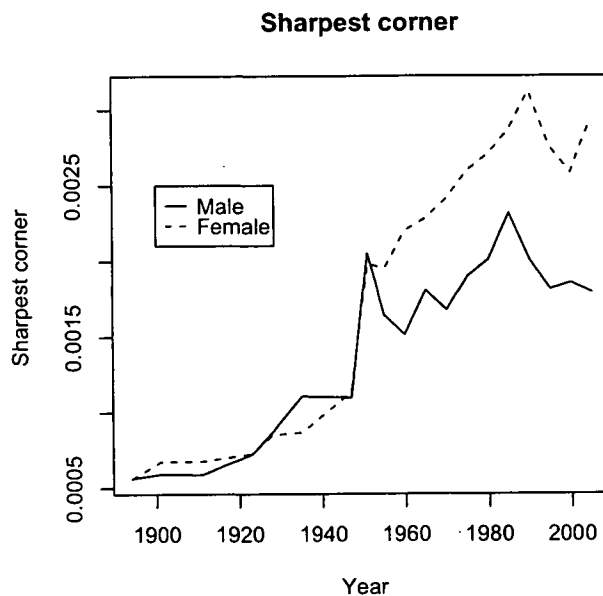


図4 SC(Sharpest corner)の推移

SCを実績値（完全生命表）を用いて評価したものが、図4である。SCの評価についても、生存数曲線の導関数に加え、二次導関数が必要となる。そこで、FDで行ったのと同様、まず生命表における死亡数をスプライン補間し、これを用いて数値的に二次導関数を求めた。SCでは二次導関数を用いることから、FDよりもさらに数値の不安定さが増しており、評価を難しいものとしているが、FDと比較してみた場合、1990年以降は上昇基調でないという点は共通していると見ることができよう。

2.4 Quickest plateau

Quickest plateau とは、成人年齢の範囲内で、生存数曲線の二次導関数が最大となる年齢における、その二次導関数の絶対値を測定したものである。生存数曲線の矩形化に伴

い、この指標は増加することとなる。具体的には、

$$QP = \max_x \{S''(x)\} \quad x \geq 20$$

で表される。

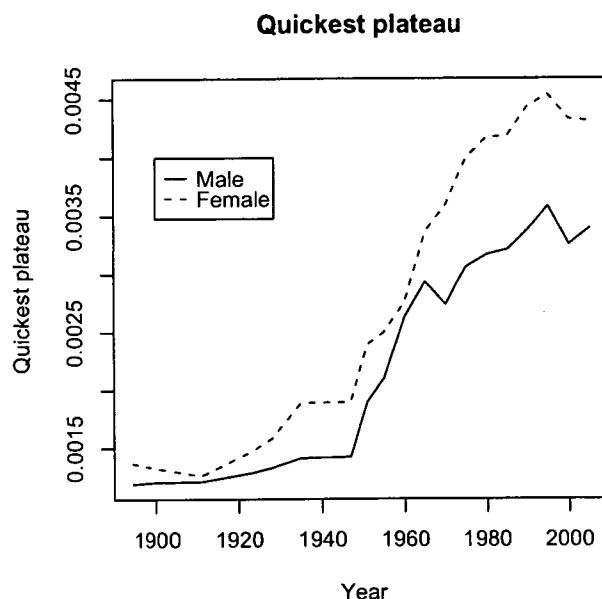


図5 QP(Quickest plateau)の推移

QPを実績値（完全生命表）を用いて評価したものが、図5である。二次導関数についてはSCと同じものを使用している。QPでも二次同関数を用いることから、SCほどではないものの、数値が不安定である点が見られる。しかしながらその動向はFDとよく似ていることが観察される。

2.5 Prolate index

Prolate indexも高齢部分における生存数曲線の勾配の度合をはかるものである。具体的には、FD,SCにおいて最大値を与える年齢をそれぞれ x', x'' として、

$$PI = \cos(\theta) = \frac{S(x') - S(x'')}{\sqrt{[S(x') - S(x'')]^2 + [x' - x'']^2}}$$

で与えられる。図5は、Wilmoth and Horiuchi (1999)からの引用であるが、この図における $\cos(\theta)$ を測定したものがProlate indexということになる。生存数曲線の矩形化に伴い、この指標は増加する。

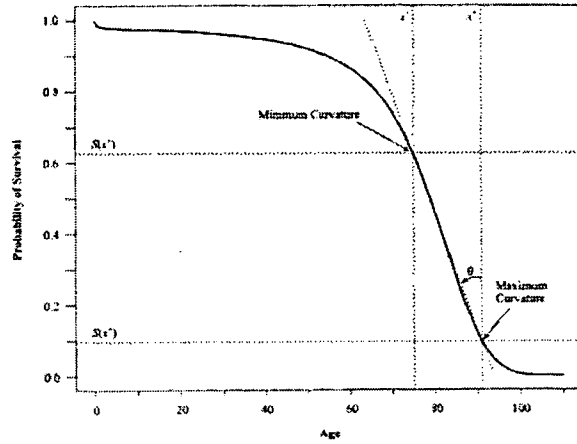


図6 PIの定義 (Wilmoth and Horiuchi(1999)による)

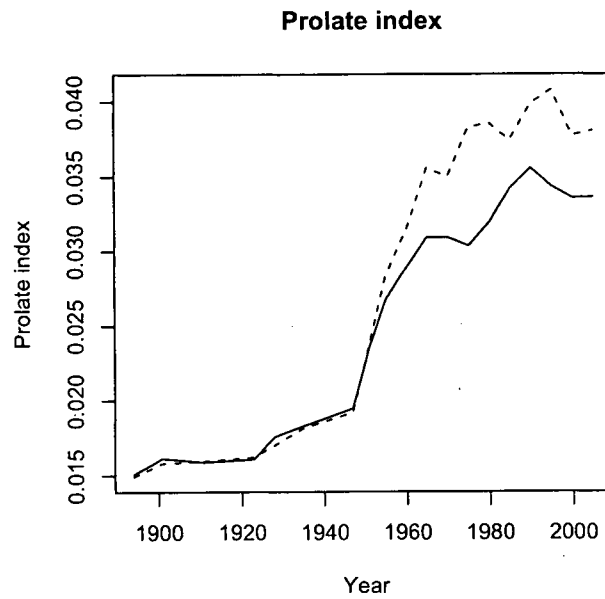


図7 PO(Prolate index)の推移

PIを実績値(完全生命表)を用いて評価したものが、図7である。PIでもSC,QPの導出において二次同関数を用いることから、数値がやや不安定であることは避けられない。動向についてはやはりFDとよく似ていることが観察される。