

Figure 11. Distribution of hydrostatic pressure and Donnan osmotic pressure varying with time in 0.15 M NaCl solution: (a) hydrostatic pressure; and (b) Donnan osmotic pressure.

pressure is similar to that of the FCD (Figure 7 distribution 1), and decreases with time due to the dilution of molarity inside the tissue. Finally, the Donnan osmotic pressure reaches the same equilibrium value as the hydrostatic pressure (at 8000 s shown in Figure 11(a)). Variation in the difference between the Donnan osmotic and the hydrostatic pressures also indicates that most of the swelling and curling occurred within 1000 s after the tissue was submerged in the solution.

In order to investigate the effects of mesh size on the numerical results, by contrast with the original model with 216 elements and 4800 degrees of freedom, two refined finite element models are generated with 1000 and 1728 hexahedral elements, and 18 632 and 30 756 degrees of freedom, respectively (Figure 12). Variations with time of the displacement at point A in the z -axis direction and the hydrostatic pressure distribution in the depth direction at the transverse mid-plane of the cartilage strip at time 8000 s are used as the indicators. The results shown in Figure 13(a) indicate that a good agreement in the displacements by all of these three models is obtained with deviations of almost less than 1.0%. Figure 13(b) shows that the hydrostatic pressure distributions obtained by these three models are also very close. Therefore, it can be concluded that no obvious mesh dependency of the numerical results are found in this example.

5. CONCLUSION

To overcome the difficulty of defining a common reference configuration in triphasic theory for hydrated soft tissue under large deformation, in this paper, an imaginary reference configuration has been established for utilizing the approaches used in single-phase continuum mechanics. Tissues under large deformation are mapped to the imaginary reference configuration by tracing the deformation of the solid matrix while preserving the kinematics of the fluid and ionic phases via a Piola transformation of the relative velocities. The governing equations of triphasic theory have been reformulated in the imaginary reference configuration. Based on the reformulated governing equations, a non-linear finite element formulation has been developed using the weighted residual method with solid displacement, fluid flow, ionic flows, hydrostatic pressure, and electrical potential as the unknown nodal variables. After verifying the proposed finite

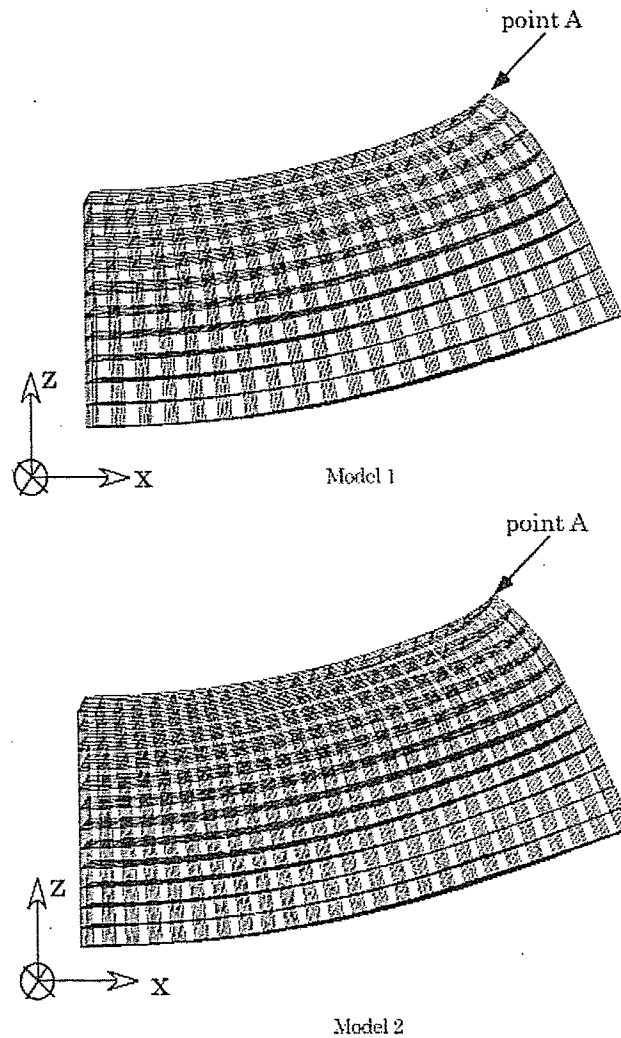


Figure 12. Refined finite element models of the $\frac{1}{4}$ cartilage strip (Model 1: 1000 elements, 2386 nodes, 18 632 degrees of freedom, Model 2: 1728 elements, 4003 nodes, 30 756 degrees of freedom).

element formulation using a linear-confined compression problem, the effects of non-linearities in the porosity and FCD on the behaviours of soft tissues have been investigated. The results show that local finite deformation cannot usually be ignored, although global deformation may be relatively small. Moreover, in this study, numerical simulation of articular cartilage undergoing large deformation has been carried out for a three-dimensional free-swelling problem including the deformation-dependent permeability and non-uniform distributions of FCD and solidity. The numerical results are in agreement with those obtained by experiment. Also, the deformation-dependent permeability and non-linear distribution of FCD induce strong non-linearities that can significantly affect the behaviours of soft tissues. Therefore, the proposed

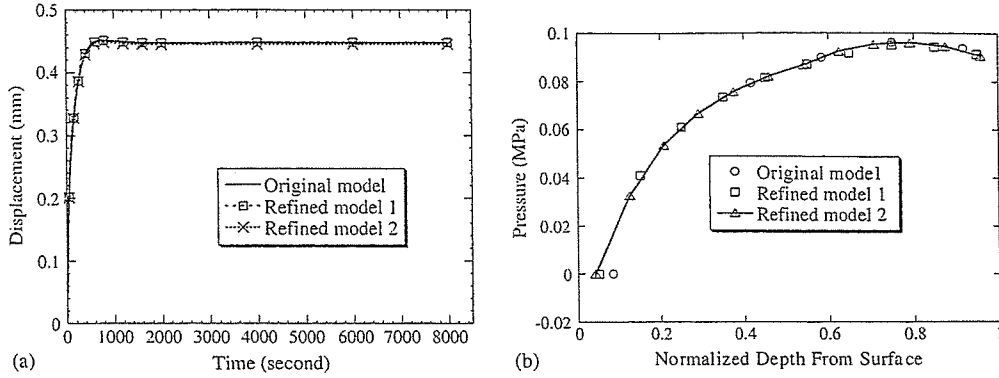


Figure 13. Effects of the mesh size on the numerical results with the displacement history and hydrostatic pressure distribution as indicators in a 0.15 M NaCl solution: (a) displacement histories; and (b) hydrostatic pressure distributions.

formulation in this paper is considered to provide, in practice, an effective approach for the analysis of hydrated soft tissue. In addition, although the validity and effectiveness were assessed by numerical examples of isotropic materials, if the anisotropic constitutive relation for the solid phase and anisotropic permeability and diffusion coefficient tensors are introduced, the formulation in this work can be applied to anisotropic materials.

APPENDIX A

Although the diffusion coefficients \mathbf{D}^+ and \mathbf{D}^- and the permeability \mathbf{K} are usually deformation dependent, for the sake of simplicity, they are omitted in the linearization procedure. Since the chemical potentials are functions of the ionic concentrations, and thus depend on the deformation of the tissue, their differentiation results in the asymmetric part of the stiffness matrix.

The following gives definitions of the submatrices and vectors in Equation (68):

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial X_1 & 0 & 0 & \partial/\partial X_2 & 0 & \partial/\partial X_3 \\ 0 & \partial/\partial X_2 & 0 & \partial/\partial X_1 & \partial/\partial X_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial X_3 & 0 & \partial/\partial X_2 & \partial/\partial X_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{WW} = \int_{\Omega_0} \left[\mathbf{H}^T \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{H}^T \frac{c^+ RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{+^{-1}} \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \frac{c^- RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{-^{-1}} \mathbf{H} \right] dV$$

$$\mathbf{B}_{WJ^+} = \int_{\Omega_0} \left[-\mathbf{H}^T \frac{RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{+^{-1}} \mathbf{H}^+ \right] dV$$

$$\mathbf{B}_{WJ^-} = \int_{\Omega_0} \left[-\mathbf{H}^T \frac{RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{-^{-1}} \mathbf{H}^- \right] dV$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J+W} &= \int_{\Omega_0} \left[-\mathbf{H}^{+\top} \frac{RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{+\top} \mathbf{H} \right] dV \\
\mathbf{B}_{J+J^+} &= \int_{\Omega_0} \left[\mathbf{H}^{+\top} \frac{RT}{c^+ \phi^w} \mathbf{D}^{+^{-1}} \mathbf{H}^+ \right] dV \\
\mathbf{B}_{J-W} &= \int_{\Omega_0} \left[-\mathbf{H}^{-\top} \frac{RT}{\phi^w} \mathbf{D}^{-\top} \mathbf{H} \right] dV \\
\mathbf{B}_{J-J^-} &= \int_{\Omega_0} \left[\mathbf{H}^{-\top} \frac{RT}{c^- \phi^w} \mathbf{D}^{-^{-1}} \mathbf{H}^- \right] dV \\
\mathbf{P}_{uu} &= \int_{\Omega_0} \left[(\mathbf{LN}^s)^\top : \left[4 \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] : (\mathbf{LN}^s) + [\nabla_0 \otimes \mathbf{N}^s]^\top \cdot \mathbf{S} \cdot [\nabla_0 \otimes \mathbf{N}^s] \right] dV \\
\mathbf{P}_{up} &= \int_{\Omega_0} [(\mathbf{LN}^s)^\top : [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}]\mathbf{M}] dV \\
\mathbf{P}_{Qu} &= \int_{\Omega_0} \left[-(\nabla_0 \cdot \mathbf{H})^\top \frac{RT\phi}{J\phi^w} (c^+ + c^-) [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{c^+ RT}{J} \mathbf{D}^{+^{-1}} \cdot \mathbf{W} [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) - \frac{c^- RT}{J} \mathbf{D}^{-^{-1}} \cdot \mathbf{W} [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) \right] dV \\
\mathbf{P}_{Q^+u} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{RT}{c^+ J} \mathbf{D}^{+^{-1}} \cdot \mathbf{J}^+ [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) + (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+)^\top \frac{RT}{J\phi^w} [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) \right] dV \\
\mathbf{P}_{Q^-u} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{RT}{c^- J} \mathbf{D}^{-^{-1}} \cdot \mathbf{J}^- [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) + (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-)^\top \frac{RT}{J\phi^w} [\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}] : (\mathbf{LN}^s) \right] dV \\
\mathbf{P}_{QQ^+} &= \int_{\Omega_0} \left[-(\nabla_0 \cdot \mathbf{H})^\top \frac{RT\phi}{J\phi^w} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+) - \frac{RT}{J} \mathbf{D}^{+^{-1}} \cdot \mathbf{W} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+) \right] dV \\
\mathbf{P}_{QQ^-} &= \int_{\Omega_0} \left[-(\nabla_0 \cdot \mathbf{H})^\top \frac{RT\phi}{J\phi^w} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-) - \frac{RT}{J} \mathbf{D}^{-^{-1}} \cdot \mathbf{W} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-) \right] dV \\
\mathbf{P}_{Qp} &= \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{H})^\top \mathbf{M}] dV \\
\mathbf{P}_{Q^+Q^+} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{RT}{(c^+)^2 J} \mathbf{D}^{+^{-1}} \cdot \mathbf{J}^+ (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+) + (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+)^\top \frac{RT}{c^+ J\phi^w} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+) \right] dV \\
\mathbf{P}_{Q^+\eta} &= \int_{\Omega_0} [-(\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+)^\top \mathbf{M}^\eta] dV
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{Q^-Q^-} = \int_{\Omega_0} \left[\frac{RT}{(c^-)^2 J} \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{J}^- (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-) + (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-)^T \frac{RT}{c^- J \phi^w} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-) \right] dV$$

$$\mathbf{P}_{Q^- \eta} = \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-)^T \mathbf{M}^\eta] dV$$

$$\mathbf{P}_{pu} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{M}^T [J \mathbf{C}^{-1}]^T : (\mathbf{L} \mathbf{N}^s)] dV$$

$$\mathbf{P}_{pQ} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{M}^T (\nabla_0 \cdot \mathbf{H})] dV$$

$$\mathbf{P}_{\eta Q^+} = \int_{\Omega_0} [-\mathbf{M}^{\eta T} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+)] dV$$

$$\mathbf{P}_{\eta Q^-} = \int_{\Omega_0} [\mathbf{M}^{\eta T} (\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-)] dV$$

$$\mathbf{G}_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{t0}} \mathbf{N}^{sT} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{N} dS \quad \mathbf{G}_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{N}^s)^T (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)] dV$$

$$\mathbf{\Xi}_{\text{ext}}^w = \int_{\Gamma_{w0}} \mathbf{H}^T (p^* - \pi^*) \cdot \mathbf{N} dS \quad \mathbf{\Xi}_{\text{int}}^w = \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{H})^T (p - \pi)] dV$$

$$\mathbf{\Xi}_{\text{ext}}^+ = \int_{\Gamma_{+0}} \mathbf{H}^{+T} (M^+ \mu^{+*} + \eta^*) \cdot \mathbf{N} dS \quad \mathbf{\Xi}_{\text{int}}^+ = \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^+)^T (M^+ \mu^+ + \eta)] dV$$

$$\mathbf{\Xi}_{\text{ext}}^- = \int_{\Gamma_{-0}} \mathbf{H}^{-T} (M^- \mu^{-*} - \eta^*) \cdot \mathbf{N} dS \quad \mathbf{\Xi}_{\text{int}}^- = \int_{\Omega_0} [(\nabla_0 \cdot \mathbf{H}^-)^T (M^- \mu^- - \eta)] dV$$

$$\Lambda = \int_{\Omega_0} [\mathbf{M}^T (J - 1 + \nabla_0 \cdot \mathbf{Q})] dV$$

$$\Phi = \int_{\Omega_0} [\mathbf{M}^{\eta T} (-\nabla_0 \cdot \mathbf{Q}^+ + \nabla_0 \cdot \mathbf{Q}^-)] dV$$

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Japan Society for the Promotion of Science through a Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 14550067 and Core Research for Evolutional Science and Technology of the Japan Science and Technology. We also thank L.A. Setton, H. Tohyama and V.C. Mow for

their photo published in 'Swelling and curling behaviours of articular cartilage' (ASME Journal of Biomechanical Engineering Vol. 120:355–361 (1998)).

REFERENCES

1. Maroudas A. In *Physicochemical Properties of Articular Cartilage: Adult Articular Cartilage*, Freeman MAR (ed.). Pitman Medical: Kent, U.K., 1979; 215–290.
2. Parsons JR, Black J. Mechanical behaviour of articular cartilage, quantitative changes with alteration of ionic environment. *Journal of Biomechanics* 1979; **12**:765–773.
3. Maroudas A, Bannan C. Measurement of swelling pressure in cartilage and comparison with the osmotic pressure of constituent proteoglycans. *Biorheology* 1981; **18**:619–632.
4. Myers ER, Lai WM, Mow VC. A continuum theory and an experiment for ion-induced swelling behaviour of articular cartilage. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1984; **106**:151–158.
5. Lanir Y. Biorheology and fluid in swelling tissues I. Bicomponent theory for small deformations including concentrations effects. *Biorheology* 1987; **24**:173–187.
6. Eisenberg SR, Grodzinsky AJ. The kinetics of chemically induced nonequilibrium swelling of articular cartilage and corneal stroma. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1987; **109**:79–89.
7. Frank EH, Grodzinsky AJ. Cartilage electromechanics, I. Electrokinetic transduction and the effect of electrolyte pH and ionic strength. *Journal of Biomechanics* 1987; **20**:615–627.
8. Biot MA. General theory of three dimension consolidation. *Journal of Applied Physics* 1941; **12**:155–164.
9. Bowen RM. Theory of mixture, incompressible porous media models by use of the theory of mixture. *International Journal of Engineering Science* 1980; **18**:1129–1148.
10. Lai WM, Hou JS, Mow VC. A triphasic theory for the swelling and deformation behaviours of articular cartilage. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1991; **113**:245–258.
11. Gu WY, Lai WM, Mow VC. Transport of fluid and ions through a porous-permeable charged-hydrated tissue, and streaming potential data on normal bovine articular cartilage. *Journal of Biomechanics* 1993; **26**:709–723.
12. Narnoneva DN, Wang JY, Setton LA. Nonuniform swelling-induced residual strain in articular cartilage. *Journal of Biomechanics* 1999; **32**:401–408.
13. Gu WY, Mao XG, Rawlins BA, Iatridis JC, Foster RJ, Sun DN, Weidenbaum M, Mow VC. Streaming potential of human lumbar annulus fibrosus is anisotropic and affected by disc degeneration. *Journal of Biomechanics* 1999; **32**:1177–1182.
14. Huyghe JM, Janssen JD. Quadriphasic mechanics of swelling incompressible porous media. *International Journal of Engineering Science* 1997; **35**:793–802.
15. Van Meerveld J, Huyghe JM. Analytical solutions of compression, free swelling and electrical load of saturated charged porous media. *Transport in Porous Media* 2003; **50**(1–2):111–126.
16. Sun DN, Gu WY, Guo XE, Lai WM, Mow VC. A mixed finite element formulation of triphasic mechano-electrochemical theory for charged hydrated biological soft tissues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; **45**:1375–1402.
17. Frijns AJH, Huyghe JM, Janssen JD. A validation of the quadriphasic mixture theory for intervertebral disc tissue. *International Journal of Engineering Science* 1997; **35**:1419–1429.
18. Loon RV, Huyghe JM, Wijlaars MW, Baaijens FPT. 3D FE implementation of an incompressible quadriphasic mixture model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; **57**:1243–1258.
19. Setton LA, Tohyama H, Mow VC. Swelling and curling behaviours of articular cartilage. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1998; **120**:355–361.
20. Hou JS, Holmes MH, Lai WM, Mow VC. Boundary conditions at the cartilage-synovial fluid interface for joint lubrication and theoretical verifications. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1989; **111**:78–87.
21. Suh JK, Spilker RL, Holmes MH. A penalty finite element analysis for nonlinear mechanics of biphasic hydrated soft tissues under large deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991; **32**:1411–1439.
22. Mow VC, Kuei SC, Lai WM, Armstrong CG. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiment. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* 1980; **102**:73–84.
23. Levenston ME, Eisenberg SR. A variational formulation for coupled physicochemical flows during finite deformations of charged porous media. *International Journal of Solids and Structures* 1998; **35**(34–35): 4999–5019.

24. Mow VC, Ateshian GA, Lai WM, Gu WY. Effects of fixed charges on the stress-relaxation behaviour of hydrated soft tissues in a confined compression problem. *International Journal of Solid and Structures* 1998; 35:4945–4962.
25. Urban JPG, Maroudas A. Swelling of the intervertebral disc in vivo. *Connective Tissue Research* 1981; 9:1–10.
26. Lai WM, Gu WY, Mow VC. On the condition equivalence of chemical loading and mechanical loading on articular cartilage. *Journal of Biomechanics* 1998; 31:1181–1185.
27. Maroudas A. In *Mechanisms of Fluid Transport in Cartilaginous Tissue: Tissue Nutrition and Viability*, Hargens AR (ed.). Springer: New York, 1986; 47–72.
28. Mow VC, Holmes MH, Lai WM. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage: a review. *Journal of Biomechanics* 1984; 17:377–394.
29. Holmes MH, Mow VC. The nonlinear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration. *Journal of Biomechanics* 1990; 23:1145–1156.

心臓弁の流体構造連成シミュレーション法に関する数理的考察

久田 俊明 鷲尾 巧

1 はじめに

ALE 有限要素法による流体構造強連成解析手法^[7]は、強力な解法であるが、心臓弁のように複雑な変形や開閉をともなう構造物に対しては流体メッシュの破綻が生じる。本稿では、弁の変形に依存しない流体メッシュ上で連成問題を解くことのできる解法について論じる。

そのような解法の一つとして Fictitious domain 法^[2]が挙げられる。この解法は、もともと剛体との連成問題に対して提案されたものであるが、例えば文献^[1]においては、薄い弾性体との連成問題に対して拡張されている。さらに、文献^[3]においては、その手法が大動脈弁のシミュレーションに適用された。一方で、これら提案手法の力学的な観点からの妥当性および計算精度に関しては十分な検証が成されていないように思われる。

その一つの問題点は、これらの手法ではなんらかの方法で流体構造界面における流速を補間により計算する必要があるが、実際には界面の表裏に渡る流速のスムーズさが無い(連続ではあるが、1階微分は一般に不連続)ために、補間

[筆者紹介]



ひさだ としあき。1973年早稲田大学理工学部機械工学科卒業。1975年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了, 1979年同博士課程修了, 工学博士。東京大学助手, 助教授, 教授(工学部)を経て現在同大学・新領域創成科学研究科教授。研究テーマは連続体力学, 非線形有限要素法, 流体構造連成解析, バイオメカニクス。日本機械学会フェロー。代表著書は『非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎』(丸善, 1992), 『非線形有限要素法の基礎と応用』(丸善, 1995, 共著者野口裕久)。



わしお たくみ。1988年金沢大学理学部数学科卒業。1990年大阪大学理学部数学科修士課程修了後 NEC にてスーパーコンピュータ用アルゴリズムなどの開発に従事。2004年より東京大学新領域創成科学研究科・(独)科学技術振興機構 CREST 研究員として心臓シミュレータの開発に従事。混合型有限要素法を通じてラグランジュ乗数法に関心を持つようになった。連続体の制約条件付き非定常問題におけるラグランジュ乗数法の根本原理の理解, 安定な離散化法, 効率的かつロバストな反復解法を研究テーマとしている。日本応用数学会会員。

の精度が保証できないことである。二つ目の問題点は、これら手法はラグランジュ未定乗数法に基づいており、この手法は本来なら変分問題に対して適用されるべきものであるにも拘わらず、流体の支配方程式である Navier-Stokes 方程式がラグランジュ未定乗数法を適用するに当って、第一変分式として正確に把握・定式化されていないことである。本稿の一つの目的は、上記の視点からラグランジュ未定乗数法の適用について再考することである。

また文献[3]の大動脈弁のシミュレーションにおいては、解析スキームの不安定性から拍出される血流のピーク時の Reynolds 数が実際の 1/3 から 1/5 程度に抑えられている。さらに、心臓の収縮期に限って流入・流出の圧力差を陽に与えた解析のみがなされ、弁が大動脈圧と左心室圧の圧力差に耐えて逆流を防ぐ拡張期のシミュレーションは示されていない。本稿の二つ目の目的は、完全な一心周期における大動脈弁のシミュレーションを、生理学的に妥当な体循環モデルと連成させて実行するのに必要な新たな技法を導入することである。なお解析に当たっては導出される方程式を強連成的に解く際の反復ソルバも重要な要素技術となる。

以降では、最初に第2節において、有限要素法による流体および構造の支配方程式の記述を示し、第3節において、界面への流速の補間を必要とせず、さらに連続の式も取り入れた制約条件式を導入する。さらに、第4節では、この考えを拡張し、流体領域が膜構造によりほとんど分断される場合の安定化にも用いる。ここで導入される技法は、拡張期におけるシミュレーションを安定に行う際に必要となる。第6節では、体循環との連成を取り扱う上で重要な windkessel モデルとの連成法について述べる。第7節では、高速かつロバストな解法として、本手法を実装する上で重要となる反復ソルバについて筆者らの方法を述べる。最後に第8節において、提案手法を大動脈弁の解析に適用し、Valsalva 洞の効用について考察した事例を紹介する。

2 仮想仕事式による運動方程式の表記

本節では、流体と構造を連成させる前の個々の支配方程式について述べる。流体メッシュの運動は膜構造の変形には依存しないものの血管壁や心臓などの運動に合わせて変化するものとし ALE 表記を適用する。この場合、流体の流速を v と置けば流体の加速度は以下のように表される。

$$a(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + c \cdot \nabla_x v \equiv a_x \text{ in } \Omega(t) \quad (1)$$

ここで、 χ は ALE 座標、 x は配置空間に固定された Euler 座標とした。さらに、 $c = v - \hat{v}$ であり、 \hat{v} は ALE 座標の Euler 座標に対する相対速度である。また、 Ω は時刻 t において流体が占める配置空間である。流体は非圧縮性を仮定し、構成式は Cauchy 応力テンソル T が圧力 p と、変形速度テンソル D

によって定義される Newtonian 流体を仮定する.

$$T = -pI + 2\mu D, \quad D = \frac{1}{2}\{\nabla_x v + (\nabla_x v)^T\} \text{ in } \Omega \quad (2)$$

$$\nabla_x \cdot v = 0 \text{ in } \Omega \quad (3)$$

これをもとに仮想仕事の原理を現配置によって定式化すれば以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \delta W_f \equiv & \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho^f a_x d\Omega_x + 2\mu \int_{\Omega} \delta D : D d\Omega_x - \int_{\Omega} p \nabla_x \cdot \delta v d\Omega_x \\ & - \int_{\Omega} \delta p (\nabla_x \cdot v) d\Omega_x - \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho^f g d\Omega_x - \int_{\Gamma} \delta v \cdot \underline{\tau} d\Gamma_x = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで Γ は構造とは無関係に外力(表面力)ベクトル $\underline{\tau}$ が与えられる現配置における流体領域の境界であり, $\rho^f g$ は物体力ベクトルである. 以降では, $d\Gamma_x$, $d\Omega_x$ などの添え字 x は積分変数を表すものとする.

一方, 構造に対しては Lagrangian 表記を適用し, 弾性体の基準(初期)配置からの変位を u と置けば, 弾性体の加速度は以下のように表される.

$$a(X, t) = \frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial t^2} \equiv \ddot{u} \text{ in } \Omega_x \quad (5)$$

ここで, X は基準配置の Lagrange 座標であり, Ω_x は基準配置での構造領域を表すものとする. 弾性体には第二 Piola-Kirchhoff 応力 S が Green-Lagrange 歪 E と線形関係にある Saint-Venant 弾性体を仮定する. ここで C は一般化 Hooke 則に対応する 4 階の構成則テンソルである.

$$S = C : E, \quad E = \frac{1}{2}\{\nabla_x u + (\nabla_x u)^T + \nabla_x u \cdot (\nabla_x u)^T\} \text{ in } \Omega_x \quad (6)$$

このとき, 基準配置に基づく total Lagrangian 法による仮想仕事式は以下のように表される. ただし, 流体との整合性をとるために速度変分に対しての仮想仕事式を与える.

$$\begin{aligned} \delta W_s \equiv & \int_{\Omega_x} \delta \dot{u} \cdot \rho^s \dot{u} d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \delta \dot{E} : S d\Omega_x \\ & - \int_{\Omega_x} \delta \dot{u} \cdot \rho^s g d\Omega_x - \int_{\Gamma_x} \delta \dot{u} \cdot \underline{\bar{\tau}} d\Gamma_x = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで Γ_x は基準配置の構造領域において, 流体には接しないが外力(表面力)ベクトル $\underline{\bar{\tau}}$ が与えられた境界であり, $\rho^s g$ は物体力ベクトルである.

3 連続の式を用いた制約条件に基づく流体構造連成定式化

構造物が十分に薄く, その現配置が二次元曲面 Γ^c で表されるものと仮定する. また, 流体と構造物の相互作用はほとんど圧力を介して起こり, 粘性による影響は無視しても良いものと仮定する. 本節では, 界面 Γ^c で区切られた二

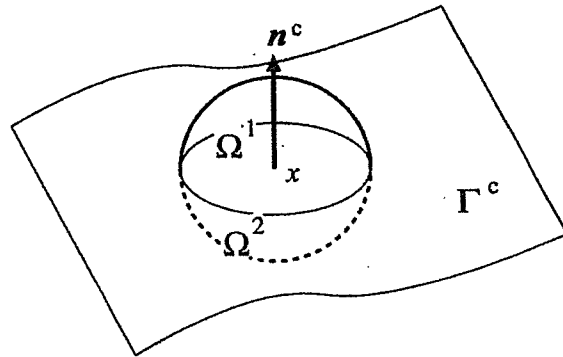


図1 点 $x \in \Gamma^c$ のまわりの二つの領域 Ω^1 と Ω^2
 単位法線ベクトル n^c は Ω^1 側を向いているものとする。

つの流体微小領域についての連続の式(3)より、制約条件を構成し流体構造連成方程式を導くことを試みる。図1のように Γ^c を境に構造上の点 x から半径 r 内の球状流体領域が単位法線ベクトル n^c 側の領域 Ω^1 と反対側の領域 Ω^2 に分断されるものとする。界面の近傍の Ω^1 領域、 Ω^2 領域の各々で連続の式(3)が成立すべきと考えられるから、半径 r の外でゼロとなる任意の連続微分可能なデルタ関数 δ_r に対して

$$\int_{\Omega^1} \delta_r(y-x) \nabla_y \cdot v(y) d\Omega_y^1 = 0, \quad \int_{\Omega^2} \delta_r(y-x) \nabla_x \cdot v(y) d\Omega_y^2 = 0 \quad (8)$$

と置く。連成面での制約条件の構成においては、流体と構造物の変位の関連付けが必要となる。そのため、界面での流速とその近傍での流速を関連付ける式をガウスの定理を用いて導入し、その際に式(8)を適用すると

$$\int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot v(y) d\Gamma_y^c = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^1} \nabla_y \delta_r(y-x) \cdot v(y) d\Omega_y^1 + \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \nabla_x \delta_r(y-x) \cdot v(y) d\Omega_y^2 \quad (9)$$

を得る。したがって、 Γ^c 上の法線方向の流速と構造物の速度の一致：

$$n^c \cdot (v - \dot{u}) \equiv 0 \text{ on } \Gamma^c \quad (10)$$

を仮定すると

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega^1} \nabla_y \delta_r(y-x) \cdot v(y) d\Omega_y^1 - \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \nabla_x \delta_r(y-x) \cdot v(y) d\Omega_y^2 + \int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot \dot{u}(y) d\Gamma_y^c \equiv C_r(x; v, \dot{u}) = 0 \quad (11)$$

を得る。式(11)は任意に選ばれた点 $x \in \Gamma^c$ に対する制約条件式であるが、それを弱形式化するために Γ^c 上の与えられた重み関数 $\delta\lambda(x)$ を式(11)の両辺に乗じて積分すると次の制約条件式を得る。

$$\int_{\Gamma^c} \delta\lambda(x) C_r(x: v, \dot{u}) d\Gamma_x^c = 0 \quad (12)$$

式(12)を制約条件式として形式的にラグランジュ未定乗数法を適用すると以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta W_{rs} &\equiv \delta W_r + \delta W_s + \int_{\Gamma^c} \lambda(x) C_r(x: \delta v, \delta \dot{u}) d\Gamma_x^c \\ &+ \int_{\Gamma^c} \delta\lambda(x) C_r(x: v, \dot{u}) d\Gamma_x^c = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

以下では、上式による定式化が力学的に見て理に適ったものであることを示す。式(13)においてラグランジュ未定乗数法から派生する力の項である中辺第三項は、ガウスの定理を用いると以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^c} \lambda(x) C_r(x: \delta v, \delta \dot{u}) d\Gamma_x^c \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ \int_{\Omega^1} \nabla_y \delta_r(y-x) \cdot \delta v(y) d\Omega_y^1 \right\} d\Gamma_x^c \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ \int_{\Omega^2} \nabla_y \delta_r(y-x) \cdot \delta v(y) d\Omega_y^2 \right\} d\Gamma_x^c \\ &\quad + \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ \int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot \delta \dot{u}(y) d\Gamma_y^c \right\} d\Gamma_x^c \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ - \int_{\Omega^1} \delta_r(y-x) \nabla_y \cdot \delta v(y) d\Omega_y^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot \delta v(y) \right\} d\Gamma_x^c \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ - \int_{\Omega^2} \delta_r(y-x) \nabla_y \cdot \delta v(y) d\Omega_y^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot \delta v(y) \right\} d\Gamma_x^c \\ &\quad + \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \left\{ \int_{\Gamma^c} \delta_r(y-x) n^c(y) \cdot \delta \dot{u}(y) d\Gamma_y^c \right\} d\Gamma_x^c \\ &= - \int_{\Omega^1} \hat{p}(y) \nabla_y \cdot \delta v(y) d\Omega_y - \int_{\Gamma^c} \hat{p}^c(y) n^c(y) \cdot (\delta v(y) - \delta \dot{u}(y)) d\Gamma_y^c \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、

$$\hat{p}(y) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \delta_r(y-x) d\Gamma_x^c, & y \in \Omega^1 \\ -\frac{1}{2} \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \delta_r(y-x) d\Gamma_x^c, & y \in \Omega^2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\hat{p}^c(y) \equiv \int_{\Gamma^c} \lambda(x) \delta_r(y-x) d\Gamma_x^c, \quad y \in \Gamma^c \quad (16)$$

とおいた。ここで

$$\lim_{y_1 \in \Omega^1 - y} \hat{p}(y_1) - \lim_{y_2 \in \Omega^2 - y} \hat{p}(y_2) = \hat{p}^c(y), \quad y \in \Gamma^c \quad (17)$$

となるので Γ^c 上の関数 \hat{p}^c は、関数 \hat{p} の Γ^c における n^c の方向の跳びに対応していることに注意しよう。したがって、式(14)の右辺第一項は式(4)の中辺第3項の圧力勾配項に \hat{p} による圧力勾配項を加えることを意味し、第二項は界面 Γ^c において各流体領域 Ω^1 および Ω^2 にかかる垂直応力を表すものである。さらに式(15)と同様に、重み関数 $\delta\lambda$ に対して $\delta\hat{p}$ を定義し、式(10)を仮定すると式(13)の中辺第4項は

$$\int_{\Gamma^c} \delta\lambda(x) C_r(x; v, \hat{u}) d\Gamma_r^c = - \int_{\Omega} \delta\hat{p}(y) \nabla_y \cdot v(y) d\Omega_y \quad (18)$$

と変形でき、これは式(4)の中辺第4項に加えられるものである。このようにみると本手法は、 Γ^c での不連続性を有する流体にかかる圧力の補間のために、もとの流体メッシュにおける圧力補間関数に加え新たに式(15)により定義される関数 \hat{p} を重ね合わせたものにすぎないことがわかる。さらにその際に構造と流体の間で仮定した境界条件は界面の法線方向成分についての境界条件式(10)であることに注意しよう。

4 流体領域が分断される場合の解析について

ここでは、心臓弁がほとんど閉じ、弁の表裏で大きな圧力差が生じる状況下においても安定に解析を行なうための手法を展開する。

まず、図2(a)のように膜構造により流体領域が完全に二つに分断されている場合について考える。このとき、上部の境界に加えられる一定圧 p^1 と下部の境界に加えられる一定圧 p^2 が異なる場合においても、全領域にわたって流速ゼロの定常状態が実現されうる。このような状態は構造の配置変化に合わせて流体メッシュが移動する ALE 強連成手法[7]においては、膜構造の表裏の不連続性を許容する圧力変数の補間を行なうことにより自然に表現できる。しかし、流体メッシュが構造と無関係に配置される場合は第3節で導入した手法をもってしても完全な流体の静止状態を実現することは不可能である。すなわち \hat{p} ともとの流体の圧力補間関数をどのように組み合わせても各領域で異なる定圧をとる圧力関数を表現することができず、最適の表現によってもその誤差 (L_2 ノルムの意味において) は圧力差 $p^1 - p^2$ に比例して増加してしまうと考えられる。これは、実際には流体がほとんど静止しているにも関わらず、圧力差に応じて強さが増す流体の漏れが膜構造において発生することを意味する。

このような観点から、流体の静止状態は圧力が解析領域で一定値をとらない場合も含め離散化後も誤差なく表現されなければならないと考えられる。領域が分断されている場合、二つの領域で異なる定圧をとる場合も静止状態が実現される。そこで第3節と同様にして、このような定圧状態を表現する圧力補間関数(例えば Ω^1 上で1になり Ω^2 上でゼロになるもの)を追加するために以下の連続の式から出発すれば良いものと考えられる。

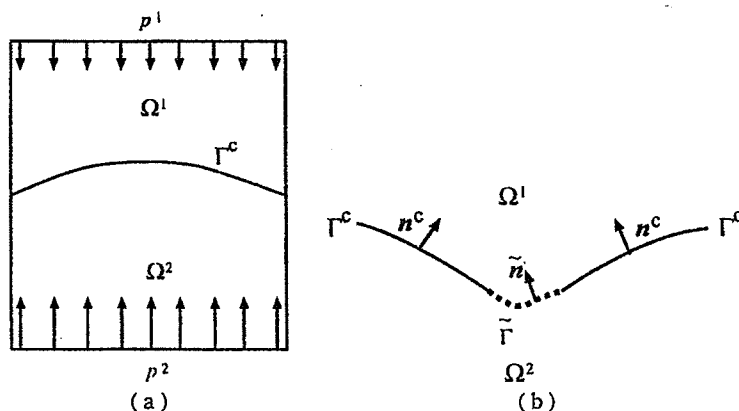


図2 流体領域が膜構造 Γ^c により、(a)完全に分断された場合と、(b)ほとんど分断された場合
(b)においては仮想膜 $\bar{\Gamma}$ が点線で表されている。

$$\int_{\Omega^1} \nabla_v \cdot v(y) d\Omega_v^1 = 0 \quad (19)$$

ここで式(8)と上式との違いに注意しよう。前者に対しては点 $x \in \Gamma^c$ についての任意性があるが、後者では唯一つの式が示されているにすぎない。したがって、前者で導入されたラグランジュ未定乗数は Γ^c 上の関数 λ であったが、ここでは一つのスカラー変数でありそれを β^1 と表すことにする。

ここでより一般の完全に分断されていない場合を想定して第3節と同様の議論を展開する。図2(b)のように構造配置の曲面 Γ^c とその流体領域内の自由端を境界とする仮想曲面 $\bar{\Gamma}$ を接続して得られる界面により、流体領域 Ω が二つの領域 Ω^1 と Ω^2 に分断されるものとする。さらに \bar{n} を $\bar{\Gamma}$ 上の Ω^1 に対して内向きの単位法線ベクトルとする。また、 Γ^1 を膜構造を考慮しない流体領域 Ω^1 の境界、その上の内向き単位法線ベクトル n^1 とする。このとき、境界条件式(10)を仮定し、 Ω^1 に対する連続の式(19)にガウスの定理を適用すると制約条件式：

$$\int_{\Gamma^1} n^1 \cdot v d\Gamma_x^1 + \int_{\bar{\Gamma}} \bar{n} \cdot v d\bar{\Gamma}_x + \int_{\Gamma^c} n^c \cdot \dot{u} d\Gamma_x^c \equiv C_1(v, \dot{u}) = 0 \quad (20)$$

を得る。そして、式(13)に加え、さらに式(20)をも制約条件式としてラグランジュ未定乗数法を適用すると、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathcal{R}}^{\text{closed}} &\equiv \delta W_f + \delta W_s + \int_{\Gamma^c} \lambda(x) C_r(x; \delta v, \delta \dot{u}) d\Gamma_x^c \\ &+ \int_{\Gamma^c} \delta \lambda(x) C_r(x; v, \dot{u}) d\Gamma_x^c + \beta^1 C_1(\delta v, \delta \dot{u}) \\ &+ \delta \beta^1 C_1(v, \dot{u}) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで新たな制約条件で生じた中辺第5項は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\hat{p}^1 C_1(\delta v, \delta \dot{u}) &= \hat{p}^1 \left\{ \int_{\Gamma^1} \mathbf{n}^1 \cdot \delta v d\Gamma_x^1 + \int_{\bar{\Gamma}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta v d\bar{\Gamma}_x + \int_{\Gamma^c} \mathbf{n}^c \cdot \delta \dot{u} d\Gamma_x^c \right\} \\
&= -\hat{p}^1 \int_{\Omega^1} \nabla_x \cdot \delta v d\Omega_x^1 - \hat{p}^1 \int_{\Gamma^c} \mathbf{n}^c \cdot \delta v d\Gamma_x^c + \hat{p}^1 \int_{\Gamma^c} \mathbf{n}^c \cdot \delta \dot{u} d\Gamma_x^c \\
&= -\int_{\Omega} \hat{p}^1 \chi^1 \nabla_x \cdot \delta v d\Omega_x^1 - \int_{\Gamma^c} \hat{p}^1 \mathbf{n}^c \cdot (\delta v - \delta \dot{u}) d\Gamma_x^c \quad (22)
\end{aligned}$$

ただし、 χ^1 は Ω^1 上で値 1 をとり、その他の流体領域ではゼロとなる関数である。式(22)より、 χ^1 がここで設けたラグランジュ未定乗数 \hat{p}^1 により Ω^1 上での一定圧を表すための基底関数になっていることがわかる。実装においては、 $\bar{\Gamma}$ 上で v を補間する必要が生じ、補間の程度に応じて χ^1 は $\bar{\Gamma}$ 近傍で適当に鈍った特性関数となる。

5 制約条件式の数値積分について

本節では、先に導入したラグランジュ未定乗数項の有限要素法による数値積分法について述べる。

ここでは、式(13)における制約条件項を扱う。同じ式の力の項の離散化は、この転置操作により与えられる。デルタ関数 δ_r の台の半径 r は、 Γ^c 上一定とし、 r の値は流体要素の平均的サイズの 1 倍から 1.5 倍程度になるように選ぶ。 r が小さいほど、 \hat{p} の近似能力が上がるが、流体メッシュに依存して離散化の際の数値積分の精度が落ちる。一方で、 r を大きくすると数値積分誤差は減少するが、式(15)により表現される圧力差 \hat{p} の分布が鈍ってしまう。上記の r の値は、バックグラウンドの流体メッシュの解像度と同程度のものを \hat{p} に対しても実現しようという理由から決めたものである。

λ の補間については、 Γ^c 上で構造解析のために与えられた要素を用い、要素内で 0 次補間することにする。inf-sup 条件の観点からもラグランジュ未定乗数 λ の補間は低次のものを適用するのが好ましいであろう。式(11)で定めた C_r の流体積分項および構造積分項は、それぞれの要素内の形状関数を用いて数値積分することにより求める。この際、積分誤差を小さくするために、少なくとも $\nabla \delta_r$ が原点および台の境界でゼロとなるように、適当なプロファイル $\phi(\psi'(0)=\psi'(1)=0)$ を定め

$$\delta_r(x) = \begin{cases} \phi(\|x\|/r)/(c_\psi r^2), & \|x\| \leq r \\ 0 & \|x\| > r \end{cases} \quad (23)$$

とする。ここで、 c_ψ を

$$c_\psi = \int_0^1 2\pi x \phi(x) dx \quad (24)$$

より定めると、式(16)により、 λ は \hat{p}^c と似た値を有するラグランジュ未定乗数となる。積分計算は、式(11)に基づき行なう。流体部積分項に関しては、 Ω^1, Ω^2 への分割を Γ^c 上の積分点での接平面による分割により近似し、近傍の

流体要素内の積分点がどちらの側に属しているか判断しながら数値積分を行なう。この際 $\nabla_v \delta_r(x-y)$, $x \in \Gamma^c$ の $n^c(x)$ 方向の成分は y が Γ^c に近づくにつれゼロになるので、少なくとも法線方向に対しては適切な精度が保証されると考えられる。構造部積分項に関しては、 Γ^c 上の積分点と同一連結成分上にある要素に関して数値積分を行なう。

6 外部電気回路モデルとの接続について

心臓弁モデルのシミュレーションにおいては、弁の一方の領域が心室であり他方が静脈、動脈または心房となる。特に静脈および動脈側に関しては、体循環を表現するために境界部において図3に示すような windkessel モデルと呼ばれる電気回路のアナロジーモデルがよく適用される。ここでは電流が流量に、血圧が電圧に対応する。本節では、この windkessel モデルとの連成の取り扱いについて述べる。

例として、第8節で取り上げる大動脈弁のシミュレーションの場合を想定して、左心室出口に相当する流入口での圧力が与えられ、大動脈側の出口には windkessel モデルが接続されているものとする。簡単のため流体領域 Ω は変形しないものとし、その流入口を Γ^{in} 、流出口を Γ^{out} で表すことにする。また、これら流入出口での流速および圧力はそれぞれ以下のように一変数に縮退しているものとする。ただし、 n^f はこれまでと同様に Ω に対する内向き単位法線ベクトルとする。

$$\begin{cases} v = -v^{out} n^f, & p = p^{out} \text{ on } \Gamma^{out} \\ v = v^{in} n^f, & p = p^{in} \text{ on } \Gamma^{in} \end{cases} \quad (25)$$

流入出口で法線方向にかかる一定圧を τ^{in} , τ^{out} とする。これは式(4)における界面力 $\underline{\tau}$ を以下のように定めることに対応する。

$$\underline{\tau} = \begin{cases} \tau^{out} n^f \text{ on } \Gamma^{out} \\ \tau^{in} n^f \text{ on } \Gamma^{in} \end{cases} \quad (26)$$

式(25)での縮退は、変数 v, p のみならず仮想仕事式(4)の変分 $\delta v, \delta p$ に対して

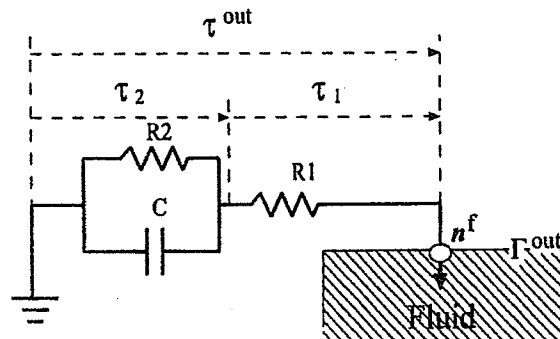


図3 windkessel モデル

も適用されることに注意されたい。変分に対する縮退は、力の釣り合いおよび流量の保存が境界の各点において局所的に成立するのではなく、各境界での合力に対する釣り合いおよび総流量に関する保存則が成立することを保証するものである。図3の windkessel モデルでは、 τ^{out} に関して以下の微分方程式が成り立つことがわかる。

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) A^{\text{out}} v^{\text{out}} + CR_1 A^{\text{out}} \frac{dv^{\text{out}}}{dt} - C \frac{d\tau^{\text{out}}}{dt} - \frac{\tau^{\text{out}}}{R^2} = 0 \quad (27)$$

ただし、 A^{out} は流出口の面積である。したがって、縮退式(25)のもと新たに追加した変数 τ^{out} も未知数に含め、式(27)を式(21)と連立させて解けば良い。

7 強連成解法のための連立一次反復ソルバについて

流体構造連成方程式(21)に対して、縮退条件(25)のもと windkessel モデル(27)を連立させ、式(21)の時間積分については Newmark- β 法[4]を、式(27)については後退 Euler 法を適用し、得られた非線形方程式を Newton-Raphson 法により解くことを考える。この場合、以下のような線形方程式を各 Newton-Raphson 反復で解く必要が生じる。

$$\begin{bmatrix} A_f & B_f^T & 0 & C_f^T \\ B_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_s & C_s^T \\ C_f & 0 & C_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ x_p \\ x_s \\ x_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f \\ r_p \\ r_s \\ r_\lambda \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで、未知数は修正量に、右辺は残差に対応し、上から流体流速、流体圧力(windkessel 圧力 τ^{out} も含む)、構造変位(シェル要素の場合はその回転自由度も含む)、流体構造連成により生じたラグランジュ未定乗数の順で並んでいるものとした。式(28)の係数行列は、不定値行列であり、通常よく用いられる ILU 前処理付き反復法[5]を適用する際には注意を要する。筆者らは文献[6]において、このような問題に対してもロバストかつ効率的な ILU 分解前処理列を実現するための fill-in 決定法を提案した。行列 A の LU 分解 $A=LU$ においては、非ゼロ成分 $L_{ik}(i>k)$ および $U_{kj}(k<j)$ の組み合わせより ij 成分に

表1 (i, k, j) の変数の組み合わせに対する fill-in レベルの設定法

(i, k, j) のブロック番号	fill-in レベル
(1, 1, 2), (2, 1, 1)	0 (要素内圧力補間が定数の場合は1)
(2, 1, 2), (4, 1, 4), (4, 3, 4)	∞
(3, 3, 3), (4, 4, 4)	∞
上記以外の組み合わせ	0

∞ はすべての fill-in を許容することを示す。

fill-in が発生する.

文献[6]においては, これら (i, k, j) の各々がどの変数に属するかをみて (i, j) において許容する fill-in レベルを決定する方法を検討した. 表1にその結果を示す. 第2行は, 制約条件に対応する行の対角ブロックにおいて, 上段 (k) からくる fill-in をすべて許容することにより正定値行列を生成するためのものである. 第3行は, 第3,4番目の対角ブロックでは完全LU分解を適用することを意味するが, これらは二次元問題であるため大きな負荷にはならない.

8 大動脈弁のシミュレーション

ここでは大動脈弁シミュレーションへの適用事例について述べる. なお, 平板がチャンネル内で運動する等のより簡単で容易な問題において, 本手法と ALE 有限要素法の解を比較し妥当性を検証したが紙面の都合上割愛する.

大動脈の半径は 1.2 cm とし, 三つの弁尖については, 厚みを 0.4 mm, 横弾性係数を 30 KPa, ポアソン比を 0.45, 質量密度 ρ^s を流体と同じく 1000 kg/m³, 血液の粘性係数 μ は水のおよそ 4 倍にあたる 0.0038 Pa·s とした. 流入口においては, 後出する図 6(a) に示す左心室圧を与え, 流出口には第 6 節で述べたように windkessel モデルをつないだ. このときのパラメータは, $R_1=1.0 E+7$ Pa sec/m³, $R_2=1.6 E+8$ Pa sec/m³ とした. さらに, 上記弁尖の剛性のみでは, 弁が閉じた場合の大動脈側と左心室の圧力差に耐えることができないため, 弁尖の三角形要素の辺にそって適当な非線形の剛性を有するひも要素を組み込んだ. 第 4 節で述べた弁尖間の隙間からの流量を計算するために三つの弁尖の自由端で構成される曲面を正三角形からの調和写像により構成した. ただし, 接触を考慮しない解析を行なっているために弁が閉じた場合には, 図 4 (b) のように自由端近傍で弁尖同士に多少の交差が生じる. このようなケースでの異常な力の発生を避けるために調和写像による三角形要素の法線ベクトル \bar{n} が大動脈の主軸方向 (n_0) に対して逆向きになるときは, その要素上での流量をゼロにして, 式(22)の $\bar{\Gamma}$ 上での積分を計算するようにした. また, こ

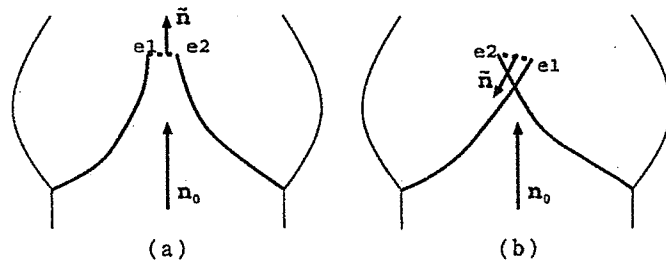


図4 主軸方向ベクトル n_0 と仮想膜 $\bar{\Gamma}$ 上の法ベクトル \bar{n} の関係の2次元的イメージ図

(a)では n_0 と \bar{n} が同方向を向いている ($n_0 \cdot \bar{n} \geq 0$). (b)では自由端 $e1$ と $e2$ が交差し, 逆方向となっている ($n_0 \cdot \bar{n} < 0$).

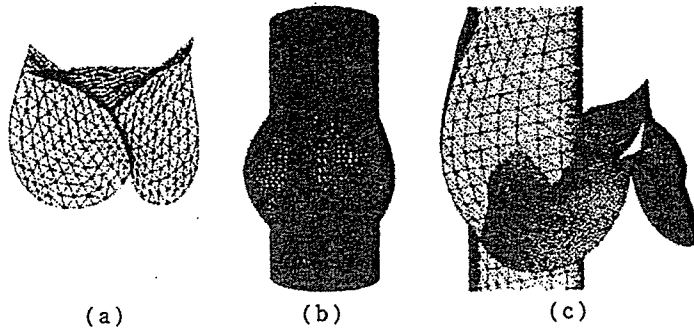


図5 大動脈シミュレーションのためのメッシュ

(a)は三つの弁尖のメッシュ, (b)は流体領域のメッシュ (Valsalva 洞の膨らみが血管半径の50%の場合), (c)は弁が開きかけたときの弁尖の変形の様子と, Valsalva 洞内部の流体メッシュ(一部のみ表示)を示す。

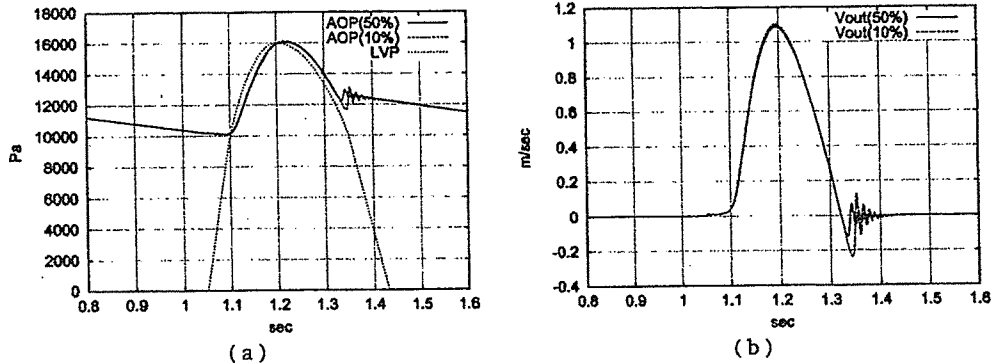


図6 windkessel モデルとのインターフェースにおける, (a)大動脈圧(AOP)と(b)流速(v^{out})
(a)では細かい点線で流体領域流入口に与えた左心室圧(LVP)の履歴も示している。

のときの流速の \bar{V} での補間値は, 式(16)と同様に, デルタ関数から定まる重み付けのもと, 流体領域上で体積積分を行なうことにより定めた. 有限要素離散化に関しては, 流体は 5/4c 要素(4 面体)を, 弁尖の構造部は DKT シェル要素(三角形)を適用した. 要素サイズはともに平均的に 2 mm 程度, 流体部要素数は 46440, 構造部はシェル要素が 702, ひも要素が 1110 である.

図5に弁尖部メッシュおよび流体部メッシュを示す. 文献[3]においては, 初期形状の対称性を考慮して 1/6 モデルでシミュレーションが実行されているが, ここでは全体モデルでのシミュレーションを行っていることに注意されたい. また図5(c)のように, 三つの弁尖の位置に合わせて Valsalva 洞と呼ばれる膨らみがあり, 弁が速やかに閉じることを助け, 逆流を抑える役割を果たしているとされている. これを検証するために, ここでは Valsalva 洞の膨らみを血管半径の 50% とした場合と 10% とした場合を比較してみる.

図6(a)に windkessel モデルとの接合部での圧力 r^{out} を, 図6(b)に流速 v^{out} を示す. ここでは, 拍動の周期を 0.8 秒とし, 二回目の拍動における計算

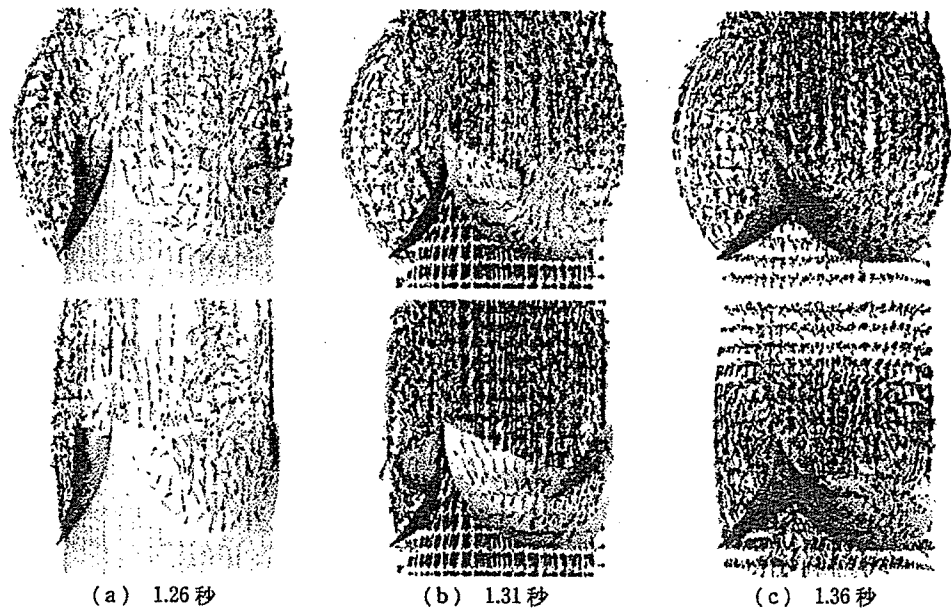


図7 流速ベクトルと弁尖の変形の様子

Valsalva 洞での流れを強調するため、流速ベクトルは大きくなるほど薄く表示されている。上段が Valsalva 洞の膨らみが半径比 50% の場合、下段が 10% の場合。(a) は流速が最大値に達した直後の様子。(b) は弁尖が閉じかけたときの様子。(c) はほぼ閉じた直後の様子。

結果を示している。図 6(b) においては、Valsalva 洞の膨らみが小さい場合にかなり大きな逆流が生じ、閉じた後の流量の振幅も激しくなっていることがわかる。これは弁尖にかかる負荷の面でも好ましいものではない。一方で図 6(a) に見られるように、どちらの場合も弁がタイミング良く閉じることにより大動脈圧の降下が抑えられ、閉じた後に流れが沈静化された。いずれの場合も windkessel モデルとの連成下で拍出のピーク時の流速は 1.1 m/sec に達しており、Reynolds 数 ($Re = \rho V r / \mu$, r は血管半径) はおおよそ 3500 に達する。一方で文献[3]において実施されたシミュレーションでは、ピーク時の Reynolds 数が流入出口の圧力差を強制的に制御することにより 900 に抑えられている。

図 7 に、流速がピーク値に達してから弁が閉じるまでの代表的な三つのタイミングでの、流速ベクトルと弁尖の形状を示す。左から 1.26 秒、1.31 秒、1.36 秒での状態となっており、上段が Valsalva 洞の膨らみが 50% の場合、下段が 10% の場合である。1.26 秒の上段の流れの様子から、手前からみて左側の Valsalva 洞に反時計まわりの渦ができていくことがわかる。また右側の Valsalva 洞の様子から、下向きの強い流れは主に中心に沿っており、上向きに転じると外周に向かっていることがわかる。下段では、弁尖が閉まる直前に大きく外側に折れ曲がっているが、上段では同じ時点で弁がすでにかなり閉じていることがわかる。下段右端においては下部に強めの逆流が生じていることが確